СТАНОВЛЕНИЕ И НАЧАЛЬНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

АЛЕКСАНДР ЛЬВОВИЧ АНДРИАНОВ *

В статье рассмотрены становление и начальные этапы развития алгоритмов решения задач линейного программирования (ЗЛП) и их влияние на развитие математики. Центральная проблема, связующая исследования, – поиск полиномиального и эффективного метода решения ЗЛП. Анализируется вклад А. Ю. Левина (метод центрированных сечений Левина – Ньюмана), А. С. Немировского (метод описанных эллипсоидов), Л. Г. Хачияна (доказательство полиномиальной разрешимости ЗЛП на основании нового подхода). Показано значение работы Н. Кармаркара, создавшего алгоритм, сходящийся к решению не по границе допустимого множества, а сквозь многогранник. Проанализирован вклад Л. А. Левина, изучавшего универсальные задачи, сложность и сводимость комбинаторных проблем.

Ключевые слова: линейное программирование, оптимизация, метод центрированных сечений Левина – Ньюмана, метод эллипсоидов, полиномиальная разрешимость, А. Ю. Левин, А. С. Немировский, Л. Г. Хачиян, Н. К. Кармаркар.

THE MAKING AND EARLY DEVELOPMENT OF LINEAR-PROGRAMMING METHODS

ALEKSANDR LVOVICH ANDRIANOV ¤

The paper reviews the making and early development of linear-programming methods (LPM) and how they influence the development of mathematics. The core problem that linked together many studies was the search for an effective polynomial way to tackle the tasks of linear programming. The paper analyzes the contributions of A. Yu. Levin (Levin – Newman method of central sections), A. S. Nemirovski (ellipsoid method), and L. G. Khachiyan (new approach-based proof of LPP polynomial-time solvability), and demonstrates the influence of the revolutionary

* ООО «Джей Энд Эс». Россия, 119421, Москва, ул. Обручева, д. 4, корп. 1, кв. 52. E-mail: andrianovalexl@gmail.com.

¤ LLC "J & S". Ul. Obrucheva, 4–1–52, Moscow, 119421, Russia. E-mail: andrianovalexl@gmail.com.

Вопросы истории естествознания и техники. 2017. Т. 38. № 2. С. 351–361.
Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki, 2017, vol. 38, no. 2, pp. 351–361.

work of N.K. Karmarkar who created an algorithm that converges to the solution by cutting through the feasible polyhedron instead of going along its boundary. The contribution of L. A. Levin who investigated the universal problems, complexity and reducibility is also considered

Keywords: linear programming, optimization, Levin – Newman method of central sections, ellipsoid method, polynomial-time solvability, A. Yu. Levin, A.S. Nemirovski, L.G. Khachiyan, N.K. Karmarkar.

Линейное программирование (ЛП) возникло одновременно в СССР (Л.В. Канторович) и на Западе (Дж.Б. Данциг), и предпосылки для его становления и развития в этих странах во многом были сходны. Оба упомянутых исследователя имели близкие взгляды на математику. Так, Данцигу принадлежит известная фраза: «Решающим критерием при оценке той или иной теории является ее способность решать те проблемы, которые послужили исходным толчком для ее развития» [1]. Точно так же одним из основных творческих принципов Петербургско-Ленинградской школы была глубокая разработка теории, которая впоследствии находит широкое применение на практике. Леонид Витальевич, будучи ярким представителем этой школы, подчеркивал, что «для моей деятельности характерным является постоянное взаимопроникновение теории и практики» [2]. Таким образом, в обоих случаях толчком к развитию ЛП стали конкретные задачи, продиктованные практикой. При этом огромное внимание уделялось именно практической направленности результатов, их внедрению в приложения и развитию реально применимых алгоритмов, что прекрасно иллюстрирует цитата из той же книги Данцига: «Эта книга основана на конструктивном рассмотрении исследуемых проблем. Она отражает начальную стадию развития теории, достаточно могущественной для того, чтобы справиться с теми трудностями, которые возникают при решении задач, лежащих в основе этой теории» [3].

