Из истории естествознания

From the History of Science

ОТ МЕТОДА КАСКАДОВ К ИЗУЧЕНИЮ СВОЙСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ: ИСТОРИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

ГАЛИНА ИВАНОВНА СИНКЕВИЧ*

История теоремы Ролля началась в XVII в. с решения алгебраического уравнения методом каскадов и формулирования понятия корневого интервала. В XIX в. Б. Больцано сформулировал на их основе понятие и теорему о непрерывной функции. Эволюция понятия непрерывности в работах О. Коши и К. Вейерштрасса привела к тому, что метод каскадов и метод отделения корней воплотились в две важнейшие теоремы, отражающие свойства непрерывных функций: теорему Ролля и теорему Больцано – Коши. Современная форма этих теорем такова: «Если функция непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$, тогда в (a, b) найдется хотя бы одна точка c такая, что $f'(c) = 0$» и «Если функция непрерывна на [a, b] и имеет разные знаки на краях интервала, то в (a, b) найдется хотя бы одна точка c такая, что $f(c) = 0$». В историко-математической литературе частично исследована история метода Ролля, но лишь до начала XIX в. и преимущественно с точки зрения истории алгебры.

Провозвестником реформы математического анализа XIX в. был Больцано, который дал первое строго аналитическое доказательство второй из названных теорем. Он полагал, что она выражает основное свойство непрерывной функции, и рассмотрел историю ее возникновения. В реальной же ее истории участвовало немалое число ученых, живших ранее (а потому во многом способствовавших развитию анализа) и их современников, без которых эта история лишается не только важных красок, но и требуемой от исторического свидетельства полноты. Настоящая статья представляет более полную историю вопроса, содержащую анализ работ Б. Больцано, О. Коши, К. Вейерштрасса, Г. Кантора и Н. Н. Лузина, и выделяет роль эволюции понятия среднего значения для развития теории функций.

Ключевые слова: метод каскадов, теорема Ролля, теорема Больцано – Коши.

---

* Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. Россия, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4. E-mail: galina.sinkevich@gmail.com.

Вопросы истории естествознания и техники. 2015. Т. 36. № 4. С. 642–664.
Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki, 2015, vol. 36, no. 4, pp. 642–664.

FROM THE METHOD OF CASCADES TO THE STUDY OF CONTINUOUS FUNCTIONS: A HISTORICAL CHRONICLE

GALINA IVANOVNA SINKEVICH ¤

The history of Rolle's Theorem dates back to the 17th century, when Michel Rolle developed the method of cascades and the roots localization method for the solution of algebraic equations. In the 19th century, these methods provided the basis for Cauchy's development of the concept of continuity and for Bolzano's Theorem that initiated a reform of calculus. In modern formulations, the Rolle Theorem and the Bolzano – Cauchy Theorem express the two most important properties of continuous functions. This article explores the history of these developments in fuller detail, including important contributions by Bernard Bolzano, Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass, Georg Cantor, and Nikolai Luzin.

Keywords: the method of cascades, The Rolle Theorem, The Bolzano – Cauchy Theorem.

До XVII в. при нахождении корней алгебраических уравнений пользовались геометрическими образами пересечения кривых, а интервал, в котором находились корни, оценивали на основе анализа коэффициентов. Например, И. Ньютон во «Всеобщей арифметике» писал: «Если вы пожелаете найти предел, которого не может превзойти ни один корень, то отыщите сумму квадратов корней и извлеките из нее квадратный корень. Этот квадратный корень будет больше, чем наибольший корень уравнения» [1]. В середине XVII в. использовался метод локализации корня с помощью вспомогательного уравнения. Искали, как правило, положительные корни. Чтобы получить вспомогательное уравнение, степени переменных понижали на единицу и каждый коэффициент умножали на прежний показатель степени (И. Гудде, 1658 г.) [2]. Позже эта операция была определена как дифференцирование многочлена (И. Ньютон, Г. Лейбниц). М. Ролль нашел новый подход к решению этой проблемы. Рассмотрению его вклада и будет посвящена данная статья.

