НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ЛУЗИН И ОТЕЦ ПАВЕЛ ФЛОРЕНСКИЙ В РАЗМЫШЛЕНИЯХ О БЕСКОНЕЧНОСТИ

СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ ДЕМИДОВ

Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Россия, 125315, Москва, ул. Балтийская, д. 14
E-mail: serd42@mail.ru

Проблема бесконечности была одной из важнейших в творчестве богослова, философа и естествоиспытателя П. А. Флоренского и математика Н. Н. Лузина. Первый проявлял большой интерес к теоретико-множественным идеям Г. Кантора, с которыми познакомился еще будучи студентом первого курса. Однако даже в студенческие годы к Кантору и к его теории множеств Флоренский подходил с позиций именно философствующего богослова: канторовская идея трансфинитных порядковых чисел была для него прежде всего ключом к решению проблемы небесной иерархии. Второй же примкнул к сторонникам той точки зрения, что теоретико-множественные понятия и принципы нуждаются в пересмотре, что неограниченное употребление в математике понятия бесконечного и аксиомы выбора может приводить к выводам, лишенным гносеологического смысла. Таким образом, позиции, которые заняли Лузин и Флоренский в своих размышлениях, оказались совершенно различными. Рассмотрение генезиса этого расхождения и является темой настоящей статьи.

Ключевые слова: П. А. Флоренский, Н. Н. Лузин, актуальная бесконечность, континуум, небесная иерархия, дескриптивная теория множеств, аксиома выбора, эффективизм.

NIKOLAI NIKOLAEVICH LUZIN AND FATHER PAVEL FLORENSKY IN THEIR PONDERINGS ON INFINITY

SERGEI SERGEYEVICH DEMIDOV

S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, Russian Academy of Sciences
Ul. Baltiyskaya, 14, Moscow, 125315, Russia
E-mail: serd42@mail.ru

The problem of infinity has been one of the most important problems in the works of a theologian, philosopher and naturalist P. A. Florensky and a mathematician

Вопросы истории естествознания и техники. 2018. Т. 39. № 1. С. 9–26.
Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki, 2018, vol. 39, no. 1, pp. 9–26.

N. N. Luzin. The former was keenly interested in G. Cantor's set-theoretic ideas he first became familiarized with when he was the first-year university student. However, even in his student years Florensky studied Cantor and his set theory from the standpoint of a philosophizing theologian: for him, Cantor's idea of transfinite ordinals had been, first and foremost, the key to the problem of celestial hierarchy. Luzin joined the supporters of the viewpoint that set-theoretic concepts and principles needed to be revisited, that unlimited use of the notion of the infinite and the axiom of choice in mathematics could lead to conclusions devoid of epistemological meaning. Therefore, in their ponderings, Luzin and Florensky held opposite positions on this matter. Exploring the origin of this discrepancy is what this paper is devoted to.

Keywords: P. A. Florensky, N. N. Luzin, actual infinity, continuum, celestial hierarchy, descriptive set theory, axiom of choice, effectivism.

Введение

Судьба свела выдающегося русского математика, основателя Московской школы теории функций Николая Николаевича Лузина (1883–1950) и знаменитого богослова, философа и естествоиспытателя Павла Александровича Флоренского (1882–1937) в Императорском Московском университете, где оба они обучались на математическом отделении физико-математического факультета. Лузин поступил в университет в 1901 г., к тому времени Флоренский был уже студентом второго курса. Несмотря на небольшую, казалось бы, разницу в возрасте, Флоренский значительно ранее сформировался как личность. Выходец из нерелигиозной семьи инженера-путейца, он уже успел к тому времени пережить религиозное обращение, которое очень ярко описал впоследствии [1], и определиться с выбором жизненной цели: стать православным богословом. Для этого, по его плану, нужно было получить математическое образование – без такового, по его мнению, нельзя было приступать к серьезному постижению философии, а тем более богословия. Поэтому он и поступил на математическое отделение Московского университета. Это выбор оказался для него чрезвычайно удачным. Здесь он попал в орбиту известного математика и оригинального философа Николая Васильевича Бугаева (1837–1903), идеи которого [2] стали отправной точкой для его собственных изысканий, составивших содержание его кандидатского сочинения «Идея прерывности как элемент миросозерцания» [3], успешно защищенного весной 1904 г. Здесь уже на первом курсе он погрузился в изучение теоретико-множественных работ Г. Кантора, а осенью 1902 г. прослушал курс лекций Б. К. Млодзеевского по теории функций действительного

[1] См.: *Флоренский П.* Детям моим. Воспоминания прошлых лет. Генеалогические исследования. Из соловецких писем. Завещание. М.: Московский рабочий, 1992. С. 211–212.

[2] См.: *Демидов С. С.* Н. В. Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1985. Вып. 29. С. 113–124.

[3] *Флоренский П. А.* Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания». Публикация и примечания С. С. Демидова и А. Н. Паршина // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1986. Вып. 30. С. 159–177.

переменного [4]. Здесь он подготовил статью «О символах бесконечности» [5], ставшую первым развернутым изложением канторовских идей на русском языке. Здесь же в 1902 г. он организовал студенческий математический кружок при Московском математическом обществе, в котором прочитал ряд докладов, в том числе и по новой тогда теоретико-множественной тематике [6]. И хотя его оставляли при университете «для приготовления к профессорскому званию» [7], он, исполняя свой давно намеченный план, уехал продолжать свое образование в Сергиев Посад, в располагавшуюся там Московскую духовную академию.

В университете Флоренский близко сошелся с Лузиным [8] – студентом на курс его младше, творческая личность которого только начинала складываться. Поступая в университет, Лузин, также как и Флоренский, не собирался становиться математиком: он хотел стать инженером и для этого поступить в чрезвычайно престижный в ту пору Санкт-Петербургский технологический институт. Окончание двух курсов математического отделения физико-математического факультета университета давало право на поступление в Технологический без вступительных экзаменов, успешно преодолеть которые всегда неуверенный в себе Лузин не надеялся. Философская и богословская эрудиция Флоренского, притягательность его личности, наконец, дремавший в Лузине глубокий философский интерес определили их взаимоотношения: они сошлись и Лузин оказался под сильным влиянием своего духовно более зрелого товарища.

Флоренский и бесконечное у Г. Кантора

Категория бесконечного была одной из центральных в размышлениях Флоренского. Поэтому совершенно неудивителен его интерес к теоретико-множественным идеям Кантора, работы которого он открыл для себя еще будучи студентом первого курса. Вот как он написал об этом в 1920 г. на обложке переданного ему в 1908 г. через Лузина [9] экземпляра книги И. И. Жегалкина «Трансфинитные числа» (1907):

---

[4] См.: *Медведев Ф. А.* О курсе лекций Б. К. Млодзеевского по теории функций действительного переменного, прочитанных осенью 1902 г. в Московском университете // Там же. С. 130–147.