Само рассмотрение задачи с ограничениями типа неравенств уже стало новаторским (Ж.Л. Лагранж, разработав правило множителей Лагранжа,

---

[1] См.: *Данциг Дж. Б.* Линейное программирование, его применение и обобщения. М.: Прогресс, 1966. С. 7.

[2] *Канторович Л. В.* Мой путь в науке // Успехи математических наук. 1987. Т. 42. Вып. 2 (254). С. 183.

[3] *Данциг.* Линейное программирование, его применение и обобщения... С. 8. Подробнее о раннем периоде развития ЛП и работах Канторовича и Данцига см.: *Андрианов А.Л.* Развитие линейного программирования в ранних работах Л. В. Канторовича // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 13 (48). М.: Янус-К, 2009. С. 323–339; *Андрианов А. Л.* Л.В. Канторович как создатель линейного программирования // ВИЕТ. 2009. № 4. С. 77–89; *Andrianov, A.* The Full Monge Problem Solution Base on the Linear Programming (LP) // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation. M.: PFUR, 2011. P. 220; *Андрианов А.Л.* Дж. Б. Данциг и линейное программирование // Казанская наука. 2014. № 8. С. 19–23; *Андрианов А.Л.* Развитие линейного программирования в работах Л.В. Канторовича 1930–50-х годов // Историко-математические исследования. Вторая серия. М.: Янус-К, 2011. Вып. 14 (49). С. 25–40.

изучал исключительно задачи с равенствами, причем только гладкие). Для общего случая выпуклой экстремальной задачи с неравенствами необходимое условие в 1939 г. получил В. Каруш, защитивший диссертацию в Чикаго. Тогда этому никто не придал значения – диссертация не была опубликована, и никто о ней не знал. Позже необходимые условия получили Х. У. Кун и А. У. Таккер.

Помимо создания метода разрешающих множителей и симплекс-метода (СМ) одним из важнейших достижений Канторовича и Данцига стало открытие ими огромного количества экономических задач, которые описываются ЛП, и осознание экономической интерпретации двойственной задачи. Оказалось, что множители Лагранжа прямой задачи являются оптимальным решением для двойственной и наоборот. Также выяснилось, что эта же математическая модель, кроме экономической, описывает также задачу управления. Большое практическое значение данных задач также способствовало тому, что центральной проблемой стало изучение не только теоретического, но и практического решения данных вопросов и в первую очередь, конечно, развитие и исследование соответствующих алгоритмов. Данная статья касается преимущественно именно алгоритмов, разработанных рядом исследователей для решения задач ЛП (ЗЛП), а также влияния этих алгоритмов на развитие математики в целом.

А. Ю. Левин. Один из замечательных результатов был получен Анатолием Юрьевичем Левиным (1936–2007), придумавшим в 1965 г. метод отсечения [4], который применим для поиска минимума не только линейной, но и произвольной выпуклой функции. Основной механизм работы его алгоритма таков [5]: пусть нам необходимо решить общую проблему выпуклой конечномерной оптимизации – найти минимум выпуклой дифференцируемой функции f на выпуклом конечномерном компактном теле $A \subset \mathbb{R}^d \, f(x) \to \min, \quad x \in A.$ Ю. Левин и Д. Ньюман независимо (Левин сделал это раньше, но опубликовал одновременно с Ньюманом, поэтому алгоритм называется метод Левина – Ньюмана) придумали алгоритм на основе теоремы Грюнбаума – Хаммера. В соответствии с ней, если через центр тяжести выпуклого тела B в k-мерном пространстве провести гиперплоскость, то она разделит его на множества, объем любого из которых будет не более $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ объема B.

Алгоритм, известный как метод центрированных сечений, заключается в следующем: обозначим B как B_0 и найдем его центр тяжести: $x_1 = \mathrm{gr}\ B_0$. Далее посчитаем $f'(x_1)$. В случае, когда это нулевой вектор, мы нашли решение. В противном случае, отбросим ту часть B_0, которая попала в полупространство $\Pi_0' = \left\{x : \left\langle f'(x_1), x - x_1 \right\rangle > 0\right\}$ поскольку в силу того, что f – гладкая и выпуклая, то $f(x) - f(\xi) \geq \left\langle x - \xi, f'(\xi)\right\rangle$, откуда для $x \in B_0 \cap \Pi_0'$

[4] *Левин А. Ю.* Об одном алгоритме минимизации выпуклой функции // Доклады АН СССР. 1965. Т. 160. № 6. С. 1244–1247.