1690 г. М. Ролль и его метод каскадов

Мишель Ролль (1652–1719) родился во Франции в маленьком городке Амбер провинции Овернь в семье сапожника. В возрасте 23 лет он приехал в Париж, где работал переписчиком. Ролль достиг таких успехов в самообразовании, что в 1682 г. решил трудную задачу Ж. Озанама: «Найти такие четыре числа, что разность между двумя любыми из них была бы полным квадратом и, кроме того, попарные суммы первых трех чисел тоже были бы полными квадра-

¤ St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering. Ul. 2-ya Krasnoarmeyskaya, 4, St. Petersburg, Russia. E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

[1] *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или книга об арифметическом синтезе и анализе / Пер. А. П. Юшкевич. М.: Наука, 1948. С. 265.

[2] Реконструкция метода Гудде дана А. П. Юшкевичем в его примечаниях к переводу труда Г. Ф. Лопиталя «Анализ бесконечно малых» (*Лопиталь Г. Ф., де.* Анализ бесконечно малых / Пер. Н. В. Леви, ред. и пред. А. П. Юшкевича. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1935. С. 400).

тами» [3]. Сам Озанам полагал, что каждое из чисел состоит по крайней мере из 50 знаков, но Ролль нашел такие числа, каждое из которых имело не более 7 знаков. Это решение принесло ему признание среди математиков, он был приглашен давать уроки сыну военного министра, получил пост в военном министерстве, пенсию от Людовика XIV, в 1685 г. стал членом Королевской академии наук (как ученик астронома (*élève astronome*), а с 1699 г. – ее пенсионером (как геометр, т. е. математик).

Ролль занимался проблемами алгебры – диофантовым анализом, решением алгебраических уравнений. Он во многом популяризировал алгебраическую символику Р. Рекорда и ввел обозначение $\sqrt[n]{x}$.

Ролль известен своими бурными нападками на дифференциальное исчисление и обвинением метода Р. Декарта в недостаточной обоснованности. Французские математики П. Вариньон и Ж. Сорен опровергли большинство доводов Ролля, в 1705 г. академия признала его неправоту, с чем он впоследствии согласился. Но эта дискуссия вынудила Лейбница излагать дифференциальное исчисление с большей строгостью.

В 1690 г. Ролль опубликовал «Алгебраический трактат» [4] о решении диофантовых и алгебраических уравнений произвольных степеней. В нем содержалось много новых идей, прогрессивных по отношению к таковому же методу Декарта, и как один из методов дан метод каскадов [5], в основе которого лежит идея о том, что корни исходного уравнения разделены корнями вспомогательного, производного уравнения. Корни вспомогательного уравнения также можно отделить с помощью следующего вспомогательного и т. д. Образуя каскады, мы нисходим до линейного уравнения, решив которое, совершаем восхождение к исходному. Обоснование своего метода Ролль опубликовал годом позже в небольшой работе «Обоснование метода решения уравнений любых степеней» [6].

Приведем решение самого Ролля для уравнения четвертой степени из его трактата [7]:

$\nu^4 - 24\nu^3 + 198\nu\nu - 648\nu + 473 \infty 0$ (в записи Ролля знак ∞ означает равенство, $\nu\nu$ означает ν^2).

Для выделения корневого интервала он вводит предположения (гипотезы) о границах интервала: большую гипотезу (*grande hypothèse*), малую гипотезу (*petite hypothèse*) и крайнюю гипотезу (*hypothèse extrême*). Большая гипотеза – это величина, после которой нет ни одного корня полинома, которая вычисляется так: $\left(\frac{a}{c}+1\right)$, где a – это абсолютная величи-

[3] На известном английском интернет-ресурсе *MacTutor History of Mathematics Archive* (*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/*) приведен ошибочный перевод этой задачи с французского на английский.

[4] *Rolle, M.* Traité d'algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique. Paris: Estienne Michallet, 1690.

[5] Ibid. P. 124–152.

[6] *Rolle, M.* Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés. Paris: Jean Cusson, 1691.

[7] *Rolle*. Traité d'algèbre... P. 124–126.