[5] *Флоренский П. А.* О символах бесконечности (очерк идей Г. Кантора) // Новый путь. 1904. № 9. С. 173–235 (перепечатано в: *Флоренский П. А.* Сочинения в четырех томах. М.: Мысль, 1994. Т. 1. С. 79–129).

[6] См.: *Половинкин С. М.* О студенческом математическом кружке при Московском математическом обществе в 1902–1903 гг. // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1986. Вып. 30. С. 148–158.

[7] Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским. Публикация и примечания С. С. Демидова, А. Н. Паршина, С. М. Половинкина и П. В. Флоренского // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1989. Вып. 31. С. 125.

[8] См.: Там же. С. 125–191.

[9] «Он просил меня передать Вам его книгу, говоря “и прибавьте: истина не тут, в этой книге. Хотя трансфинитные числа и останутся и войдут в анализ, но истина не здесь...”» (Там же. С. 142).

> В университетской среде, по крайней мере московской, первым заговорил о трансфинитных числах и о множествах я. Эти вопросы были тогда до того чужды решительно всем, что работы Кантора не только не признавали, но и просто не знали. Когда я начал заниматься этими вопросами, то мои занятия казались чудачеством и бесполезною игрою в полубогословские абстракции. Первая лекция, прочитанная в Московском университете, принадлежала мне. В Религиозно-философском студенческом обществе и в Студенческом математическом кружке я прочитал доклады о трансфинитах и о множествах; в Математическом кружке [...] при этом присутствовало несколько профессоров. Это было в (пропуск. – *С. Д.*) -м году, я был тогда студентом (пропуск. – *С. Д.*) -го курса. Затем мною напечатана популярная статья на ту же тему под заглавием «О символах бесконечности», она нашла себе приют в «Новом пути». На моих глазах, далее, трансфинитами стали заниматься, и, наконец, появилась целая диссертация об них И. И. Жегалкина. Поэтому, считая себя произведшим в русской науке толчок к изучению трансфинитов, я полагаю, что заслуживал бы хотя бы мимолетного упоминания в специальной диссертации, посвященной этим вопросам, и в библиографических указателях... [10]

Эти слова, продиктованные чувством обиды на Жегалкина, не посчитавшего нужным даже упомянуть в своей книге его имя, не совсем справедливы. Он не был в московской университетской среде тем, кто «первым заговорил о трансфинитных числах и о множествах». Еще осенью 1900 г., когда он только начинал учиться в университете, Млодзеевский впервые прочитал курс теории функций действительного переменного, который повторил осенью 1902 г., – именно тогда его прослушал Флоренский и оставил нам его конспект [11]. Мы не знаем содержания этого первого курса, но, судя по второму, который вряд ли кардинально отличался от первого, в нем содержалось изложение теории множеств («групп» в терминологии Млодзеевского), включавшее изложение теории счетных («счетовых») множеств, доказательство несчетности континуума (с упоминанием континуум-гипотезы), вводились понятия вполне упорядоченного множества («благоустроенной группы»), трансфинитных чисел и алефов [12]. Тем не менее роль Флоренского в пропаганде идей Кантора в тогдашней московской университетской среде была действительно значительна. Достаточно принять во внимание степень его влияния на формирование интересов его молодого друга – студента Лузина.

Однако, даже будучи студентом-математиком Московского университета, Флоренский формировался преимущественно как богослов и к Кантору и к его теории множеств походил исключительно с позиций философствующего богослова. Особую ценность в идеях Кантора представлял для него именно их мировоззренческий аспект [13]. Именно Кантор «дал возможность критически

---

[10] Там же. С. 143.

[11] *Медведев.* О курсе лекций Б. К. Млодзеевского... С. 130–147.

[12] Там же. С. 139.

[13] О воззрениях Кантора см., например: *Dauben, J.* Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinity. Princeton: Princeton University Press, 1990; *Dauben, J.* Georg Cantor and the Battle for Transfinite Set Theory // *http://heavysideindustries.com/wp-content/uploads/2011/08/Dauben-Cantor.*

отнестись к мировоззрению XIX в., а не догматически принимать его или отвергать, что волей-неволей приходилось делать до появления его работ» [14].

Главным для Флоренского стали именно философская и богословская составляющие канторовской идеологии. В его изложении канторовской теории множеств («групп» у Флоренского – здесь он использует терминологию Млодзеевского) математический аспект играл подчиненную роль. Он начинал свое изложение с различения потенциальной и актуальной бесконечности. Это

> никогда не заканчиваемое потенциальное бесконечное есть переменное конечное количество, quantum, возрастающий над всеми границами или, наоборот, падающий ниже всякой конечной границы [15].

Бесконечность же актуальная является количеством постоянным, бесконечность *in actu*. Она «не стоит в ряду других постоянных, потому что она больше (или, наоборот, меньше. – *С. Д.*) *всякой* (курсив в оригинале. – *С. Д.*) конечной константы» [16]. Как подчеркивал Флоренский, сама возможность потенциальной бесконечности зиждется на существовании бесконечности актуальной.

> Чтобы была возможна потенциальная бесконечность, должно быть возможно беспредельное изменение. Но ведь для последнего необходима область изменения, которая сама уже не может меняться, т. к. в противном случае пришлось бы потребовать область изменения для области и т. д. Она, однако, не является конечной, и, следовательно, она сама уже является актуально бесконечной. Следовательно, *всякая потенциальная бесконечность уже предполагает существование актуальной бесконечности, как своего сверх-конечного предела* (курсив в оригинале. – *С. Д.*)... [17]

Следуя Кантору, Флоренский различал актуально бесконечное, неспособное к увеличению – абсолютный максимум, *Absolutum*, реализуемый в Боге, и абсолютно бесконечное, проявленное *in concreto*, в зависимом мире, в твари (*Transfinitum*).

> Оно может проявляться in absracto, в духе, поскольку он имеет возможность познавать Transfinitum в природе и, до известной степени, Absolutum в Боге. В этом последнем случае бесконечность получает название *символов бесконечного*. В частности, если дело идет именно о познании Transfinitum, эти символы получают название *трансфинитных чисел* или *трансфинитных типов* (курсив в оригинале. – *С. Д.*) [18].

Канторовская идея трансфинитных порядковых чисел для Флоренского это прежде всего ключ к решению проблемы небесной иерархии, представление о которой в христианской (в том числе православной) богословской

---

[14] *Флоренский*. Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания»... С. 162.

[15] *Флоренский*. О символах бесконечности (очерк идей Г. Кантора) // *Флоренский*. Сочинения в четырех томах... Т. 1. С. 81.

