

ОПЫТ МИЛЛИКЕНА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ВАЛЕРИЙ НИКОЛАЕВИЧ ТУТУБАЛИН *, **ЮЛИЯ МИХАЙЛОВНА БАРАБАШЕВА ****,
ГАЛИНА НИКОЛАЕВНА ДЕВЯТКОВА ***, **ЕЛЕНА ГЕОРГИЕВНА УГЕР ******

Опыты Милликена по измерению заряда электрона широко известны, и их данные используются в преподавании, в частности, для иллюстрации метода доверительных интервалов при статистической обработке измерений. Но обычно привлекаются лишь окончательно полученные Милликоном значения заряда, каждое из которых является результатом обработки нескольких измерений времени движения одной и той же заряженной капли масла при включении и отключении электрического поля. Первичные измерения остаются без внимания.

Для части капель (16 из общего числа 58) Милликен опубликовал первичные измерения. Эти измерения анализируются в данной работе методами математической статистики. Устанавливается, что они не обладают статистической устойчивостью: в этом смысле измерительная система Милликена работала недостаточно стабильно. Этот вывод лишает теоретической основы метод доверительных интервалов. Но оказывается, что если формально применить стандартные приемы теории ошибок, то взвешенное среднее заряда электрона (по первичным измерениям Милликена) получается очень близким к современному значению, а весьма узкий доверительный интервал содержит это современное значение (как и должно быть при идеальной применимости теории ошибок).

Ключевые слова: заряд электрона, опыт Милликена, статистическая устойчивость, доверительные интервалы, эмпирическая функция распределения, нормальный масштаб, теория ошибок наблюдений, критерий Колмогорова – Смирнова.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1. E-mail: vntutubalin@yandex.ru.

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, биологический факультет. Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 12. E-mail: jbarabash@mail.ru.

*** МГУ, биологический факультет.

**** МГУ, биологический факультет. E-mail: elenauger@yandex.ru.

THE MILLIKAN EXPERIMENT FROM THE POINT OF VIEW OF MATHEMATICAL STATISTICS

VALERY NIKOLAEVICH TUTUBALIN [□], YULIA MIKHAILOVNA BARABASHEVA ^{□□},
GALINA NIKOLAEVNA DEVIATKOVA ^{□□□}, ELENA GEORGIEVNA UGER ^{□□□□}

Famous experiments by Robert A. Millikan to determine the electron charge are often used as an illustration of the method of confidence intervals in the statistical analysis of experimental data. Yet the lecturers typically pay attention to the already processed data on the measurement of 58 drops, whereas each of these values relies on the results of several successive measurements. For 16 drops, Millikan provided the more detailed primary data, which are analyzed here with the methods of mathematical statistics. It turns out that Millikan's measurements were not statistically stable, which makes the method of confidence intervals inapplicable. However, the mean value of the electron charge, calculated on the basis of Millikan's primary data, is very close to the modern value, and the narrow confidence interval includes the latter.

Keywords: electron charge, the Millikan experiment, statistical stability, confidence interval, empirical distribution function, normal scale, observational error theory, the Kolmogorov – Smirnov test.

Введение

При рассмотрении событий, имевших важное значение в истории науки, особый интерес вызывают случаи, когда речь фактически идет об откровении или чуде. Откровение может состоять в каком-либо неожиданном теоретическом прозрении, ну а чудо – например, в определении той или иной физической постоянной с такой точностью, которая априори представляется невозможной. Например, в книге Р. Криза ¹ сообщается, что в свое время Эратосфен определил окружность Земли с точностью лучшей, чем 1 %.

Эксперимент по измерению Р. Милликеном заряда электрона также описывается в этой книге в качестве одного из десяти самых красивых экспериментов в физике, но с неким кислым привкусом, который исключает ощущение чуда в данном случае. Дело в том, что (в отличие от Эратосфена) сохранились первичные записи наблюдений Милликена. Их проанализировал в 1978 г. историк науки Дж. Холтон ². Он обнаружил, что для своей итоговой работы Милликен наблюдал движение по меньшей мере 140 заряженных капель в

[□] М. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia. E-mail: vntutubalin@yandex.ru.

^{□□} М. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Biology. Leninskie Gory, 1, str. 12, Moscow, 119234, Russia. E-mail: jbarabash@mail.ru.

^{□□□} М. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Biology.

^{□□□□} М. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Biology. E-mail: elenauger@yandex.ru.

¹ Криз Р. Призма и маятник. Десять самых красивых экспериментов в истории науки. М.: АСТ, 2014. С. 17–31.

² Holton, G. The Scientific Imagination: Case Studies. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

электрическом поле, а предъявил результаты только для 58 капель ³. При этом Милликен имел неосторожность написать, что он предъявляет в итоговой таблице не какую-то часть своих результатов, а все 58 капель, над которыми выполнялись наблюдения в течение 60 последовательных дней.

Поднялась бурная дискуссия, в процессе которой Милликена обвиняли не только в научном подлоге, но и в женоненавистничестве и антисемитизме (на основании частной переписки) ⁴. Научную сторону дела основательно проанализировал А. Франклин ⁵, который насчитал в общей сложности 175 капель, но значительную часть из них отнес к подготовительному периоду, когда Милликен еще только отлаживал установку. Включение или исключение почти всех остальных выброшенных Милликеном капель мало влияло на окончательный результат. Лишь одна капля оказалась (согласно Франклину) необъяснимо аномальной. Таким образом, вопрос о подгонке результатов под какую-то априорную концепцию (путем исключения части экспериментальных данных) в данном случае следует снять.

Однако в связи с избытком внимания к результатам, не опубликованным Милликеном, на наш взгляд, получилось так, что недостаточно проанализированными оказались те данные, которые Милликен опубликовал. Холтон и Франклин сообщают, что Милликен отбирал для публикации первичных измерений те случаи, когда, как ему казалось, эксперимент вышел наиболее удачно (на листах рабочего блокнота имеются его «резюмации» типа «Красота. Опубликовать.»). Всего такие результаты опубликованы для 16 капель (из 58). Нам показалось интересным применить к этим данным простейшие модели, которые в математической статистике предлагаются для обработки наблюдений. Далее при обсуждении результатов обработки мы будем иметь в виду первичные данные, приведенные в этой статье Милликена ⁶.