на наибольшего отрицательного коэффициента. Здесь $a = |-648| = 648$; c – коэффициент при старшей степени, $c = 1$, следовательно, большая гипотеза для нашего уравнения равна 649. Ролль утверждал, что это верно для всех многочленов. Малая гипотеза – это число, меньшее любого из корней. Так как рассматривались только положительные корни, в качестве малой гипотезы брался ноль. Крайняя, или краевая, гипотеза – это внутренняя граница, разделяющая корни вспомогательных уравнений, называемых каскадами. Все крайние гипотезы Ролль называет средними гипотезами (*hypothèses moyennes*).

Итак, $\nu^4 - 24\nu^3 + 198\nu^2 - 648\nu + 473 = 0$, все положительные корни расположены в интервале (0, 649). Задача, которая стоит перед Роллем, – разбить этот интервал на несколько меньших интервалов, каждый из которых содержит только один корень исходного уравнения, т. е. выделить корневой промежуток.

Первое слагаемое имеет степень неизвестного, равную 4, Ролль умножает его на 4. Второе слагаемое имеет степень 3, он умножает его на 3. Третье слагаемое, имеющее степень 2, умножается на 2; четвертое, имеющее степень 0, умножается на 0. Далее Ролль получает: $4\nu^4 - 72\nu^3 + 396^2\nu - 648\nu = 0$ и делит все члены уравнения на неизвестное ν. Получается $4\nu^4 - 72\nu^3 + 396\nu - 648 = 0$. Он вновь умножает каждый член уравнения на показатель степени: $12\nu^3 - 144\nu^2 + 396\nu = 0$ и делит на неизвестное: $12\nu^2 - 144\nu + 396 = 0$. И еще раз: $24\nu^2 - 144\nu = 0$, $24\nu - 144 = 0$, $4\nu - 24 = 0$.

Расположим каскады следующим образом:

Первый каскад: $4\nu - 24 = 0$.

Второй каскад: $6\nu^2 - 72\nu + 198 = 0$.

Третий каскад: $4\nu^3 - 72\nu^2 + 396\nu - 648 = 0$.

Четвертый каскад: $\nu^4 - 24\nu^3 + 198\nu^2 - 648\nu + 473 = 0$.

Корни каждого каскада разделены корнями предыдущего, и все положительные корни лежат в (0, 649). Так как 6 – это корень первого каскада, то корни второго каскада лежат в (0, 6) и (6, 13), причем в каждом интервале лежит только один корень, а число $13 = \dfrac{|-144|}{12} + 1$ – это большая гипотеза для данного уравнения (обозначения современные [8]). Будем искать только самый левый из корней, остальные вычисляются аналогично. Значения многочлена $6\nu^2 - 72\nu + 198$ на краях интервала (0, 6) имеют разные знаки. Возьмем какое-нибудь среднее значение из интервала, не обязательно середину, и проверим знаки:

$$f_2(5) = -12 < 0,\ f_2(4) = 6 > 0.$$

Следовательно, корень второго каскада лежит в (4, 5). Продолжая итерации или пользуясь известной формулой Виета, получим значение $6 - \sqrt{3}$. Второй корень $6 + \sqrt{3}$.

Следовательно, границы, в котором лежат корни третьего каскада, будут таковы: $(0, 6 - \sqrt{3}), (6 - \sqrt{3}, 6 + \sqrt{3}), (6 + \sqrt{3}, 163)$, причем в каждом из

[8] Знак модуля ввел К. Вейерштрасс.

интервалов лежит только один корень. Здесь число $163 = \dfrac{|-648|}{4} + 1$ – большая гипотеза для третьего каскада. Будем искать только самый левый корень третьего каскада. Проверим знаки третьего каскада на краях этого интервала – они различны. Возьмем какую-либо среднюю точку из интервала $(0,6-\sqrt{3})$ и вычислим значение

$$f_3(\nu) = 4\nu^3 - 72\nu^2 + 396\nu - 648.$$

$$f_3(0) = -648 < 0,\ f_3(5) = 32 > 0,\ f_3(4) = 40 > 0,\ f_3(3) = 0.$$

Следовательно, левый корень третьего каскада равен 3, значит, левый (положительный) корень четвертого каскада (т. е. корень исходного уравнения) лежит в (0, 3). Вычислим значения $f_4(\nu) = \nu^4 - 24\nu^3 + 198\nu^2 - 648\nu + 473$ на краях интервала и в некоторых средних точках: $f_4(0) = 473 > 0,\ f_4(3) = -256 < 0,\ f_4(1) = 0.$

Таким образом, мы нашли левый корень уравнения $\nu = 1$. Аналогично вычисляются и остальные корни. В случае приближенного вычисления процедура позволяет найти корень с точностью до любого десятичного знака. Для интервалов большой протяженности Ролль прибегает к вспомогательному уравнению, сделав замену $\nu = \left(\dfrac{a}{c} + 1\right) - x$, где $\left(\dfrac{a}{c} + 1\right)$ – это большая гипотеза.