[16] Там же. С. 82.

[17] Там же. С. 84.

[18] Там же. С. 86.

традиции восходит к сочинению «О небесной иерархии», написанному на рубеже IV–V вв. и традиционно приписывавшемуся Дионисию Ареопагиту. Вот что писал по этому поводу Флоренский в статье «О символах бесконечности»:

> …мы можем сказать, что могущество Божие актуально-бесконечно, потому что оно, будучи определенным (в Боге нет изменения), в то же время больше всякого конечного могущества […] «И то, по моему мнению, – говорит он (т. е. Дионисий Ареопагит. – *С. Д.*), – достойно тщательного размышления, что говорит писание об ангелах, то есть, что их тысячи тысяч и тьмы тем, умножая на самих себя числа, у нас самые высшие. Через сие оно ясно показывает, что типы небесных существ *для нас неисчислимы* (здесь и далее курсив в оригинале. – *С. Д.*); потому что бесчисленно блаженное воинство премирных умов. Оно *превосходит малый* и *недостаточный счет употребляемых нами чисел* и точно определяется одним премирным их разумением» [19].
>
> В здесь рассмотренном понятии актуальной бесконечности не трудно узнать то, что у древних было известно под именем ἀφωρισμένον, у схоластиков – под именем categorematice infinitum, у новых философов – *положительной*, *собственной* бесконечности. Как выражается Гёте [20], «это – *замкнутая бесконечность*, более соответствующая человеку, чем звездное небо», причем последнее, конечно, возможность устремляться все далее и далее, никогда не будучи в состоянии произвести синтез и успокоиться на целом [21].

Согласно христианским воззрениям, небесная иерархия насчитывает девять ангельских чинов, разбитых на три триады. Первую, отмеченную наибольшей близостью к Богу, составляют серафимы, херувимы и престолы. Вторую, занимающую положение срединное по отношению к Богу и человеку, образуют силы, господства и власти. Наконец, третья, содержащая начала, архангелов и собственно ангелов, оказывалась ближайшей к человеку. Посредством этой ангельской иерархии и осуществляется связь Творца с человеком: высшие чины получают озарение Божественным светом и приобщаются к господним тайнам непосредственно от Него Самого, а низшие через посредство высших вплоть до человека. Небесная иерархия переходит в земную церковную.

Откровение, полученное по преданию Пифагором и принятое платониками – «Все есть число», – казалось, теряло свою силу в мире сил небесных. Если число (натуральное число – говорим мы) подтверждало свое основополагающее значение в тварном мире, то ничего подобного не угадывалось для мира горнего – для небес. Никаких «бесконечных чисел», т. е. *«превосходящих малый* и *недостаточный счет употребляемых… чисел* и точно определяющихся одним премирным… разумением», соответствующих натуральным в тварном мире, в мире для сил небесных сконструировать до Кантора не удавалось (хотя

---

[19] См.: Дионисий Ареопагит. О небесной иерархии. Гл. XIV (с. 52 русск. пер. 1909 г. (см. также. Дионисий Ареопагит. О небесной иерархии / Пер. М. Г. Ермакова, ред. А. И. Зайцев. СПб: Изд-во РХГИ. 1997).

[20] В «Путешествии в Италию».

[21] *Флоренский.* О символах бесконечности (очерк идей Г. Кантора) // *Флоренский.* Сочинения в четырех томах… Т. 1. С. 83–84.

попытки такие делались). Открытые им трансфинитные числа эту задачу решали. Именно это решение старой богословской проблемы стало для Флоренского решающим для приятия им канторовской теории множеств. Выявление конструкций иерархического строения мира, и чувственного, и умопостигаемого, а также связей этих миров, механизмов прохождения Божественного света через уровни небесной иерархии к человеку – эти и связанные с ними темы стали предметами постоянных размышлений Флоренского (в частности, в построениях в области теории познания) на протяжении всей его творческой жизни. Создается впечатление, что именно здесь пролегают сегодня основные пути развития философских идей отца Павла [22].

Лузин. Начало творческого пути

Когда в 1903 г. Флоренский оставлял университет, он передал Лузину свои полномочия секретаря Студенческого математического кружка при Московском математическом обществе. К этому времени Лузин уже вполне определился с выбором своего будущего пути: он будет математиком! Постепенно определился и выбор наставника – им стал молодой профессор Дмитрий Федорович Егоров (1869–1931), замечательный математик и превосходный педагог, под руководством которого Лузин вырос в одного из крупнейших российских математиков XX века. Заботливый руководитель, он постарался оградить талантливого ученика от опасностей, подстерегавших еще не вполне сформировавшуюся молодую душу в наступавшую в России эпоху политических смут и революций. Когда в 1905 г. в Москве развернулись известные революционные события, Егоров, узнав, что революционно настроенные товарищи (В. А. Костицын и др.) затягивали его в самую гущу этих событий [23], употребил все свои возможности, чтобы отправить молодого человека в Париж [24]. Там он слушал лекции А. Пуанкаре о разложениях в ряды пертурбационных функций небесной механики, Э. Бореля по теории целых функций, Ж. Адамара по теории распространения волн, Г. Дарбу по теории

[22] См. работы А. Н. Паршина о «лестнице отражений» (*Паршин А. Н.* Средневековая космология и проблема времени // Вопросы философии. № 12. 2004. С. 70–88), о проблеме времени и о «структуре» православного богослужения, совершаемого по образцу духовного служения «небесной Церкви» («Силы небесные с нами неведомо служат», верующие при богослужении «тайно изображают херувимов») (*Паршин А. Н.* Лестница отражений (от гносеологии к антропологии) // Историко-философский ежегодник – 2005. М.: Наука, 2005. С. 270 и др.).

[23] Как рассказывал в марте 1980 г. Д. Е. Меньшов, они даже устроили в комнате, где жил Лузин, склад бомб и революционных прокламаций. Этот рассказ чрезвычайно осторожный Меньшов попросил удалить из печатного текста беседы (*Меньшов Д. Е.* Воспоминания о молодых годах и о возникновении Московской школы теории функций // Историко-математические исследования. 1983. Вып. 27. С. 312–333), что и было исполнено, но на магнитофонной пленке он сохранился. Автор этих строк вместе с А. П. Юшкевичем участвовал в этой беседе, протекавшей в санатории «Узкое» АН СССР.

[24] См. письма Егорова Лузину, написанные в феврале – марте 1906 г. (Письма Д. Ф. Егорова к Н. Н. Лузину. Предисловие П. С. Александрова. Публикация и примечания Ф. А. Медведева при участии А. П. Юшкевича // Историко-математические исследования. 1980. Вып. 25. С. 337–339.