Милликен (а впоследствии и Франклин, который заново обработал данные Милликена) для каждой капли вычисляли некоторое среднее значение заряда электрона: одно число для каждой капли. Между тем первичные данные для каждой капли содержат несколько (обычно один-два десятка) пар измерений времени падения капли при отключенном поле и последующего подъема при включении поля. Каждая такая пара дает возможность оценить заряд электрона, т. е. для каждой капли можно получить выборку значений заряда. В идеале такие выборки должны отвечать одному и тому же теоретическому распределению (статистическая однородность результатов измерений, которая предполагается для вполне отлаженной измерительной системы). Таким образом, по опубликованным первичным данным можно получить 16 выборок, которые можно исследовать на статистическую однородность.

³ *Millikan, R. A.* On the Elementary Electric Charge and the Avogadro Constant // *Physical Review*. 1913. Vol. 2. No. 2. P. 109–143.

⁴ *Goodstein, D.* In Defense of Robert Andrews Millikan // *Engineering & Science*. 2000. No. 4. P. 30–38.

⁵ *Franklin, A.* Millikan's Published and Unpublished Data on Oil Drops // *Historical Studies in the Physical Sciences*. 1981. Vol. 11. No. 2. P. 185–201; *Franklin, A.* Millikan Oil-Drop Experiments // *The Chemical Educator*. 1997. Vol. 2. No. 1. P. 1–14.

⁶ *Millikan.* On the Elementary Electric Charge... Табл. IV–XX.



Рис. 1. Р. Милликен в лаборатории

Увы! Вывод состоит в том, что эти выборки далеки от статистической однородности. Измерительную систему Милликена нельзя считать вполне отлаженной. Следовательно, обычные методы статистической обработки (в частности, вычисление доверительного интервала для интересующей нас физической константы) теряют научное основание. Но, к удивлению, формальная статистическая обработка (конечно, с учетом поправки значения вязкости воздуха, которое у Милликена занижено) дает с большой точностью (лучшей, чем 0,1 %) современное нам значение заряда электрона. Доверительный интервал содержит современное значение, как и должно быть в идеале. Милликен сумел отобрать для публикации наблюдения таким образом, что сдвиг части из них в одну сторону от

истинного значения компенсировался сдвигом остальных в другую сторону. Понятно, что совершить такое, не зная, какое значение заряда электрона будет принято через сто лет, можно только в порядке чуда. Нужно не осуждать Милликена за сокрытие части данных, но восхвалять за способность совершить чудо.

Данные Милликена давно используются в учебной литературе по математической статистике⁷. Однако следует обратить внимание на то, что научная ситуация с этими данными далеко не столь проста, как она преподносится в учебниках.

Принципиальная сторона теории и эксперимента

Основной частью измерительного прибора Милликена являются две круглые латунные пластины диаметром 22 см, закрепленные друг над другом с помощью эбонитовых распорок на расстоянии $h = 16$ мм (с допуском не хуже 0,01 мм). По краю пластины обернуты эбонитовой лентой так, что между ними получается замкнутое пространство. Это устройство из двух пластин, которое можно называть также «конденсатором», помещено в сосуд, в котором можно менять давление воздуха. Последнее измеряется ртутным манометром с точностью до 0,1 мм. В сосуде и ленте предусмотрены стеклянные окошки для освещения и наблюдений. Сам же сосуд помещен в бак, наполненный машин-

⁷ Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1962; Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Изд-во МГУ, 1963.

ным маслом, с целью выравнивания температуры (во избежание конвекции воздуха в пространстве между пластинами).

В центре верхней пластины проделано маленькое отверстие, по мере необходимости открываемое или закрываемое электромагнитной задвижкой, а над верхней пластиной можно разбрызгивать капли часового масла ⁸.

Капли получающегося масляного тумана опускаются под действием силы тяжести и время от времени попадают по одной в отверстие на верхней пластине. В конце концов они оказываются в пространстве между пластинами. Там предусмотрено такое освещение, что капля видна как сияющая звездочка на черном фоне (однако нагрев воздуха этим освещением, который мог бы вызвать конвективные движения, по возможности исключен). Эту каплю предстоит несколько раз гонять вниз и вверх, включая и выключая электрическое поле между пластинами.

Сначала экспериментатор должен убедиться в том, что капля имеет достаточный электрический заряд (нужного знака), чтобы при включении электрического поля между пластинами она перестала падать вниз и стала подниматься вверх. Если это так, то опыт возможен, а если нет, то капля вскоре упадет на нижнюю пластину, пристанет к ней и перестанет существовать. Если капля годится для опыта, то сначала измеряется время падения капли под действием силы тяжести между двумя рисками оптической системы, что соответствует определенному пути $d = 1,021$ см. Затем, не давая капле достигнуть нижней пластины, экспериментатор подключает к пластинам электрическую батарею (разность потенциалов V порядка нескольких тысяч вольт). Под действием однородного поля между пластинами капля перестает падать и начинает подниматься. Измеряется время, в течение которого капля проходит путь d в обратном направлении (т. е. снизу вверх). Свой электрический заряд капля могла получить при разбрызгивании масла в результате трения, либо она могла поймать из воздуха электроны или положительные ионы. Предусмотрена возможность ионизации воздуха (излучением радия, либо рентгеновским излучением) для скорейшего изменения заряда капли. Как только подключается напряжение, заряженные частицы, находящиеся в воздухе и не севшие на каплю, практически мгновенно притягиваются к пластинам, так что свой путь наверх капля совершает с постоянным зарядом. Его можно определить с помощью закона Стокса для силы сопротивления движению шара в вязкой среде, воспользовавшись известным значением вязкости воздуха. Радиус капли определяется по времени ее падения. Милликен не сомневался в том, что этот заряд есть целое кратное некоего элементарного электрического заряда, который и есть заряд электрона. Он выдвигает следующее остроумное соображение. Если после достижения верхней риски выключить напряжение и дать капле снова падать под действием силы тяжести (а воздух снова ионизировать), то заряд капли может измениться. Вновь включаем напряжение и определяем новый суммарный заряд. Весьма вероятно, что после нескольких таких путешествий капли с переменным числом элементарных зарядов окажется, что наибольший общий делитель этих чисел

⁸ Масло – это одно из изобретений Милликена: оно взято вместо воды, потому что масло испаряется несравненно медленнее, чем вода. Милликен описывал идею употребить масло вместо воды как откровение свыше (*Криз. Призма и маятник... С. 183*).

зарядов (в разных путешествиях капли) станет равным единице. Таким образом, определяя после каждого путешествия капли наверх ее суммарный заряд и беря наибольшую общую меру отрезков вещественной оси, отвечающих этим числам, мы найдем элементарный заряд. (Милликен вместо общей меры говорит о наибольшем общем делителе, что не совсем удачно для нецелых чисел.)