[5] Подробнее см.: *Магарил-Иляев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. 2-е изд. М.: УРСС, 2003, С. 78–79.

очевидно, что $f(x) > f(x_1) \geq \min f$. После того как мы отбросим $B \bigcap \Pi'_0$, назовем оставшееся множество B_1 и произведем с ним те же действия. Продолжив действовать таким методом, построим последовательность множеств B_0, B_1, B_2... и их центров тяжести x_1, x_2, x_3... На каждой итерации будем выбирать y_i из $\{x_1, ..., x_i\}$, где значение f не больше каждого из $\{f(x_j), 1 \leqslant j \leqslant i\}$. Можно показать сходимость $f(y_i)$ к значению задачи со скоростью геометрической прогрессии.

Основная проблема данного алгоритма заключается в том, что поиск центра тяжести сам по себе является трудной задачей. Именно это препятствовало его применению на практике. Тем не менее, основная концепция, положенная в его основу, нашла дальнейшее применение и привела к созданию методов, получивших широкое промышленное применение, о чем речь пойдет далее (и кроме того, 17 лет спустя было показана полиномиальная скорость данного алгоритма в ЗЛП [6]).

А. С. Немировский. Следующий краеугольный камень был заложен Аркадием Семеновичем Немировским (род. в 1947 г.), который после защиты кандидатской диссертации работал под руководством профессора Д. Б. Юдина, предложившем Немировскому исследовать сложность задач математического программирования [7].

Эту же задачу Юдин поставил ранее Левину (через Красносельского), а потом он предложил решать ту же самую задачу Немировскому. Интересно, что Немировский вел свои исследования совершенно независимого от Левина и, более того, даже не знал о существовании работ последнего в этой области (хотя Левин в то время уже опубликовал свою работу в «Докладах АН СССР», но Немировскому она осталась неизвестной). В результате Немировский пришел к до некоторой степени близкому методу (в определенном смысле варианту метода отсечения), получившему название «метод описанных эллипсоидов» [8].

В основе этого метода лежат две идеи. Первая из них – уже описанная идея отсечения. Вторая (описывание эллипсоидов) базируется на интересном наблюдении: существует эллипсоид Лёвнера $E(K)$ – единственный эллипсоид наименьшего объема, содержащий данное выпуклое тело K в своей внутренности. В частности, имеет место замечательный факт: половину эллипсоида можно поместить в эллипсоид меньшего объема, чем изначальный эллипсоид, причем центр нового эллипсоида ищется по полуэллипсоиду за порядка d^2 операций. Так, если K – половина эллипсоида $K = E \cap H$,

[6] См.: *Yamnitsky, B., Levin, L.* An Old Linear Programming Algorithm Runs in Polynomial Time // 23rd Annual Symposium of Foundations of Computer Science, November 3–5, 1982, Chicago, Illinois, USA. New York, 1982, P. 327–328.

[7] Результаты работы изложены в: *Юдин Д. Б., Немировский А. С.* Оценка информационной сложности задач математического программирования // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12. Вып. 1. С. 118–142; *Юдин Д. Б., Немировский А. С.* Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. Экономика и математические методы. 1976. Т. 12. Вып. 2. С. 357–369.

[8] *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Методы оптимизации, адаптивные к «существенной» размерности задачи // Автоматика и телемеханика. 1977. Вып. 4. С. 75–87.

где $E = \{x \mid (x-z)^T Q^{-1} (x-z) \leqslant 1\}$, $H = \{x \mid a^T(x-z) \leqslant 0\}$ и z обозначает центр E, тогда $E(K)=\left\{x \mid (x-z)^T \bar{Q}^{-1}(x-\bar{z}) \leq 1\right\}$ может быть описан простой формулой: $\bar{z}=z-\frac{1}{n+1}Q\bar{a}$ $\bar{Q}=\frac{n^2}{n^2-1}\left(Q-\frac{2}{n+1}Q\bar{a}\bar{a}^T Q\right)$, где $\bar{a}=a/\sqrt{a^T Qa}$, n – размерность. И кроме того, можно показать, что vol $(E(K))$ / vol $(E) \leqslant e^{-1/2n}$. Таким образом, объем убывает в геометрической прогрессии с коэффициентом, который строго меньше 1 и зависит исключительно от размерности, не завися от каких-либо других параметров решаемой задачи.