поверхностей, работал в библиотеках. Уже тогда Флоренский заинтересовался теорией множеств. В письме Флоренскому от 1 (14) мая 1906 г. он пишет: «В настоящий момент мня интересуют в науке исключительно **принципы, символическая логика и теория множеств** (выделение полужирным в оригинале. – *С. Д.*)» [25]. В этом же письме, которое писалось в несколько присестов, он добавил:

> Poincaré занят своей небесной механикой, к теории множеств (боюсь утверждать, но вероятно) относится подозрительно. Borel занимается ею, но с какой-то особенной точки зрения: все воплощает в геометрические группы (т.е. множества. – *С. Д.*). **Continuum** считает не способным быть **bien ordonné** (выделение полужирным в оригинале. – *С. Д.*) [26].

Так, Лузин уже в мае 1906 г. касается тем, поднятых в полемике по аксиоме выбора. В том же году он вернулся в Москву, завершил свое кандидатское сочинение «О одном методе интегрирования дифференциальных уравнений» и в конце года после сдачи государственных экзаменов и получения диплома 1-й степени был оставлен Егоровым при факультете «для приготовления к профессорскому званию». В 1909 г. он сдал магистерские экзамены и, став в 1910 г. приват-доцентом Московского университета, собирался начать преподавание. Он хотел читать теорию функций действительного переменного (что говорит о том, что у него уже начало формироваться намерение работать в этом направлении – в письме Флоренскому от 24 декабря 1909 г. он напишет: «Интерес и вера в символическую логику пропали. Влечет теория функций и теория электронов» [27]), однако такой курс уже был объявлен С. С. Бюшгенсом, и Лузин, по совету Млодзеевского, вознамерился прочитать курс по интегральным уравнениям. Но намерение это осуществлено так и не было: стараниями его шефа осенью 1910 г. он был отправлен в научную командировку в Гёттинген и Париж. Перед отъездом он пишет Флоренскому письмо, в котором сообщает о начале занятий тригонометрическими рядами и жалуется: «Обнаружил прискорбный факт, что, занимаясь Mengenlehre, я отстал в других областях» [28]. В командировке он активно занимался исследованиями в области теории функций действительного переменного, по совету Э. Ландау отправил в Палермо, в журнал *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, свою работу «Об одном степенном ряде», вышедшую в 1911 г. и ставшую его первой публикацией, работал в семинаре Ж. Адамара, познакомился с Э. Пикаром, Э. Борелем, А. Лебегом, А. Данжуа. Командировка продолжалась до лета 1914 г. (мимоходом заметим, что в августе Россия вступила в Первую мировую войну) и была в высшей степени плодотворной. В *Comptes rendus* Академии наук Франции появились его знаменитые работы о C-свойстве и по теории степенных и тригонометрических рядов. И хотя немалое время он потерял, безуспешно пытаясь доказать континуум-гипотезу, тем не менее в Москву он вернулся с уже сложившейся в основных

---

[25] Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским... С. 136.
[26] Там же. С. 138.
[27] Там же. С. 159.
[28] Там же. С. 161.

чертах диссертацией «Интеграл и тригонометрический ряд», которую вскоре завершил, в 1915 г. опубликовал и в апреле 1916 г. защитил, причем совет принял решение в виде особого исключения присудить диссертанту, минуя степень магистра, степень доктора чистой математики. Это было триумфом молодого математика. Другим его триумфом стало рождение в эти годы его школы – одной из наиболее славных математических школ XX в., легендарной Лузитании. По возвращении в 1914 г. в Москву он начал чтение факультативного курса теории функций действительного переменного.

> Именно этот читаемый из года в год специальный курс и сопровождающий его семинар [...] явились центром, из которого выросла Московская школа теории функций, – замечательный памятник научной деятельности Н. Н. Лузина [29], –

читаем мы в его биографии, написанной Н. К. Бари и В. В. Голубевым. На этом семинаре в 1914–1917 гг. выросло первое поколение лузинских учеников – Д. Е. Меньшов, М. Я. Суслин, А. Я. Хинчин, П. С. Александров. Первые, еще студенческие, результаты Хинчина, которые были сообщены автором осенью 1914 г. на заседании Студенческого математического кружка, Лузин включил в свою диссертацию. А в 1916 г. в *Comptes rendus* появилась заметка Хинчина об обобщении интеграла Данжуа. В том же году и в том же журнале была опубликована статья Меньшова, содержавшая пример тригонометрического ряда с отличными от нуля коэффициентами, почти всюду сходящегося к нулю. В том же году и опять в *Comptes rendus* появилась работа Александрова, в которой им, тогда еще студентом университета, было доказано, что всякое несчетное борелевское множество имеет мощность континуума. А так как в то время полагали, что борелевскими множествами исчерпываются все реально употребляемые в математике множества (см. ниже), то этот результат мог рассматриваться как в известном смысле решение континуум-гипотезы. Наконец, в том же 1916 г. студент третьего курса Суслин, используя операцию, введенную Александровым, построил пример множества, являвшегося проекцией борелевского множества, но не оказывавшегося борелевским [30]. Этот пример, опубликованный в 1917 г. в тех же парижских *Comptes rendus*, стал истинной сенсацией. Оказалось, что реально используемые в математике множества не замыкаются в классе борелевских множеств. (Заметим мимоходом, что как раз в том году в России разразилась революция.) Новые множества, получившие название суслинских, или А-множеств, или аналитических множеств [31], стали объектом исследований школы Лузина, которая заняла лидирующие позиции в дескриптивной теории множеств. Из этой школы в будущем выросла если и не вся советская математическая школа, то одна из определяющих ее дальнейшее развитие составляющих (другим ее важнейшим истоком стала великая петербургская

---

[29] *Бари Н. К., Голубев В. В.* Биография Н. Н. Лузина // *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Т. 3.С. 475.

[30] *Тихомиров В. М.* Открытие А-множеств // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1993. Вып. 34. С. 126–139.

[31] *Богачев В. И.* Лузинские мотивы в современных исследованиях // Современные проблемы математики и механики. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. 2013. Т. 8. Вып. 2. С. 4–24.

чебышевская традиция, да и не стоит списывать со счета другие, может быть, не столь могучие, но, безусловно, важные потоки, шедшие из провинции — с Украины, т. е. из Харькова, Киева и Одессы, из Варшавы / Ростова-на-Дону и других мест). И, конечно, эта напряженная работа над проблемами теории множеств и функций, которую вел Лузин на протяжении многих лет, начиная со времен Первой русской революции, безусловно, заставила его глубоко войти в проблемы теории множеств, в загадочную бесконечность. Когда он начал погружаться в эти материи, он был еще молодым начинающим исследователем, для которого его великие французские учителя были непререкаемыми авторитетами. А время это было отмечено для них знаменитой дискуссией об аксиоме Цермело, в которую были в той или иной мере вовлечены все ведущие французские математики того времени. В спорах вокруг аксиомы Цермело рос и мужал талант Николая Николаевича.