При простой принципиальной схеме эксперимента реальная работа экспериментатора должна была, однако, напоминать работу циркового жонглера. Вероятно, отмеренный путь капли $d \approx 1$ см размещался в середине между пластинами, т. е. сверху и снизу оставалось по 3 мм. Движение капли вниз занимало (в большинстве случаев) время от 10 до 40 сек., т. е. после прохождения капель нижней риски экспериментатору оставалось от 3 до 12 сек. на включение поля и начало наблюдений за подъемом капли. В некоторых случаях время падения капли было еще меньше – около 5 сек. Значит, примерно за полторы секунды надо было записать измеренное время падения и включить поле для подъема капли. После окончания подъема надо было отключить поле и подумать об ионизации воздуха на время падения капли. Эксперимент с одной каплей включал примерно 10–20 падений и подъемов и продолжался порядка получаса.

Математические детали

Из-за крайне малой массы капель вязкости воздуха хватало на то, чтобы движение капель практически мгновенно превратить в равномерное, при котором действующие на каплю силы уравниваются вязким трением.

Закон Стокса для силы сопротивления среды при ламинарном обтекании движущегося шара имеет следующий вид:

$$W = 6\pi\eta a\nu, \quad (1)$$

где W – сила сопротивления, η – коэффициент динамической вязкости, a – радиус шара, ν – скорость его движения. При движении капли вниз под действием силы тяжести $W = P$, где P – вес капли в воздухе (с учетом архимедовой выталкивающей силы), а скорость ν обозначается как ν_1 . Поскольку капля – это шар, радиус которого обозначен a , имеем следующее уравнение для определения a :

$$6\pi\eta a\nu_1 = P = \frac{4}{3}\pi a^3(\sigma - \rho)g, \quad (2)$$

где σ – плотность масла, ρ – плотность воздуха, g – ускорение свободного падения, ν_1 – измеренная в эксперименте скорость падения. (У Милликена вес капли в воздухе P неудачно обозначен как mg , что даже повлекло небольшую ошибку в его работе⁹.)

При подъеме капли действующая на нее сила есть $e_1 nF - P$, где e_1 – элементарный заряд, n – число таких зарядов в капле, F – напряженность электрического поля. Следовательно, имеем уравнение:

$$6\pi\eta a\nu_2 = e_1 nF - P, \quad (3)$$

⁹ Millikan, R. A. The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes's Law // Physical Review. 1911. Vol. 32. No. 4. P. 349–397.

в котором v_2 – скорость подъема. Складывая (2) с (3) и выражая a из (2), получаем следующее выражение для определения e_1 :

$$e_1 = 9 \sqrt{2\pi} \frac{1}{nF} (g(\sigma - \rho))^{-1/2} \eta^{3/2} \nu_1^{1/2} (\nu_1 + \nu_2). \quad (4)$$

При этом скорости падения и подъема выражаются через соответствующие времена по формулам $\nu_1 = \frac{d}{t_g}$, $\nu_2 = \frac{d}{t_F}$, где t_g – время падения под действием силы тяжести, t_F – время подъема под действием электрического поля.

Поправка Милликена к закону Стокса. Первоначально опыты Милликена по измерению заряда электрона, проводимые с каплями разных размеров, давали не вполне согласующиеся результаты¹⁰. Милликен предложил изменить закон Стокса для очень малых тел, размеры которых сравнимы со средней длиной свободного пробега молекул газа. Именно скорость, определяемая из закона Стокса, должна быть умножена на поправочный множитель, равный $\left(1 + A \frac{l}{a}\right)$, где l – средняя длина свободного пробега, a – радиус капли, константа A подбирается по экспериментальным данным. Впрочем, из-за некоторой неопределенности в вычислении длины свободного пробега Милликен записывает этот множитель в виде $\left(1 + \frac{b}{pa}\right)$, где p – давление воздуха в пространстве между пластинами а константа b подбирается по экспериментальным данным. При том способе вычисления l , который принят Миллике-ном, значение $A = 0,874$. Если a измерено в см, а p – в см рт. ст. при 23 °С, то рекомендуется значение $b = 0,0006254$.

Эквивалентно можно сказать, что правые части соотношений (2) и (3) умножаются на $\left(1 + A \frac{l}{a}\right) = \left(1 + \frac{b}{pa}\right)$. Но тогда правая часть соотношения (4) умножается на этот множитель в степени 3/2. Иными словами, правильное значение заряда электрона e дается формулой:

$$e = \left(1 + \frac{b}{pa}\right)^{-\frac{3}{2}} e_1. \quad (5)$$

Впрочем, Милликен предпочитает пользоваться следующей формулой:

$$e^{\frac{2}{3}} = \left(1 + \frac{b}{pa}\right) e^{\frac{2}{3}}_1. \quad (6)$$

Определение радиуса капли a при известном элементарном заряде e и известном числе n элементарных зарядов на капле. Скорость движения одной и той же капли пропорциональна действующей на нее силе. При падении капли

¹⁰ Millikan. The Isolation of an Ion...

эта сила равна весу капли P , а при подъеме капли равна разности $enF - P$ (F – известная напряженность электрического поля при подъеме капли.) Следовательно,

$$\frac{P}{enF - P} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_F}{t_g}, \quad (7)$$

где v_1 и v_2 – соответственно скорости падения и подъема, а t_F и t_g – время подъема и падения капли. Отсюда

$$P = \frac{enF}{1 + t_g/t_F}, \quad (8)$$

а зная P и используя (2), находим a по формуле

$$a = \left\{ \frac{3P}{4\pi(\sigma - \rho)g} \right\}^{1/3} \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) не зависят ни от поправки Милликена к закону Стокса, ни от вязкости воздуха и могут быть вычислены для любой пары наблюдений времени падения и подъема, относящихся к одной и той же капле. Разумно брать, конечно, соседние по времени падение и подъем, чтобы капля не могла заметно измениться (например, за счет испарения масла).

Проблема измерения интервалов времени и арифметических ошибок

В книге М. Уилсона можно найти следующий рассказ. Как-то раз сидели Милликен с Майкельсоном на крылечке у лаборатории. Милликен спросил старшего коллегу: «А с какой же точностью ты измерил скорость света?» На что Майкельсон отвечал: «Думаю, что с точностью до одной десятичной». Тогда Милликен сказал: «А я измерю заряд электрона с точностью до одной тысячной, или я ничего не стою»¹¹.

Независимо от того, верен или нет рассказ, по работам Милликена ясно, что была поставлена именно такая задача – измерить заряд электрона с точностью порядка 1/1000 или 0,1 %. Поскольку, согласно формуле (4), искомое значение выражается через время прохождения каплей определенного расстояния, то эти интервалы времени должны измеряться с точностью не хуже 0,1 %. Если, например, время падения капли составляет около 10 сек., то измерять его нужно с точностью порядка 0,01 сек. Или, рассчитывая на усреднение большого числа наблюдений, можно измерять и грубее, но, во всяком случае, без систематической ошибки.