Кроме этого метода решения алгебраических уравнений Ролль предлагает еще четыре других, а также методы решения неопределенных уравнений и способ нахождения общего делителя многочленов.

Как видим, Ролль с помощью коэффициентов выделяет пределы, между которыми лежат корни. В методе каскадов, хотя и без терминологии дифференциального исчисления, он использовал принцип разделения корней многочлена корнями его производной, а существование корней проверялось различием знаков многочлена на краях интервала. В 1691 г. в работе, посвященной обоснованию метода каскадов, Ролль доказывал, что значения производной (т. е. производного полинома) для двух соседних (однократных) корней целого многочлена имеют разные знаки [9].

Понятие функции в XVII в. только формировалось, и еще не было понятия графика функции и понятия геометрического места точек. Поэтому представление о корне как о точке, в которой график функции пересекает ось, еще не существовало.

Этот образ возник у Ролля. Он убеждался в наличии корня в интервале, определяя знаки многочлена в левой части уравнения на краях интервала. Если знаки были различны, корень лежал в интервале. Ролль сужал интервал, проверяя знак многочлена в какой-либо внутренней точке интервала. Таким образом, Ролль явился родоначальником двух теорем анализа: теоремы о корневом интервале, которую мы сейчас называем теоремой Больцано – Коши, и

[9] *Rolle*. Démonstration d’une méthode... P. 47.

собственно теоремы Ролля, гласящей, что корни непрерывной функции разделены корнями ее производной.

На русском языке метод каскадов Ролля изложен в работе С. А. Яновской [10], хорошая реконструкция метода каскадов есть на английском языке [11]. Первоисточником биографии Ролля служит «Похвальное слово М. Роллю» его современника, секретаря Парижской академии наук Б. Фонтенеля [12]. Подробнее биография, метод Ролля и его история изложены в статье Г. Синкевич [13].

1707 г. Ролль и И. Ньютон

До Ролля приближенное решение алгебраических уравнений производилось графическими методами, т. е. путем нахождения точки пересечения кривых и с помощью простых итераций. Вероятно, Ролль был первым, кто сформировал понятие корневого интервала исходя из сравнения знаков соответствующего многочлена.

Сам геометрический образ задачи не соответствовал поиску пересечения кривой с осью, а осуществлялся как поиск точек пересечения двух кривых. Поэтому образ графика, имеющего на краях отрезка ординаты разных знаков, в терминах алгебры возникнуть не мог. Ньютон, например, представлял переменные как величины, изменяющиеся во времени, а не зависящие друг от друга [14]. Представление о линии как о геометрическом месте точек уравнения [15] началось с работы Г. Ф. А. Лопиталя о конических сечениях, было развито Л. Эйлером, а общий подход сформировался лишь в XIX в.

Ньютон описал свой метод касательных в работах «Анализ уравнений с бесконечным числом членов» [16] и «Метод флюксий и бесконечных рядов» [17]. Этот метод был изложен также в книге Дж. Валлиса 1685 года «Трактат по алгеб-

---

[10] *Яновская С. А.* Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых // Труды Института истории естествознания. М., 1947. Т. 1. С. 327–346.

[11] *Washington, Ch.* Michel Rolle and His Method of Cascades // *https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Washington_Rolle_ed.pdf.*

[12] *Fontenelle, B.* Eloge de M. Rolle // Histoire de l'Académie royale des sciences. Paris: L'Imprimerie royale, 1719. P. 94–100.

[13] *Sinkiewich, G. I.* Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznei: M. Rolle, B. Bolzano, A. Cauchy // Dzieje matematyki polskiej II / Red. W. Więsław. Wrocław: Sowa, 2013. S. 165–181.