Аксиома выбора и Н. Н. Лузин

В 1904 г. на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге венгерский математик Ю. Кёниг выступил с докладом «К проблеме континуума» [32], в котором среди прочего содержалось утверждение о невозможности представления континуума в виде вполне упорядоченного множества. В том же году была опубликована знаменитая работа Цермело о том, что каждое множество можно сделать вполне упорядоченным [33]. В основе этого доказательство содержалось утверждение, ставшее известным как аксиома выбора, или аксиома Цермело, которую он сформулировал так: «Для бесконечной совокупности множеств всегда существует отображение (*Zuordnung*), в котором каждому множеству соответствует один из его элементов» [34]. Появление этих двух противоречащих друг другу утверждений вызвало в математическом сообществе недоумение. Одним из его проявлений стала заметка Адамара [35], выражающая сомнение, суть которого сводилась к неочевидности того, что операцию выбора элемента из каждого множества бесконечного семейства возможно подчинить какому либо закону. Эта заметка положила начало дискуссии, развернувшейся в 1905 г. на страницах 33-го тома «Бюллетеня Французского математического общества», в которой приняли участие Ж. Адамар. Э. Борель, Р. Бэр и А. Лебег [36].

Борель полагал важным точно отделить математические сущности, которые математик может рассматривать как существующие, от тех, которые

[32] *König, J.* Zum Kontinuum-Problem // Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Leipzig: B. G. Teubner, 1905. S. 144–147.

[33] *Zermelo, E.* Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann // Mathematische Annalen. 1904. Bd. 59. S. 514–516.

[34] Ibid. S. 516. Привожу в переводе Ф. А. Медведева (*Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. М.: Наука. 1976. С. 106).

[35] *Hadamard, J.* La théorie des ensembles // Revue générale des sciences pures et appliquées. 1905. T. 16. P. 241–242.

[36] Об этой дискуссии см., например: *Медведев*. Французская школа теории функций и множеств...; *Медведев Ф. А.* Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982.

лишь кажутся реальными, но которым ничего «реально» не соответствует. Такое разграничение и стало содержанием этой дискуссии. На таком разграничении Борель настаивал и в дальнейшем [37]. В отношении аксиомы выбора Борель сомневался даже в ее применимости к случаю, когда множества, из которых производится выбор, являются подмножествами континуума.

Адамар же не видел ничего сомнительного в теоретико-множественной идее бесконечности и полагал законным употребление аксиомы выбора. Сторонников такой позиции Борель назвал «идеалистами». Сам Борель (вместе с Бэром и Лебегом) полагал, что теоретико-множественные понятия и принципы нуждаются в пересмотре: неограниченное употребление в математике понятия бесконечного и аксиомы выбора может приводить к выводам, лишенным гносеологического смысла. Сторонников такого подхода Борель назвал «реалистами» (этот термин зачастую заменяли терминами «эмпирист» или «натуралист»). «Реалисты» полагали, что построение, использующее аксиому выбора, не дает индивидуального объекта, но лишь класс объектов, удовлетворяющих некоторым требованиям.

Молодой Лузин, разумеется, внимательно следил за дискуссией об аксиоме выбора с самого ее начала и занял позицию не «идеалистов», но «реалистов». Об этом свидетельствует его диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд» [38], опубликованная в 1915 г. (например, примечание к ее 36-му параграфу). За несколько дней до защиты Лузин писал Флоренскому:

> Кусать меня собираются основательно, но я не сдамся, и сам буду откусываться. Предвижу, что будет открыт огонь за «принцип произвольного выбора».
>
> Должен сказать, что моя позиция очень трудна: ведь я нападаю на Cantor'a. А защищает его весь факультет – так что, думается, будут общие дебаты по основам теории множеств и будет пролито немало пота [39].

Ожидаемая Лузиным атака, судя по всему, не состоялась. Защита, как мы уже говорили, прошла блестяще. На позициях эффективизма он оставался и впоследствии. К этому его склонял не столько авторитет его французских учителей, сколько его собственные размышления о проблемах теории множеств и функций. Впоследствии в своем знаменитом труде «Лекции об аналитических множествах и их приложениях» он писал:

> ...мы видим, что необходимо ограничить нашу способность идеализации, и, по-видимому, эти границы не могут быть поставлены интуицией. Обычно думают, что есть много вещей, логически возможных, но ускользающих от нашей интуиции. Но, по-видимому, обратное тоже верно: есть случаи, когда наша интуиция дает (или думает, что дает) совершенно ясную картину понятия, логически противоречивого в себе. Таков, по-моему, случай совокупности *всех* (здесь и далее курсив в оригинале. – *С. Д.*) трансфинитных чисел.

---

[37] См., например: *Borel, É.* Leçons sur la théorie des fonctions. 2e éd. Paris: Gauthier-Villars, 1914. Note VI; *Borel, É.* Methodes et problèmes de la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars. 1922. P. 146.

[38] *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд (1915) // *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 1. С. 106.

[39] Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским... С. 183.

В самом деле, если мы имеем (или думаем, что имеем) совершенно ясное представление о совокупности всех трансфинитных чисел второго класса

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \alpha, \ldots,$$

мы *видим* с той же ясностью совокупность *всех* трансфинитных чисел, и однако рассуждение Бурали-Форти нас учит, что эта совокупность логически противоречива *в себе* [...] Я рассматриваю интуитивное представление совокупности трансфинитных чисел как *дефектное*, и я думаю, что есть некоторая доля иллюзии в ясности, которую вносит в наше интуитивное представление об этой совокупности обычай обозначения «малых» трансфинитных чисел.

Таким образом, мы приходим к неточным интуитивным представлениям, и этот факт, как и другие аналогичные, должен сделать нас очень осторожными при введении трансфинитных чисел второго класса логическим путем [40].

Как мы знаем, Флоренский не принял позиции Лузина по вопросу бесконечности. Из точек зрения, высказанных в полемике 1905 года, наиболее близкой для него оказалась позиция Адамара, т.е. «идеалистическая». Разумеется, всякого рода ограничения на бесконечность, вводимые «реалистами», были для него абсолютно неприемлемы. Бесконечное было для него как для богослова одним из атрибутов Бога. Могущие возникать противоречия его не пугали. Вот характерный отрывок из подытоживающего его взгляды автореферата, написанного в 1925–1926 гг.:

Непреложная истина – это та, в которой предельно сильное утверждение соединено с предельно же сильным его отрицанием, т. е. – предельное противоречие: оно непреложно, ибо уже включило в себя крайнее его отрицание. И поэтому все то, что можно было бы возразить против непреложной истины, будет слабее этого, в ней содержащегося отрицания. Предмет, соответствующий этой последней антиномии, и есть, очевидно, истинная реальность и реальная истина. Этот предмет, источник бытия и смысла, воспринимается опытом [41].