Метод действует так: если перед нами опять стоит та же, что и в предыдущем пункте, задача, то опишем вокруг B эллипсоид E_0. В случае, когда его центр x_0 лежит вовне B, проведем через него гиперплоскость, не пересекающуюся с B, и отбросим полуэллипсоид, не пересекающийся с B. В случае же, когда $x_0 \in B$, найдем $f'(x_0)$, и сделаем отсечение согласно методу Левина – Ньюмана. В результате у нас будет полуэллипсоид, который назовем E_0'. И здесь мы, воспользовавшись вышеупомянутым фактом, опишем вокруг E_0' эллипсоид меньшего объема, чем был у E_0, и назовем его E_1. Повторяя данную последовательность операций, получим последовательность, сходящуюся со скоростью геометрической прогрессии. На каждом шаге объем эллипсоидов в последовательности $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ будет уменьшаться в зависимости от размерности пространства в $\frac{k^k}{(k-1)^{\frac{k-1}{2}}(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}<1$ раз для любого натурального $k \geqslant 2$ [9].

Л. Г. Хачиян. После того как эти результаты Немировского были опубликованы, Леонид Генрихович Хачиян (1952–2005), работавший в Вычислительном центре АН СССР, показал, что на основании метода эллипсоидов можно доказать полиномиальную разрешимость ЗЛП. Этот результат впервые появился в «Докладах АН СССР» в феврале 1979 г. [10] Чтобы прочувствовать значение сделанного Хачияном открытия и понять, почему к этому событию было приковано большое внимание, опишем кратко положение, сложившееся к тому моменту в этой области.

ЛП стало широко применяться после того, как был заложен его алгоритмический и теоретический фундамент: некоторые экономические приложения существовали еще со времени первой работы Канторовича 1939 г. на эту тему, в 1947 г. Данциг создал СМ, а Дж. фон Нейман – теорему двойственности. В 1950-е гг. альтернативные алгоритмы, преимущественно итеративные методы на базе фиктивной игры двух лиц, бросили вызов СМ, но он отстоял свое доминирующее положение и оставался основным

[9] Подробнее о методе см.: *Магарил-Иляев, Тихомиров.* Выпуклый анализ и его приложения... С. 79–80.

[10] *Khachiyan, L. G.* A Polynomial Algorithm in Linear Programming // Soviet Mathematics Doklady. 1979. Vol. 20. No. 1. P. 191–194; *Хачиян Л. Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады АН СССР. 1979. Т. 244. № 5. С. 1093–1096.

методом решения в 1950-е и 1960-е гг. Несмотря на ошеломительный триумф СМ в приложениях, его эффективность вскоре была поставлена учеными теоретиками под сомнение. В фокус внимания математиков попал вопрос о полиномиальности алгоритма. В результате были найдены примеры (например, в статьях В. Кли и Г. Минти [11]), которые продемонстрировали, что в самом плохом варианте входных условий СМ может демонстрировать экспоненциальную зависимость количества шагов своего исполнения от длины закодированных исходных данных. Данное обстоятельство инициировало работу теоретиков, которая вскоре привела к тому, что Д.Р. Эдмондс в 1965 г. [12], С. Кук в 1971 г. и Р.М. Карп в 1972 г. (о работах Кука и Карпа см. далее) получили ряд результатов в теории сложности, которые лишь усугубили ситуацию, показав, что, несмотря на свою принадлежность к пересечению классов *NP и co-NP*, задача разрешимости ЛП все еще не имела никакого алгоритма с доказанной полиномиальностью времени исполнения. Задача разрешимости ставится следующим образом: даны m линейных неравенств с n неизвестными, все с рациональными коэффициентами, надо узнать, имеет ли эта система допустимое решение или она несовместна. Многие исследователи пытались найти полиномиальную версию СМ. И хотя обновленные версии остаются высоко конкурентоспособными по сравнению с более поздними методами, базирующимися на внутренней точке, и являются неотъемлемой частью арсенала любого оптимизатора, они по-прежнему имеют экспоненциальное поведение на определенных примерах. В какой-то мере их хорошее поведение при решении реальных практических задач было объяснено разными авторами с помощью анализа ожидаемого поведения. В целом вопрос о полиномиальности или не полиномиальности был в определенном смысле центральной проблемой.