В основном эксперименте измерения времени выполнялись с помощью хроноскопа Гиппа, шкалы которого позволяют измерять интервалы времени с точностью до 0,002 сек. Но это – интервалы времени между срабатываниями электромагнитов, отвечающими началу и концу измеряемого интервала. По-видимому, на уровне техники начала XX в. эти электромагниты могли

¹¹ Уилсон М. Американские ученые и изобретатели. М.: Знание, 1975. С. 222–223.

приводиться в действие только нажатием на кнопку в тот момент, когда экспериментатор видел то или иное событие (пересечение движущейся капель верхней или нижней риски в оптической системе). Можно лишь надеяться на то, что время реакции экспериментатора было одинаковым как для верхней, так и для нижней риски. Более того, при проверке хроноскопа по точным часам оказалось, что он имеет систематическую ошибку и разброс показаний. Так, при измерении промежутка времени 30 сек. (18 наблюдений) средняя ошибка составила $(-0,031)$ сек. (т. е. нужна поправка, равная $+0,1$ % от измеряемой величины) при стандартном отклонении $0,030$ сек. Средние ошибки при измерении других интервалов приведены в основной статье Милликена (числа наблюдений и стандартные отклонения не известны).

При рассмотрении этой таблицы мы сталкиваемся с тем фактом, что арифметические вычисления представляли для Милликена серьезную проблему. Перевод в проценты (от измеряемой величины) необходимых поправок хроноскопа выполнен не совсем верно. Учет поправок хроноскопа нам пришлось скорректировать. Далее с арифметическими ошибками в вычислениях Милликена мы будем сталкиваться постоянно. Но подробнее этот вопрос обсуждается в другой нашей работе ¹².

Проблема уточнения значения вязкости воздуха

Существует общеизвестное объяснение ошибки Милликена в значении заряда электрона, которое состоит в том, что он использовал неверное (заниженное) значение вязкости воздуха η . Качественно это объяснение верно, но желательно его проверить также количественно. Поскольку вязкость η входит в формулу (4) (с которой начинается расчет значения заряда) в степени $3/2$, для пересчета к новому значению вязкости надо просто умножить значение заряда по Милликену на отношение вязкостей в степени $3/2$. Однако (при ориентации на точность порядка $0,1$ %) это новое значение вязкости должно быть известно с точностью лучшей, чем $0,1$ %, т. е. (см. ниже), по меньшей мере с четырьмя верными значащими цифрами. Казалось бы, через век после опытов Милликена такая точность в определении вязкости должна была бы быть достигнута, но просмотр данных, имеющихся в современных справочниках, показывает, что это далеко не так. В большинстве случаев значение вязкости дается вообще лишь с тремя значащими цифрами, а в тех случаях, когда приводится и четвертая, удовлетворительного согласия между источниками нет.

В таком затруднительном положении мы решили обратить задачу Милликена: используя ныне известное с большой точностью значение заряда электрона, вычислить на основании данных Милликена значение вязкости воздуха с тем, чтобы сравнить его со значениями, приводимыми в различных источниках, и таким образом вывести правдоподобное значение вязкости воздуха с нужной точностью. Принципиально дело сводится к следующему. Берем из

¹² Тютубалин В. Н., Барабашева Ю. М., Девяткова Г. Н., Угер Е. Г. Измерение Миллике-ном заряда электрона и математическая статистика // http://ecology.genebee.msu.ru/3_SOTR/CV_Barabasheva_publ/Millikan.pdf.

таблиц первичных данных, опубликованных Милликеном, отдельное измерение, которое дает пару времен падения и подъема капли, а также количество элементарных зарядов, которые имела капля во время подъема. Используя современное значение заряда электрона e , определяем по формулам (8) и (9) радиус капли a . После этого определяем значение вязкости воздуха η по любой из формул (2) или (3): обе эти формулы дают в точности одинаковый результат, если a определить вышеуказанным способом. Наконец, учитываем поправку Милликена к закону Стокса для пересчета значения вязкости с учетом этой поправки.

Однако этот принципиально естественный подход не может быть в точности реализован. Прежде всего таблицы данных Милликена подготовлены к печати крайне небрежно и нуждаются частью в редактировании, а частью в исправлении арифметических ошибок. Не все численности элементарных зарядов капли могут быть (в необходимых случаях) исправлены с полной уверенностью. Далее, размеры капли меняются в течение опыта над одной и той же каплей. Правда, на основании анализа времени падения капли исследователи не нашли изменения ее размеров со временем¹³. Однако если учесть кроме изменения времени падения капли также изменение (в противоположную сторону) времени ее подъема, то изменение размеров капли в ряде случаев выявляется бесспорно. Причем наблюдается как уменьшение диаметра (очевидно, вследствие испарения масла), так и увеличение диаметра (возможная причина которого обсуждается в другой статье Милликена¹⁴).

Таким образом, желательно было бы сгладить получаемые размеры капли, например, с помощью линейной регрессии размера на время, чтобы как редуцировать ошибки отдельных определений a , так и учесть общую тенденцию. Но моменты отдельных измерений не указываются. Поэтому в качестве суррогата времени измерения мы приняли так называемое «активное» время, равное сумме времени падения и подъема капли от начала эксперимента с этой каплей до конца данного измерения. Это также вносит элемент субъективности.

Определение вязкости по данным Милликена (обращение задачи о заряде электрона). Единицей измерения вязкости в системе СГС является пуаз (пз); для наших целей удобно использовать в качестве единицы (10^{-7} пз). При обычных условиях воздух близок к идеальному газу, так что его вязкость существенно зависит от температуры, но практически не зависит от давления (последнее важно, так как значительная часть опытов Милликена производилась при пониженном давлении воздуха). В дальнейшем значение вязкости η будет снабжаться индексом: например, η_{20} обозначает значение вязкости при 20 °С. Нижеследующая таблица представляет результаты определения вязкости воздуха по отдельным измерениям Милликена; всего в его опубликованных данных можно набрать 230 отдельных измерений пар времени падения и подъема, но одно наблюдение из 230 нами исключено.

¹³ Fairbank, W. M. Jr., Franklin, A. Did Millikan Observe Fractional Charges on Oil Drops? // American Journal of Physics. 1982. Vol. 50. No. 5. P. 394–397.

¹⁴ Millikan. The Isolation of an Ion...