«Истина есть антиномия» — фундаментальное положение философии отца Павла. Разумеется, подобное отношение к противоречию для математика Лузина было неприемлемо. Так что позиции, которые заняли Лузин и Флоренский в своих размышлениях, оказались совершенно различными. К сожалению, сами споры Лузина и Флоренского на эту тему до нас не дошли: их отголоски доносит до нас переписка. Так, в письме Лузина Флоренскому от 4 августа 1915 г. читаем:

«Вы (богослов – добавим мы) ищете бестрепетного сердца непреложной Истины, оснований всему, смело шагаете через все, сметая теории, как карточные домики, а я... я не жду последних «как» и «почему», и, боясь бесконечного, я сторонюсь его, я не верю в него.

[40] *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях (1930) // *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 2. С. 30–31.

[41] Флоренский П. А. [Автореферат] // Флоренский П. А. Сочинения в четырех томах. М.: Мысль, 1994. Т. 1. С. 40.

> **Нет актуальной бесконечности!** а когда мы усиливаемся говорить о ней, мы **фактически** (выделение полужирным в оригинале. – *С. Д.*) всегда говорим о конечном и о том, что за n есть $n + 1$ … вот и все! [42]

Актуальная бесконечность для Лузина если и существует, то вне математики. До каких пределов может заходить математик в своих построениях, ведомых ощущением идеи актуальной бесконечности, — предмет постоянных его размышлений. С первым, насколько нам известно, развернутым изложением своей позиции по этому вопросу Лузин выступил в 1927 г. на Первом всероссийском съезде математиков. В дополненном виде доклад «Современное состояние теории функций действительного переменного» был издан в 1933 г. [43] Размышления над проблемами бесконечного и исследования в теории аналитических и проективных множеств привели его к признанию абсолютной правомерности позиции Бореля, его эффективизма. Наиболее полное (из доступных нам сегодня) выражение его взглядов содержат его «Лекции об аналитических множествах и их приложениях», опубликованные в Париже в 1930 г. в издававшейся Борелем серии монографий по теории функций [44].

Заключение

В этих лекциях звучит та же мысль, что и в его письме Флоренскому 1915 года: «То, что мы называем *актуальной бесконечностью, есть не что иное, как конечное, но фиксированное и очень большое* (курсив в оригинале. — *С. Д.*)» [45]. Изыскания по теории аналитических множеств Лузина и его школы, с одной стороны, показали естественность для математики выхода из области борелевских в область аналитических и далее проективных множеств. Такое расширение выглядело столь же естественным, как и выход за пределы множества рациональных чисел в числовой континуум, де-факто совершенный пифагорейцами. С другой стороны, эти же изыскания показали, что вводимые на этом пути в математику сущности (например, те или иные проективные множества) зачастую не выстраиваются эффективно, но выглядят по существу созданиями виртуальными. Отсутствие эффективных процедур, позволяющих их индивидуальное определение, с точки зрения борелевского эффективизма не давало им в математике прав гражданства. Они оказывались за ее пределами. Оборачивая ход наших рассуждений и оставаясь в той же логике, возможным оказывается и сомнение в правомерности наших представлений о числовом континууме. Все ли действительные числа, его составляющие, реальны, т. е. эффективно выстраиваемы? Ведь множество эффективно конструируемых действительных чисел счетно! В этой логике все прочие образования — паразитические, подлежащие из математики

---

[42] Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским… С. 178.

[43] *Лузин Н. Н.* Мемуар об аналитических и проективных множествах (1926) // *Лузин.* Собрание сочинений… Т. 2. С. 317–379.

[44] *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях (1930) // Там же. С. 9–269.

[45] Там же. С. 268.

удалению, что, как полагал Борель, лишь упростит методы математического анализа. Вот как написал об этом в «Заключении» к своим «Лекциям» сам Лузин:

> Но если допускать *все* (здесь и далее курсив в оригинале. – *С. Д.*) множества, измеримые B (т. е. измеримые по Борелю. – *С. Д.*), то необходимо допустить проективные множества… Следовательно, если желать ограничивать математический анализ лишь изучением вполне законченных объектов и вполне определенных взаимоотношений, то нужно, с точки зрения эмпиристов, пожертвовать некоторыми множествами, измеримыми B, и даже некоторыми иррациональными числами. В конечном итоге, и вопреки возражениям, вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счетное множество, хотя их перенумерование и не может быть осуществлено при помощи *математического* закона. Таким образом, арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. Эти точки, каждая из которых имеет бесконечное определение, являются *паразитическими* во всяком рассуждении, которое можно сделать эффективно, и таком, что оно устанавливает вполне определенную связь между уже определенными объектами.

Таким образом, математика вновь возвращается к проблеме конструкции числового континуума, с которой столкнулись еще пифагорейцы, и

> пришло время произвести реформу в наших идеях об арифметическом континууме [46].

Сам Лузин и ряд его учеников (среди них такой выдающийся математик, как П. С. Новиков) продолжили исследование этих проблем. Как писал В. А. Успенский в статье, приуроченной к 100-летию со дня его рождения, дескриптивная теория множеств

> занимает выдающееся место в деятельности Лузина и в его наследии […] Выдающимся является и место Н. Н. Лузина в этой теории: преимущественно его усилиями она сделалась самостоятельной математической областью [47].

Его ученик А. А. Ляпунов так писал об этом:

> Роль Н. Н. Лузина в развитии этой теории совершенно исключительна. Он обнаружил новые явления, характерные для этой области, и поставил ее основные проблемы, он также разработал ее методы и первый дал законченное и очень увлекательное ее изложение, наконец, он привлек к этой области интерес большого числа своих учеников, которые воспитались на идеях дескриптивной теории множеств и в дальнейшем плодотворно использовали их в других областях математики. Особенно следует подчеркнуть то, что Н. Н. Лузин предугадал, что точка зрения канторовской теории множеств оказывается недостаточной для развития дескриптивной теории множеств, в частности, господствовавшее убеждение о внутренней полноте теории множеств несостоятельно [48].

---

[46] Там же. С. 268–269.

[47] *Успенский В. А.* Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теории множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3. С. 85.

[48] *Ляпунов А. А.* Введение // Успехи математических наук. 1950. Т. 5. Вып. 5. С. 12.