Естественно, в таком историческом контексте результат Хачияна, получившего решение применением модификации метода отсечений и доказавшего тем самым в 1979 г., что ЗЛП может быть решена за полиномиальное время, стал прорывом, сделав автора знаменитым почти мгновенно. Столь бурная реакция на его открытие объясняется не только самим заявленным и доказанным результатом (полиномиальность ЛП), но и тем способом, каким она была доказана. Хачиян прибег к использованию метода эллипсоидов и аппроксимированию многогранного допустимого множества при помощи эллипсоидов. В то время это была абсолютно новой идея, которая представила подход совершенно необычный и, можно даже сказать, противоположный ставшему уже традиционному подходу (который всегда подходил к решению проблемы в терминах вершин, ребер, фаз 1 и 2 и конечной сходимости к точному решению в точной арифметике).

[11] *Klee, V., Minty, G.J.* How Good Is the Simplex Algorithm? // Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities Held at the University of California, Los Angeles, Calif., September 1–9, 1969, Dedicated to the Memory of Theodore S. Motzkin) / O. Shisha (ed.). New York; London: Academic Press. P. 159–175.

[12] *Edmonds, J.* Paths, Trees, and Flowers // Canadian Journal of Mathematics. 1965. Vol. 17. P. 449–467.

Всем этим моментам новый подход противопоставил парадигму, в которой предлагалось в качестве отправного пункта взять гигантские сферы, а затем строить последовательно уменьшающиеся эллипсоиды до тех пор, пока один из них не станет достаточно мал для того, чтобы, округлив координаты его центра, можно было получить решение.

Как уже было сказано, для решения проблемы сложности ЗЛП Хачиян воспользовался открытием Немировского (применил метод эллипсоида). По ходу дела ему пришлось преодолеть ряд сложностей: алгоритм изначально создавался для модели с действительными числами, а ему нужна была оценка расстояния до оптимального решения; Хачияну необходимо было установить некоторое количество ограничений на величины решений, объемы многогранников и точность, необходимую для проведения расчетов. Использование такого метода для ЛП было совершенно неочевидным. Кроме того, данная процедура решения включает вычисление квадратного корня из рационального числа, этот корень может быть иррациональным, что приводит к сложным проблемам при вычислениях и численном решении. Однако Хачиян заметил, что достаточно использовать вышеприведенные формулы приближенно, проводя вычисления только с точностью до $O(nL)$ бит, где L – длина бинарного кода (подаваемого на входе вычислительного алгоритма) системы рациональных неравенств, чью согласованность мы хотим проверить. Он также показал, что если система разрешима, то она имеет решение внутри шара радиуса 2^L, и что в случае ее несовместимости минимальное отклонение в каждой точке составляет по меньшей мере 2^{-L}. Исходя из этих наблюдений и геометрического уменьшения объема, он смог показать, что центр последовательности эллипсоидов, получаемой в результате применения этого подхода, станет допустимым максимум за $16n^2L$ итераций, если система совместимая. Поскольку ранее ничего подобного к ЛП не применялось, подход мог показаться даже «диким» в условиях существования известного конечного решения через применение преобразований к матрице.

Все это вызвало бурную реакцию в средствах массовой информации. ЛП уже имело огромное значение для промышленности, армии и бизнеса. Появилось множество попыток построить на новой основе метод для практического решения крупномасштабных ЗЛП. К сожалению, в целом их можно охарактеризовать как не очень успешные. Отчасти такую ситуацию можно объяснить тем, что алгоритм, по-видимому, требует количества итераций, близкого к худшей границе. Тем не менее некоторые исследователи (например, М. Грётшель, Л. Ловас и А. Схрейвер [13]) осознали потенциал метод эллипсоида для дальнейших исследований в области комбинаторной оптимизации.