Таблица 1. Усредненные по отдельным каплям результаты определения вязкости воздуха при точно известном значении заряда электрона

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Температура (град. С)	Давление (см рт. ст.)	Вязкость при 23 °С $\times 10^7$	Эмпирическая дисперсия $\times 10^{13}$	Нормированный вес наблюдения
4	6	21	22,82	75,62	1832,67	2,5541	0,07662
5	16	14	23,70	74,68	1831,51	1,1674	0,11176
6	14	18	23,09	75,28	1829,58	2,4992	0,06712
7	13	14	23,00	76,06	1835,01	1,6481	0,07916
8	15	19	23,83	75,24	1836,79	3,1374	0,05643
9	17	8	23,06	73,47	1831,47	0,5632	0,13237
10	42	13	22,94	15,72	1829,68	4,2562	0,02846
11	46	19	22,81	14,68	1828,02	2,4952	0,07096
12	53	9	23,16	12,61	1832,45	2,2888	0,03664
13	48	9	22,81	15,35	1828,11	1,3316	0,06299
14	47	18	22,83	9,70	1832,75	2,7330	0,06138
15	41	11	23,05	19,01	1841,18	0,8256	0,12415
16	1	21	23,00	75,80	1842,69	11,0408	0,01772
17	56	20	23,21	4,46	1822,85	22,9408	0,00812
18	22	8	23,22	76,42	1837,36	1,4555	0,05122
19	52	7	22,98	16,95	1826,80	4,3818	0,01489

Взвешенное среднее = $1833,19 \times 10^{-7}$

Стандартная ошибка взвешенного среднего = $0,31 \times 10^{-7}$

Следует пояснить, какие правила математической статистики формально использовались при составлении этой таблицы. Имеется 16 групп неравноточных наблюдений. Весом группы i называется отношение k_i / s_i^2 , где k_i – число наблюдений в группе, s_i^2 – эмпирическая оценка дисперсии. Дисперсия среднего взвешенного вычисляется как единица, деленная на сумму всех весов, а стандартная ошибка – это корень квадратный из этой дисперсии.

Мы видим, что оценки вязкости по отдельным группам колеблются от 1823 до 1843 в указанных единицах (10^{-7} пз). Возможно ли поверить в то, что взвешенное среднее дает правильное значение вязкости с точностью порядка 0,31? Казалось бы – нет, и однако... Справочник Эберта¹⁵ дает значение $\eta_{20} = 1819$, а при пересчете по формуле Сазерленда (из того же справочника) получаем $\eta_{23} = 1833,45$. Различие меньше одной стандартной ошибки. Статья Монтгомери¹⁶, явно упоминая опыт Милликена, дает значение $\eta_{23} = 1832,5 \pm 1$. И это согласуется с результатом наших вычислений.

¹⁵ Эберт Г. Краткий справочник по физике. М.: Физматгиз, 1963. С. 181.

¹⁶ Montgomery, R. B. Viscosity and Thermal Conductivity of Air and Diffusivity of Water Vapour in Air // Journal of Meteorology. 1947. Vol. 4. No. 6. P. 193–196.

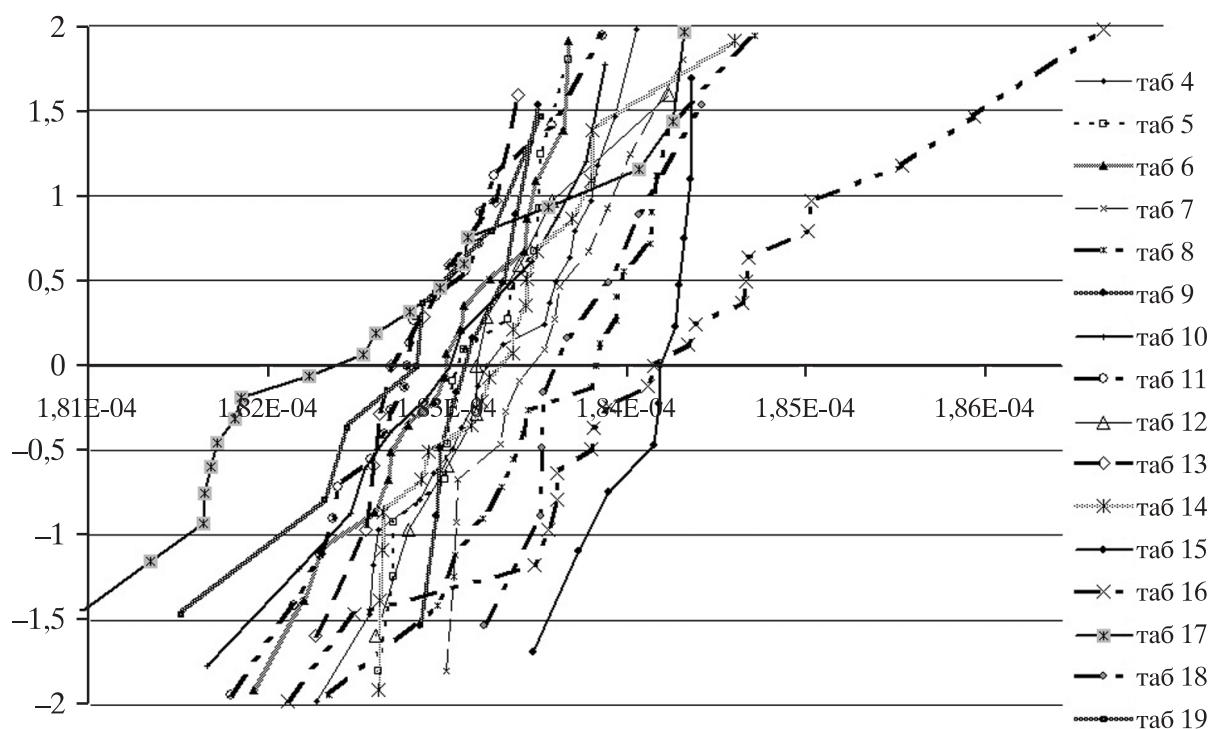


Рис. 2. Эмпирические функции распределения оценок вязкости воздуха по каждой капле в отдельности (в нормальном масштабе)

Наконец, Кадойя с соавторами¹⁷ отбирают как наиболее надежные значения η_{20} от 1819,2 до 1821. Первое число согласуется с вышеприведенными, а второе примерно на 0,1 % больше (что для наших целей представляет существенное расхождение).

Представим теперь в наглядном виде все 229 определений вязкости по данным Милликена с помощью эмпирических функций распределения для каждой капли в отдельности.