Эта теория, отмеченная также замечательными результатами его учеников М. Я. Суслина, П. С. Александрова, М. А. Лаврентьева, А. Н. Колмогорова, Л. В. Келдыш, А. А. Ляпунова, а также Ф. Хаусдорфа, В. Серпинского, К. Куратовского, Л. В. Канторовича и др., составила целый раздел математики XX столетия [49]. О результатах в этом направлении и положении дел в этой теории, сложившемся к 1980-м гг., можно прочесть в только что упомянутой статье [50], а также в статье В. Г. Кановея [51]. Представление о современном положении дел можно почерпнуть из ряда книг [52].

P. S.: Если канторовский несчетный арифметический континуум в глазах последователей Бореля и Лузина оказывался математически неоправданным, он все же оказался необходимым самому Кантору и следовавшим ему математикам как та область изменения, в которой действовала математическая мысль. Эта область, возможно, и выходила за границы математики, но оказывалась как минимум пространством, необходимым для движения этой мысли. На эту необходимость выхода за рамки, задаваемые аксиоматикой теории, т. е. за рамки самой теории, указывает нам своей теоремой о неполноте и К. Гедель. Присутствует она как пространство виртуальное и в построениях самого Бореля и Лузина, и, разумеется, даже у самых последовательных конструктивистов. Тем более необходимым и, более того, совершенно естественным предстает несчетный канторовский арифметический континуум и возносившаяся над ним построенная Кантором лествица бесконечного в мысли богословской, в частности, у отца Павла Флоренского. Естественным и абсолютно легитимным.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. Н. Паршину, ознакомившемуся с рукописью и сделавшему ряд ценных замечаний, учтенных при окончательной редакции статьи.

---

[49] Однако нельзя сказать, что эта теория занимает сегодня то место, которое ей прочил Лузин. Проблемы этой теории, рассматривавшиеся им как центральные для современной математики, вовсе не казались таковыми исследователям второй половины XX в. Так, А. Н. Колмогоров, которого его учитель уговаривал заняться ими, призывая оставить не столь важные по его тогдашним представлениям направления математики, вроде теории вероятностей. «Это же не по уровню твоего таланта», – убеждал он своего гениального ученика. Тот же в присущей ему манере, не говоря прямо «нет», продолжал движение по пути, указываемом ему его собственной мощной интуицией. Оставил исследования в области дескриптивной теории множеств и Л. В. Канторович.

[50] *Успенский.* Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теории множеств и функций... С. 85–116.

[51] *Кановей В. Г.* Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3. С. 119–155.

[52] *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики. М.: Наука. 2007; *Kanovei, V.* Borel Equivalence Relations: Structure and Classification. New York: American Mathematical Society, 2008 (University Lecture Series of AMS. Vol. 44); *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: борелевские и проективные множества. М.: МЦНМЕ, 2010; *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы. М.: МЦНМО, 2013; *Moschovakis, Y.* Descriptive Set Theory. Amsterdam: North Holland, 1980; *Gao, S.* Invariant Descriptive Set Theory. Boca Raton, FL: CRC Press, 2009. См. также: *Богачев В. И.* Лузинские мотивы в современных исследованиях // Современные проблемы математики и механики. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2013. Т. 8. Вып. 2. С. 4–24.

References

Bari, N. K. and Golubev, V. V. (1959) Biografiia N. N. Luzina [Biography of N. N. Luzin], in: Luzin, N. N. *Sobranie sochinenii [A Collection of Works]*. Moskva: Izdatel'stvo AN SSSR, vol. 3, pp. 468–483.

Bogachev, V. I. (2013) Luzinskie motivy v sovremennykh issledovaniiakh [Luzin's Themes in Modern Studies], *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki*, vol. 8, no. 2, pp. 4–24.

Borel, É. (1914) *Leçons sur la théorie des fonctions*. 2e éd. Paris: Gauthier-Villars.

Borel, É. (1922) *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars.

Dauben, J. (1990) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinity*. Princeton: Princeton University Press.

Demidov, S. S. (1985) N. V. Bugaev i vozniknovenie Moskovskoi shkoly teorii funktsii deistvitel'nogo peremennogo [N. V. Bugaev and the Emergence of the Moscow School of Real-Variable Function Theory], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 29, pp. 113–124.

Dionisii Areopagit (1997) *O nebesnoi ierarkhii. Per. M. G. Ermakova, red. A. I. Zaitsev [On the Celestial Hierarchy]*. Sankt-Peterburg: RKhGI.

Florenskii, P. A. (1986) Vvedenie k dissertatsii "Ideia preryvnosti kak element mirosozertsaniia". Publikatsiia i primechaniia S. S. Demidova i A. N. Parshina [Introduction to the Thesis "The Idea of Discontinuity as a Worldview Element"], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 30, pp.159–177.

Florenskii, P. A. (1992) *Detiam moim. Vospominaniia proshlykh let. Genealogicheskie issledovaniia. Iz solovetskikh pisem. Zaveshchanie [To My Children. Memories of Years Past. Genealogical Studies. From the Solovki Letters. The Will]*. Moskva: Moskovskii rabochii.

Florenskii, P. A. (1994) Avtoreferat [Author's Summary], in: Florenskii, P. A. (1994) *Sochineniia v 4-kh tomakh [Works in 4 vols.]*. Moskva: Mysl', vol. 1, pp. 37–43.

Florenskii, P. A. (1994) O simvolakh beskonechnosti (ocherk idei G. Kantora) [On the Symbols of Infinity], in: Florenskii, P. A. *Sochineniia v 4-kh tomakh [Works in 4 vols.]*. Moskva: Mysl', vol. 1, pp. 79–129.

Gao, S. (2009) *Invariant Descriptive Set Theory*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Hadamard, J. (1905) La théorie des ensembles, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, pp. 241–242.

Kanovei, V. (1985) Razvitie deskriptivnoi teorii mnozhestv pod vliianiem trudov N. N. Luzina [The Development of Descriptive Set Theory, Influenced by N. N. Luzin's Works], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 40, no. 3, pp. 119–155.

Kanovei, V. (2008) *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification,* New York: American Mathematical Society (University Lecture Series of AMS, vol. 44).

Kanovei, V. G. and Liubetskii, V. A. (2007) *Sovremennaia teoriia mnozhestv: nachala deskriptivnoi dinamiki [Modern Set Theory: The Foundations of Descriptive Dynamics]*, Moskva: Nauka.

Kanovei, V. G. and Liubetskii, V. A. (2010) *Sovremennaia teoriia mnozhestv: borelevskie i proektivnye mnozhestva [Modern Set Theory: Borel Sets and Projective Sets]*. Moskva: MTsNMO.