Интересно, что сам Хачиян был удивлен ажиотажем вокруг своего результата и тем, что одного анонса в «Докладах АН СССР» о полиномиальности ЗЛП оказалось достаточно, чтобы принести ему всемирную славу. В 1982 г. Международное общество математического программирования

[13] *Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A.* The Ellipsoid Method and Its Consequences in Combinatorial Aptimization // Combinatorica. 1981. Vol. 1. P. 169–197.

(*Mathematical Optimization Society*) и Американское математическое общество (*American Mathematical Society*) наградили Немировского, Хачияна и Юдина Фалкерсоновской премией (*Fulkerson Prize*) за статьи, в которых содержались результаты, позволившие получить полиномиальный алгоритм для ЗЛП) [14].

Н. Кармаркар. После защиты в 1983 г. диссертации на степень доктора философии по компьютерным наукам под руководством Р. М. Карпа в Калифорнийском университете в Беркли Нарендра Кармаркар (род. 1957) начал работать в лаборатории Белла, где в 1984 г. создал алгоритм, решающий ЗЛП за полиномиальное время [15]. Предыдущие методы заключались в представлении задачи многогранником и последующем приближении к решению путем путешествия по вершинам. Алгоритм же Кармаркара идет к решению не по границе допустимого множества, а сквозь многогранник, что значительно ускоряет решение трудоемких задач оптимизации. Данный подход стимулировал разработку особого класса методов внутренней точки (целого семейства алгоритмов для решения задач линейной и нелинейной выпуклой оптимизации).

Первым такой метод для ЛП выдвинул фон Нейман, но его алгоритм не дал ни полиномиальной теоретической границы, ни эффективности на практике, где уступал (тоже не полиномиальному) СМ. С другой стороны, как уже сказано, метод эллипсоида Хачияна был уже полиномиален, но оказался не эффективен практически. Если n – число неизвестных, L – число бит для кодирования входных данных, то алгоритм Кармаркара требует $O(n^{3.5}L)$ операций, а метод эллипсоида – $O(n^6L)$ [16].

Алгоритмом Кармаркара стал первым, продемонстрировавшим существование метода с теоретической полиномиальностью и реальной эффективностью, способной превзойти СМ. Кроме того, он может быть распространен также и на выпуклое программирование.

Дополнительным вкладом стало возрождение интереса к изучению методов внутренней точки и барьеров. Ю. Е. Нестеров и А. С. Немировский предложили специальный класс барьеров, применимых к любому выпуклому множеству и гарантирующих, что число итераций алгоритма ограничено полиномом от размерности и точности решения.

Л. А. Левин. В 1970 г. Леонид Анатольевич Левин (род. 1948) написал трехстраничную заметку, которая была опубликована лишь тремя годами позже [17]. Чуть ранее, в 1971 г., в США вышла статья С. Кука [18]. За ней после-

---

[14] Подробнее см.: *Todd, M.* Leonid Khachiyan, 1952–2005: An Appreciation // SIAG/OPT Views-and-News. 2005. Vol. 16. No. 1–2. P. 4–6.

[15] *Karmarkar, N. K.* A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming // Combinatorica. 1984. Vol. 4. No. 4. P. 373–395.

[16] См.: *https://en.wikipedia.org/wiki/Interior_point_method; https://en.wikipedia.org/wiki/Karmarkar%27s_algorithm.*

[17] *Левин Л. А.* Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9. № 3. С. 115–116.

[18] *Cook, S. A.* The Complexity of Theorem Proving Procedures // Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Shaker Heights, Ohio, USA, May 3–5, 1971. P. 151–158.

довала работа другого американца, Р. М. Карпа[19], со списком из 21 NP-полной (NPC) задачи, привлекшая опять интерес к статье Кука. В СССР об этом тогда никто не подозревал, а Левин несколько по-другому смотрел на те же вопросы, полагая, что надо не только установить, что решение есть, но и найти его. Он описал шесть подобных NPC-задач поиска (на них еще ссылаются как на универсальные задачи). Вместе с этим для каждой из них был найден метод решения с оптимальным временем (в частности, эти алгоритмы осуществимы за полиномиальное время тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза о равенстве P и NP).