При одном взгляде на рис. 2 становится ясным, что эмпирические функции, отвечающие отдельным каплям, существенно отличаются, прежде всего сдвигами. Вывод о статистической неоднородности подтверждается с помощью критерия, аналогичного критерию Колмогорова – Смирнова¹⁸. Следовательно, получение правдоподобного средневзвешенного значения вязкости воздуха не может быть теоретически гарантировано в рамках математической статистики, а, скорее, должно рассматриваться как чудо: материал для публикации отобран Миллиkenом так, что сдвиг части данных по определению вязкости в одну сторону уравнивается сдвигом остальной части в другую сторону.

¹⁷ Kadoya, K., Matsunaga, N., Nagashima, A. Viscosity and Thermal Conductivity of Dry Air in the Gaseous Phase // Journal of Physical and Chemical Reference Data. 1985. Vol. 14. No. 4. P. 947–970.

¹⁸ Тутубалин, Барабашева, Девяткова, Угер. Измерение Миллиkenом заряда электрона... С. 18.

Определение заряда электрона при уточненном значении вязкости воздуха

По-видимому, можно с достаточным основанием предположить, что верное значение η_{23} не менее 1833×10^{-7} пз. Окончательное значение для заряда электрона в работе Милликена $e = 4,774 \times 10^{-10}$ эл. стат. ед. Оно соответствует значению $\eta_{23} = 1824 \times 10^{-7}$ пз. Результат пересчета e на новое значение вязкости (в единицах 10^{-10} эл. стат. ед.) равен $4,774 \times (1833/1824)^{1,5} = 4,8094$. Это больше, чем современное значение $e = 4,80320$ на 0,0062, т. е. почти на 0,13 %. Получается, что после устранения систематической ошибки, связанной с использованием заниженного значения вязкости, результат Милликена все-таки не укладывается в sacramentalную точность 0,1 %. Однако по причине малой надежности арифметических вычислений Милликена мы решили перевычислить значения e для всех тех 229 отдельных измерений, которые опубликованы Миллиkenом, внося уточнения, которые описывались для вычислений вязкости в предыдущем пункте, сохранив при этом принятое в вычислениях Милликена значение вязкости $\eta_{23} = 1825 \times 10^{-7}$ пз.

Результаты пересчета по 16 каплям (первичным данным, опубликованным в основной работе Милликена) сведены в таблицы 2, 3 и 4. В табл. 2 представлены капли, для которых поправочный множитель к закону Стокса небольшой (это капли с номерами, меньшими 23), в табл. 3 – остальные капли. (Милликен, будучи не вполне уверенным в правильности своей поправки, определял заряд электрона по первым 23 каплям). Табл. 4 объединяет данные табл. 2 и 3.

Таблица 2. Оценка заряда электрона по данным Милликена (выборка из первых 23 капель)

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Поправочный множитель, среднее значение	Средний заряд e ($\times 10^{10}$)	Дисперсия значения заряда ($\times 10^{24}$)	Вес среднего значения заряда ($\times 10^{-24}$)	Нормированный вес среднего значения заряда
4	6	21	1,029968	4,77279	4,45476	4,7141	0,1248979
5	16	14	1,038244	4,77729	1,68531	8,3071	0,2200938
6	14	18	1,037981	4,78494	4,02187	4,4755	0,1185779
7	13	14	1,037493	4,76359	2,70732	5,1712	0,1370088
8	15	19	1,038051	4,75719	5,65685	3,3588	0,0889895
9	17	8	1,038551	4,77736	1,10569	7,2353	0,1916967
16	1	21	1,017914	4,73428	18,2112	1,1531	0,0305521
18	22	8	1,055419	4,75427	2,40360	3,3283	0,0881834
Σ		123				37,743	1

Взвешенное среднее заряда e	Дисперсия взвешенного среднего	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации	Значение e , приведенное к вязкости 1833×10^{-7}
$4,77064 \times 10^{-10}$	$2,64947 \times 10^{-26}$	$1,62772 \times 10^{-13}$	0,000341	$4,80204 \times 10^{-10}$

Таблица 3. Оценка заряда электрона по данным Милликена (выборка из остальных 35 капель)

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Поправочный множитель	Средний заряд e ($\times 10^{10}$)	Дисперсия значения заряда ($\times 10^{24}$)	Вес среднего значения заряда ($\times 10^{-24}$)	Нормированный вес среднего значения заряда
10	42	13	1,193072	4,78303	7,0017	1,8567	0,0664774
11	46	19	1,251959	4,78900	3,1617	6,0094	0,2151637
12	53	9	1,344339	4,77107	4,0725	2,2099	0,0791257
13	48	9	1,271341	4,78848	1,9338	4,6540	0,1666327
14	47	18	1,270407	4,77039	4,6312	3,8867	0,1391601
15	41	11	1,181273	4,73831	1,3957	7,8813	0,2821860
17	56	20	1,385004	4,81001	39,570	0,5054	0,0180966
19	52	7	1,311595	4,79341	7,5587	0,9261	0,0331577
Σ		106				27,930	1

Взвешенное среднее заряда e	Дисперсия взвешенного среднего	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации	Значение e , приведенное к вязкости $1833 \cdot 10^{-7}$
$4,77073 \times 10^{-10}$	$3,58040 \times 10^{-26}$	$1,89220 \times 10^{-13}$	0,000397	$4,80213 \times 10^{-10}$

Таблица 4. Объединенные результаты таблиц 2 и 3.

Взвешенное среднее заряда e	Дисперсия взвешенного среднего	Стандартное отклонение	Коэффициент вариации	Значение e , приведенное к вязкости $1833 \cdot 10^{-7}$
$4,7707 \times 10^{-10}$	$1,5227 \times 10^{-26}$	$1,2340 \times 10^{-13}$	0,000259	$4,80208 \times 10^{-10}$

Из табл. 2–4 видно, что (после пересчета на более правильное значение вязкости) средние взвешенные значения заряда электрона оказываются (во всех трех вариантах) весьма близкими к современному значению $e = 4,80320 \times 10^{-10}$ эл. стат. ед. Точность в 0,1 % достигается с большим запасом. Более того, рассчитанные по формальным правилам стандартные отклонения возможных ошибок определения заряда электрона не оказываются превышенными истинными ошибками. Таким образом, формальное статистическое благополучие (коэффициенты вариации намного меньше 0,1 %) оказывается подтвержденным после уточнения заряда электрона и вязкости воздуха. Между тем наименьшая оценка e равна 4,734 (табл. 2, капля № 1), наибольшая 4,810 (табл. 3, капля № 56); эти оценки различаются между собой почти на 2 %. Поверить в то, что взвешенное среднее из 16 наблюдений будет иметь ошибку $11 / 48032 = 0,023$ % невозможно. Однако Милликен умел так отобрать наблюдения для публикации, что это оказалось возможным.