Kanovei, V. G. and Liubetskii, V. A. (2013) *Sovremennaia teoriia mnozhestv: absoliutno nerazreshimye klassicheskie problemy* [Modern Set Theory: Absolutely Insoluble Classical Problems]. Moskva: MTsNMO.

König, J. (1905) Zum Kontinuum-Problem, in: *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig: B. G. Teubner, pp. 144–147.

Liapunov, A. A. (1950) Vvedenie [Introduction], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 5, no. 5, pp. 11–13.

Luzin, N. N. (1953) Integral i trigonometricheskii riad [Integral and Trigonometric Series], in: Luzin, N. N. *Sobranie sochinenii [Collected Works]*. Moskva: Izdatel'stvo AN SSSR, vol. 1, pp. 48–212.

Luzin, N. N. (1958) Lektsii ob analiticheskikh mnozhestvakh i ikh prilozheniiakh (1930) [Lectures on Analytic Sets and Their Applications (1930)], in: Luzin N. N. *Sobranie sochinenii* [Collected Works]. Moskva: Izdatel'stvo AN SSSR, vol. 2, pp. 9–269.

Luzin, N. N. (1958) Memuar ob analiticheskikh i proektivnykh mnozhestvakh [A Memoir on Analytic and Projective Sets] (1926), in: Luzin, N. N. *Sobranie sochinenii [Collected Works].* Moskva: Izdatel'stvo AN SSSR, vol. 2, pp. 317–379.

Medvedev, F. A. (1976) *Frantsuzskaia shkola teorii funktsii i mnozhestv na rubezhe XIX–XX vv.* [The French School of the Theory of Functions and Sets at the Turn of the 19th / 20th Century]. Moskva: Nauka.

Medvedev, F. A. (1982) *Ranniaia istoriia aksiomy vybora* [The Early History of the Axiom of Choice]. Moskva: Nauka.

Medvedev, F. A. (1986) O kurse lektsii B. K. Mlodzeevskogo po teorii funktsii deistvitel'nogo peremennogo, prochitannykh osen'iu 1902 g. v Moskovskom universitete [On B. K. Mlodzeevskii's Course of Lectures on the Theory of Real-Variable Functions, Read at Moscow University in the Autumn of 1902], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 30, pp. 130–147.

Men'shov, D. E. (1983) Vospominaniia o molodykh godakh i vozniknovenii Moskovskoi shkoly teorii funktsii [The Memories of Young Years and the Birth of the Moscow School of the Theory of Functions], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 27, pp. 312–333.

Moschovakis, Y. (1980) *Descriptive Set Theory*. Amsterdam: North Holland.

Parshin, A. N. (2004) Srednevekovaia kosmologiia i problema vremeni [The Medieval Cosmology and the Problem of Time], *Voprosy filosofii*, no. 12, pp. 70–88.

Parshin, A. N. (2005) Lestnitsa otrazhenii (ot gnoseologii k antropologii) [The Ladder of Reflections (From Epistemology to Anthropology)], in: *Istoriko-filosofskii ezhegodnik – 2005.* Moskva: Nauka, pp. 269–286.

Perepiska N. N. Luzina s P. A. Florenskim. Publikatsiia i primechaniia S. S. Demidova, A. N. Parshina, S. M. Polovinkina i P. V. Florenskogo [Correspondence Between N. N. Luzin and P. A. Florensky. Publication and Comments by S. S. Demidov, A. N. Parshin, S. M. Polovinkin, and P. V. Florensky] (1989), *Istoriko- matematicheskie issledovaniia*, vol. 31, pp. 125–191.

Pis'ma D. F. Egorova k N. N. Luzinu. Predislovie P. S. Aleksandrova. Publikatsiia i primechaniia F. A. Medvedeva pri uchastii A. P. Iushkevicha [D. F. Egorov's Letters to N. N. Luzin. Preface by P. S. Aleksandrov. Publication and Comments by F. A. Medvedev with the Participation of A. P. Yushkevich] (1980), *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 25, pp. 335–361.

Polovinkin, S. M. (1986) O studencheskom matematicheskom kruzhke pri Moskovskom matematicheskom obshchestve v 1902–1903 gg. [On the Students' Mathematical Circle at the Moscow Mathematical Society in 1902 / 1903], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 30, pp. 148–158.

Tikhomirov, V. M. (1993) Otkrytie A-mnozhestv [The Discovery of A-sets], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 34, pp. 126–139.

Uspenskii, V. A. (1985) Vklad Luzina v deskriptivnuiu teoriiu mnozhestv i funktsii: poniatiia, problem, predskazaniia [Luzin's Contribution to the Descriptive Theory of Sets and Functions: Concepts, Problems, Predictions], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 40, № 3, pp. 85–116.

Zermelo, E. (1904) Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Mathematische Annalen*, vol. 59, pp. 514–516.

Сергею Сергеевичу Демидову — семьдесят пять лет

Публикация настоящего исследования готовилась долго, и ей предшествовала еще более долгая, кропотливая, собственно исследовательская работа. Сергей Сергеевич Демидов уже не первый раз оказывается в состоянии удивить своих коллег неожиданным глубоким результатом, когда в его исследовательских сетях оказывается не просто яркое решение важной научной или историко-научной проблемы, а сама по себе проблема целиком – с возможными подходами и просматривающимися решениями. Как ни важна проблема реальности в современном естествознании, как ни стары рассуждения о реальности / нереальности универсалий вообще и чисел в частности, встретить градацию реального в дилемме рационального / иррационального в переписке Флоренского и Лузина – это, безусловно, настоящий подарок, особенно если поместить ее в соответствующий культурно-исторический контекст. Эта публикация готовится непосредственно в преддверии 75-летия Сергея Сергеевича, и вот так оказывается, что подарок подносится не восторженными поклонниками почивающему на лаврах юбиляру, а сам юбиляр, не забывающий о трудах даже в дни праздников, подносит свой подарок всем нам.

Талант Сергея Сергеевича давно нам всем известен и высоко ценим. Он не только в научной результативности и умении глубоко и содержательно ставить исследовательскую задачу. Он, в том числе, и в умении организовать работу относительно большого коллектива – в той мере, в какой, конечно, может быть большим коллектив историков математики. (Ведь, наверное, трудно найти другой подобный дисциплинарный оазис, столь же располагающий к индивидуализму и независимости.) Сергей Сергеевич притягивает к себе людей и своей увлеченностью, и умением в любой задаче заглянуть за ее естественный горизонт, и теплым человеческим отношением ко всем окружающим.

Редакция ВИЕТ, его редколлегия и редсовет поздравляют Сергея Сергеевича с юбилеем, выражают свою безмерную благодарность за этот чудесный подарок, желают ему дальнейших успехов в его блистательной работе и крепкого здоровья!