Теорема Кука – Левина утверждает, что задача выполнимости булевых формул относится к классу NPC, т. е. любая задача из NP может быть сведена за полиномиальное время с помощью детерминированной машины Тьюринга к задаче определения выполнимости булевой формулы. Пример такой задачи – это булево высказывание, комбинирующее булевы переменные с использованием булевых операторов. Высказывание выполнимо, если существует некоторый набор значений истинности для переменных, который делает все выражение истинным. За эти работы Кук и Карп получили премию Тьюринга.

Важное следствие – если существует детерминированный полиномиальный алгоритм решения задачи выполнимости булевых формул, то существует аналогичный алгоритм решения всех NP-задач, а значит, то же самое следует для любой NPC-задачи.

Данные работы стали новаторскими и определили вектор исследований, продемонстрировав универсальные задачи, из полиномиальной разрешимости которых следует полиномиальная разрешимость любой переборной задачи. К данному моменту нашли свыше 2000 подобных задач, а также технику сводимости для проверки «универсальности» любой новой задачи, которая позволяет не изучать ее отдельно, а просто проверить, сводится ли она к одной из уже известных задач. Фокус исследований переместился к поиску полиномиального метода решения любой универсальной задачи (в случае чего NP совпадет с P) или доказательства ее полиномиальной неразрешимости (в случае чего универсальные задачи окажутся в классе, принадлежащем NP, но за пределами P). Это – один из главных открытых вопросов, расцениваемый ныне как важнейшая нерешенная проблема теории вычислительной сложности (за него даже назначена Премия тысячелетия (*Millennium Prize*) в размере 1 млн долл.).

* * *

Несмотря на то что теория линейных неравенств могла возникнуть еще на заре математики, поскольку изучение неравенств – абсолютно естественное следствие развития теории СЛУ, изучение которых исчисляется тысячелетиями (они встречаются в вавилонских и египетских рукописях II века до н. э., в древнегреческих и индийских трудах, в китайском трактате «Математика в девяти книгах» даны правила решения СЛУ), произошло это

[19] *Karp, R. M.* Reducibility Among Combinatorial Problems // Complexity of Computer Computations / R. E. Miller, J. W. Thatcher (eds.). New York: Plenum, 1972. P. 85–103.

сравнительно недавно. Компенсируя эту задержку, развитие теории в XX в. приняло чрезвычайно бурный характер: вслед за единичными работами XIX и первой четверти XX в. последовал огромный поток работ. В СССР долгое время в этой области работал лишь ее первооткрыватель Канторович и небольшая группа его учеников. На Западе соответствующие исследования развивались бурными темпами. Однако, как отмечено выше, со временем ученые в СССР подхватили эту эстафету и внесли огромный вклад в развитие данного направления. И, что замечательно, все они (Хачиян, Юдин, Немировский и Нестеров) получили мировое признание, что еще раз свидетельствует о значимости их вклада.

References

Andrianov, A. (2011) The Full Monge Problem Solution Base on the Linear Programming (LP), in *Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation*. Moscow: PFUR Press. pp. 220.

Andrianov, A. L. (2009) Kantorovich kak sozdatel' lineinogo programmirovaniia [Kantorovitch as the Founder of Linear Programming], *Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki*, no. 4, pp. 77–89.

Andrianov, A. L. (2009) Razvitie lineinogo programmirovaniia v rannich rabotach L. V. Kantorovicha [Development of Linear Programming in the Early Works of L. V. Kantorovitch], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia, vtoraia seriia*, no. 13 (48), pp. 323–339.

Andrianov, A. L. (2011) Razvitie lineinogo programmirovaniia v rabotach L. V. Kantorovicha 1930–50-kh godov [Development of Linear Programming in Works of L. V. Kantorovitch in the 1930s – 1950s], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia, vtoraia seriia*, no. 14 (49), pp. 25–40.