Графики эмпирических функций распределения оценок заряда электрона по отдельным каплям качественно имеют тот же вид, что и для оценок вязкости воздуха (см. рис. 2): явные систематические сдвиги, которые уравнивают друг друга.

Статистические свойства ошибок измерения времени

Контроль правильности определения тех или иных физических констант может осуществляться путем «обратного» пересчета по известным значениям этих констант величин исходных измерений. Конкретно для наблюдений Милликена можно по значениям заряда электрона и вязкости воздуха вычислить «теоретическое» время падения и подъема для каждого опыта с каплей. (Можно использовать либо принятые Миллиkenом значения констант, либо их современные значения. Далее используются современные значения.) Правда, для вычисления времени нужно знать радиус капли a , но его можно относительно точно вычислить, сглаживая результаты его определения в нескольких опытах с одной каплей. Разность «измеренное время падения / подъема» — «теоретическое время падения / подъема» можно назвать *ошибкой измерения времени* в отдельном наблюдении. Строго говоря, это «кажущаяся» ошибка, поскольку радиус капли точно не известен. Статистические параметры ошибок измерения времени падения приведены в нижеследующей табл. 5.

Таблица 5. Характеристики кажущихся ошибок времени падения (в сек.)

№ таблицы	№ капли	Число наблюдений	Среднее теоретическое время падения	Среднее значение кажущейся ошибки	Стандартное отклонение кажущейся ошибки
4	6	21	11,876	−0,0021	0,04045
5	16	14	18,769	−0,0153	0,03972
6	14	18	18,777	−0,0353	0,06281
7	13	14	18,682	0,0205	0,05192
8	15	19	18,932	0,0392	0,07568
9	17	8	18,412	−0,0146	0,04639
10	42	13	18,383	−0,0330	0,07688
11	46	19	26,009	−0,0706	0,07786
12	53	9	33,417	−0,0100	0,11425
13	48	9	32,479	−0,0866	0,07948
14	47	18	12,889	−0,0018	0,04649
15	41	11	23,920	0,1297	0,05165
16	1	21	4,316	0,0238	0,02947
17	56	20	5,073	−0,0287	0,04657
18	22	8	40,535	0,0965	0,11411
19	52	7	50,650	−0,1709	0,22604

При рассмотрении табл. 5 следует учесть прежде всего то обстоятельство, что значения теоретического времени падения одной и той же капли в разных наблюдениях весьма близки между собой, поскольку определяются размером

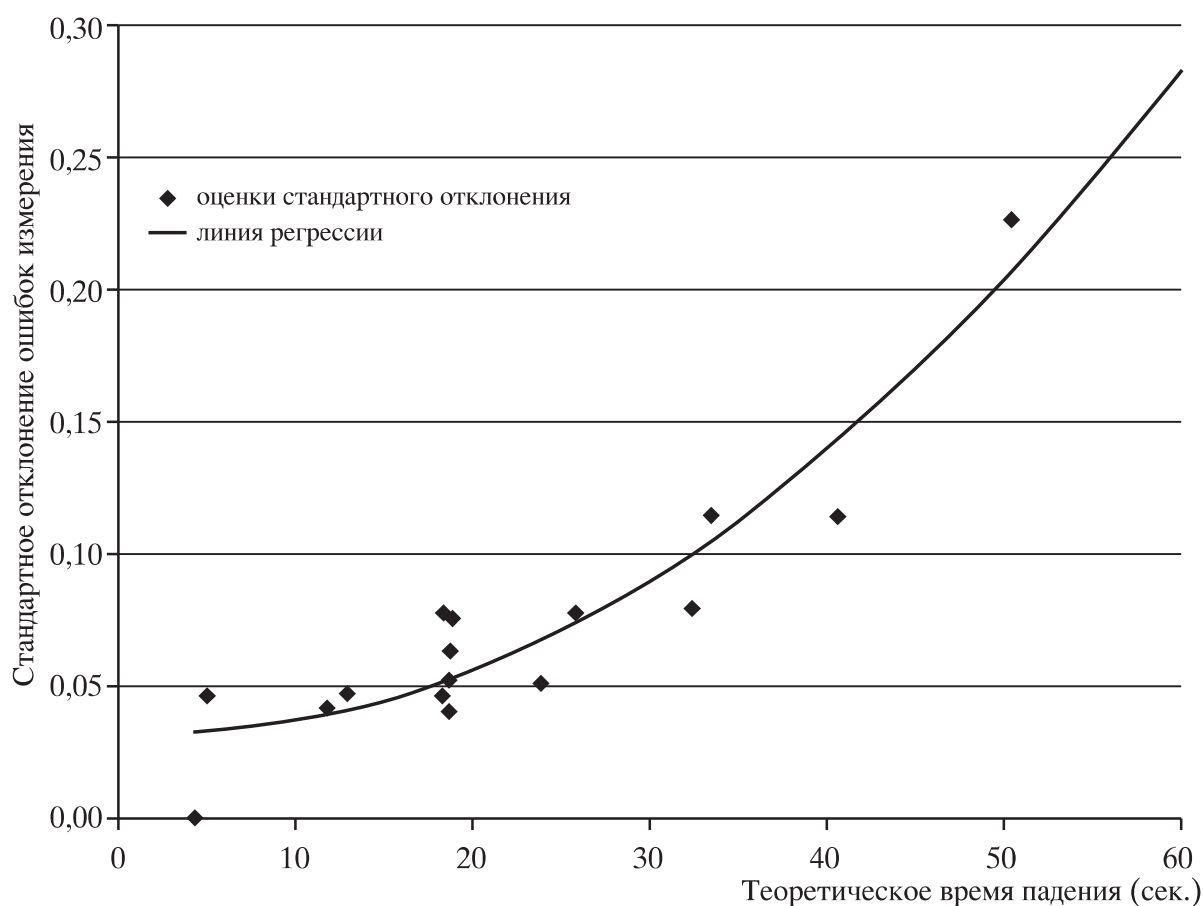


Рис. 3. Стандартное отклонение кажущейся ошибки измерения времени падения в зависимости от теоретического времени падения

капли, а этот размер мало меняется на протяжении опыта с одной каплей. (Значения времени подъема могут меняться сильно, поскольку зависят от заряда капли.) Таким образом, в столбце «среднее теоретическое время падения» стоят числа, которые почти однозначно характеризуют размер капли. Следующий столбец «среднее значение кажущейся ошибки» интересен с точки зрения установления факта наличия или отсутствия систематических ошибок при измерении времени падения. Сами эти средние значения невелики (в большинстве случаев порядка нескольких сотых долей секунды), но обычная практика требует оценки их статистической значимости. Это означает, что стандартные отклонения следует разделить на корень квадратный из числа наблюдений и сравнить результат со средним значением ошибки: статистика $\bar{x} \sqrt{n}/s$ не должна быть больше двух или трех (по модулю). Однако в табл. 5 предостаточно недолжных случаев, указывающих на систематическую ошибку. Уж таковы данные Милликена: это серии наблюдений, взаимно компенсирующие ошибки.

Интересно, однако, заметить, что имеется тенденция к возрастанию стандартных отклонений с ростом теоретических средних. Эта тенденция представлена на рис. 3.

Мы сгладили параболой эту зависимость с тем, чтобы попытаться экстраполировать полученную параболу в область гораздо больших значений времени наблюдения и применить для описания ошибок времени подъема капли. Нормированные с помощью экстраполированных стандартных отклонений ошибки измерения времени подъема представлены в виде эмпирической функции распределения на рис. 4.

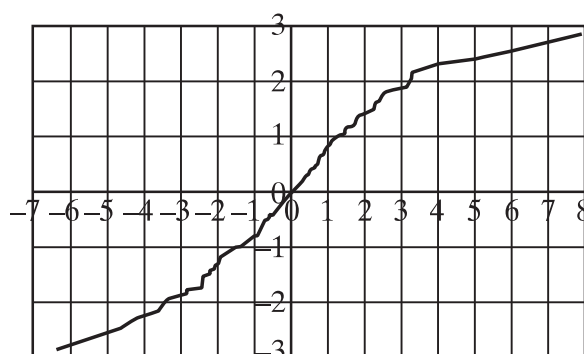


Рис. 4. Нормированные ошибки измерений времени подъема

В идеале (статистическая однородность, отсутствие систематических ошибок) на рис. 4 должна была получиться эмпирическая функция, соответствующая стандартному нормальному закону $N(0,1)$. В реальности получилось примерно это, но с «тяжелыми хвостами». Во всяком случае нормировка с помощью экстраполяции параболы, приведенной на рис. 3, скорее недооценивает, чем переоценивает статистический разброс ошибок измерения времени подъема. Среди значений времени подъема встречаются очень большие – порядка 500–600 сек. Экстраполированные значения стандартных отклонений составляют при этом примерно 20–25 сек. Однако не эти нормированные значения создают тяжелые хвосты на рис. 4, а другие, гораздо меньшие. То есть большие значения ошибок измерения в случае больших интервалов времени подъема вполне реальны. Понятно, что ошибки измерения времени порядка 20–25 сек. не могут быть объяснены ошибками экспериментатора. Это может происходить только за счет возникновения каких-то помех или неучтенных явлений в измерительной системе (упоминаются, в частности, конвективные движения воздуха).

Таким образом, вряд ли можно сомневаться в том, что аппарат Милликена работал недостаточно стабильно. Однако отметим еще раз, что Милликен сумел отобрать для публикации такие первичные данные (по части своих экспериментов), что их обработка приводит к неожиданно точному значению заряда электрона (конечно, после коррекции значения вязкости воздуха).

Заключение

Статистическая обработка результатов измерений всегда начинается с предположения о том, что где-то в основе модели помещаются независимые одинаково распределенные случайные величины. Без этого предположения те доверительные интервалы, которые являются результатом этой обработки, не заслуживают доверия. В случае опубликованных первичных измерений Милликена предположение о статистической однородности явно отклоняется.

Но заслуживает всяческого удивления тот факт, что Милликен сумел отобрать для публикации такие серии экспериментов, что после их обработки (и коррекции значения вязкости воздуха) получается очень близкое к истине значение заряда электрона. Более того, вычисленные по формальным правилам

доверительные интервалы для этой величины накрывают истинное значение с большим запасом. Возникает видимость идеального статистического благополучия, обязанная своим происхождением отбору данных для публикации.

Однако более тонкое применение методов математической статистики обнаруживает рост ошибок измерений с увеличением измеряемого интервала времени, позволяет выявить нестабильность измерительной установки, дает возможность описать характер этой нестабильности и объяснить (хотя бы частично) отбор Милликеном экспериментов для окончательной обработки.

References

- Crease, R. (2014) *Prizma i maiatnik. Desiat' samykh krasivykh eksperimentov v istorii nauki [The Prism and the Pendulum: The Ten Most Beautiful Experiments in Science]*. M.: AST.
- Ebert, G. (1963) *Kratkii spravochnik po fizike [A Short Guide on Physics]*. M.: Fizmatgiz.
- Fairbank, W. M. Jr. and Franklin, A. (1982) Did Millikan Observe Fractional Charges on Oil Drops? *American Journal of Physics*, vol. 50, no. 5, pp. 394–397.
- Franklin, A. (1981) Millikan's Published and Unpublished Data on Oil Drops, *Historical Studies in the Physical Sciences*, vol. 11, no. 2, pp. 185–201.
- Franklin, A. (1997) Millikan Oil-Drop Experiments, *The Chemical Educator*, vol. 2, no. 1, pp. 1–14.
- Goodstein, D. (2000) In Defense of Robert Andrews Millikan, *Engineering & Science*, no. 4, pp. 30–38.
- Holton, G. (1978) *The Scientific Imagination: Case Studies*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kadoya, K., Matsunaga, N. and Nagashima, A. (1985) Viscosity and Thermal Conductivity of Dry Air in the Gaseous Phase, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 14, no. 4, pp. 947–970.
- Linnik, Iu.V. (1962) *Metod naimen'shikh kvadratov i osnovy matematiko-statisticheskoi obrabotki nabludenii. 2-e izd. [The Method of Least Squares and the Foundations of Mathematical and Statistical Processing of Observations]*. Moskva: Fizmatgiz.
- Meshalkin, L. D. (1963) *Sbornik zadach po teorii veroiatnostei [The Collection of Problems in the Probability Theory]*. Moskva: Izdatel'stvo MGU.
- Millikan, R. A. (1911) The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes's Law, *Physical Review*, vol. 32, no. 4, pp. 349–397.
- Millikan, R. A. (1913) On the Elementary Electric Charge and the Avogadro Constant, *Physical Review*, vol. 2, no. 2, pp. 109–143.
- Montgomery, R. B. (1947) Viscosity and Thermal Conductivity of Air and Diffusivity of Water Vapour in Air, *Journal of Meteorology*, vol. 4, no. 6, pp. 193–196.
- Uilson, M. (1975) *Amerikanskije uchenye i izobretateli [American Scientists and Inventors]*. Moskva: Znanie.