Andrianov, A. L. (2014) Dzh. B. Dantsig i lineinoe programmirovanie [G. B. Dantzig and Linear Programming], *Kazanskaia nauka*, no. 8, pp. 19–23.

Cook, S. A. (1971) The Complexity of Theorem Proving Procedures, in *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Shaker Heights, Ohio, USA, May 3–5, pp. 151–158.

Dantsig, Dzh. (Dantzig, G. B.) (1966) *Lineinoe programmirovanie, ego primenenie i obobshcheniia [Linear Programming and Extensions].* Moskva: Progress.

Edmonds, J. (1965) Paths, Trees, and Flowers, *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 17, p. 449–467.

Grötschel, M., Lovász, L., and Schrijver, A. (1981) The Ellipsoid Method and Its Consequences in Combinatorial Optimization, *Combinatorica*, vol. 1. pp. 169–197.

Iudin, D. B. and Nemiroskii A. S. (1976) Otsenka informatsionnoi slozhnosti zadach matematicheskogo programmirovaniia [The Estimation of Information Complexity of the Problems of Mathematical Programming], *Ekonomika i matematicheskie metody*, vol. 12, no. 1, pp. 118–142.

Iudin, D. B. and Nemiroskii, A. S. (1976) Informatsionnaia slozhnost' i effektivnye metody resheniia vypuklykh ekstremal'nykh zadach [Information Complexity and Efficient Methods for Solving Convex Extreme Problems], *Ekonomika i matematicheskie metody*, vol. 12, no. 2, pp. 357–369.

Kantorovich, L. V. (1987) Moi put' v nauke [My Journey in Science], *Uspekhi matemanicheskikh nauk*, vol. 42, no. 2 (254), pp. 183–213.

Karmarkar, N. K. (1984) A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica*, vol. 4, no. 4. pp. 373–395.

Karp, R. M. (1972) Reducibility Among Combinatorial Problems, in: Miller, R. E., Thatcher J. W. (eds.) *Complexity of Computer Computations.* New York: Plenum, pp. 85–103.

Khachiian, L. G. (1979) Polinomial'nyi algoritm v lineinom programmirovanii [Polynomial Algorithm in Linear Programming], *Doklady AN SSSR*, vol. 244, no. 5, pp. 1093–1096.

Khachiyan, L. G. (1979) A Polynomial Algorithm in Linear Programming, *Soviet Mathematics Doklady*, vol. 20, no. 1, pp. 191–194.

Klee, V. and Minty, G. J. (1969) How Good Is the Simplex Algorithm? in: Shisha, O. (ed.) *Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities Held at the University of California*, Los Angeles, Calif., September 1–9, Dedicated to the Memory of Theodore S. Motzkin). New York and London: Academic Press, pp. 159–175.

Levin, A. Iu. (1965) Ob odnom algoritme minimizatsii vypukloi funktsii [On a Convex Function Minimization Algorithm], *Doklady AN SSSR*, vol. 160, no. 6, pp. 1244–1247.

Levin, L. (1973) Universal'nye zadachi perebora [Universal Search Problems], *Problemy peredachi informatsii*, vol. 9, no. 3, pp. 115–116.

Magaril-Iliaev, G. G. and Tikhomirov, V. M. (2003) *Vypuklyi analiz i ego prilozheniia. 2-e izd. [Convex Analysis and Its Applications. 2nd ed.].* Moskva: URSS.

Nemiroskii, A. S. and Iudin, D. B. (1977) Metody optimizatsii, adaptivnye k "sushchestvennoi" razmernosti zadachi [Optimization Methods Adaptable to the "Essential" Problem Dimension], *Avtomatika i telemekhanika*, no. 4, pp. 75–87.

Todd, M. (2005) Leonid Khachiyan, 1952–2005: An Appreciation, *SIAG/OPT Views-and-News,* vol. 16, no. 1–2, pp. 4–6.

Yamnitsky, B. and Levin, L. (1982) An Old Linear Programming Algorithm Runs in Polynomial Time, in: *23rd Annual Symposium of Foundations of Computer Science, November 3–5, 1982*, Chicago, Illinois, USA. New York, pp. 327–328.