[14] *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Из прошлого аналитической геометрии // Труды Института истории естествознания. М., 1952. Т. 4. С. 217–235.

[15] Это понятие следует отличать от понятия геометрического места точек, обладающих заданным свойством (например, окружность), возникшего в Античности.

[16] *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* – рукопись лекций, которые Ньютон читал в университете, записанных на латыни в 1669 г. по настоянию И. Барроу. Известен вариант этого текста в виде письма Барроу к Дж. Коллинзу 1669 года. Текст был изложен в «Трактате по алгебре» Дж. Валлиса в 1685 г. (2-е изд. в 1693 г.) и опубликован Ньютоном в 1711 г. (*Newton, I.* De analysi per aequationes numero terminorum infinitas // *Newton, I.* Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis. Londinium: Ex officina Pearsoniana, 1711).

[17] *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* – написана Ньютоном в 1671 г., опубликована на английском языке в 1736 г.: *Newton, I.* The Method of Fluxions and Infinite Series; with Its Application to the Geometry of Curve-lines. London: Henry Woodfall, 1736.

ре» [18]. В 1690 г. в Англии был опубликован трактат Дж. Рафсона «Общий анализ уравнений» [19], содержавший усовершенствованное изложение метода Ньютона – Рафсона, или метода касательных [20]. В 1707 г. вышла книга Ньютона «Всеобщая арифметика» [21], описывающая численные методы решения уравнений.

Ньютон, до появления «Трактата» Ролля пользуясь методом касательных, не проверял знаки функции на краях интервала, что можно видеть в его работах до 1690 г., например, в его «Методе флюксий и бесконечных рядов» [22], написанном в 1671 г., но опубликованном лишь в 1736 г. Для определения отправной точки процедуры вычисления корня Ньютон использовал метод ложного положения и так называемый «параллелограмм Ньютона», или «многоугольник Ньютона».

Парижская академия и Лондонское королевское общество обменивались академической литературой. Несомненно, Ньютон получил «Трактат» Ролля, более того, он включил изложение его метода в свое издание «Всеобщей арифметики» [23] 1707 года, правда, без указания авторства Ролля. Но только после появления работы Ролля, в 1707 г., Ньютон впервые начинает проверять знаки полинома на краях интервала во «Всеобщей арифметике». Способ сужения интервала, содержащего корень, с помощью проверки знака полинома в некоторой внутренней (не обязательно средней) точке впервые встречается у Ролля. Больцано формализовал его 117 лет спустя как метод половинного деления. Добавим, что Ньютон все рассматриваемые функции полагал определенными по непрерывности, а Ролль рассматривал только многочлены, являющиеся непрерывными функциями.

Метод Ньютона и использование разложения в ряды Маклорена пользовались большей популярностью у континентальных математиков. В 1740 г. Т. Симпсон дал обобщенное описание метода Ньютона [24] в работе «Очерки по некоторым вопросам умозрительной и смешанной математики» [25].

1696 г. Г. Ф. де Лопиталь

В 1696 г. в Париже вышел первый учебник математического анализа «Анализ бесконечно малых для исследования кривых» [26] маркиза Г. Ф. де Лопиталя

[18] *Wallis, J.* A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical: Shewing the Original, Progress, and Advancement Thereof, from Time to Time, and by What Steps It Hath Attained to the Heighth at Which Now It Is; With Some Additional Treatises. London; Oxford: John Playford, 1685.

[19] *Raphson, J.* Analysis aequationum universalis. 2 ed. Londinium, 1702.

[20] Если Ньютон рассматривал последовательность приближающих многочленов, Рафсон уже рассматривает последовательные итерации переменной.

[21] *Newton, I.* Arithmetica universalis; sive De compositione et resolutione arithmetica liber. Cantabrigia: Typus academicis, 1707. Рус. пер.: *Ньютон И.* Всеобщая арифметика или книга об арифметическом синтезе и анализе / Пер. и комм. А. П. Юшкевича. М.: Изд-во АН СССР. 1948.

[22] *Newton*. Method of Fluxions...

[23] *Ньютон*. Всеобщая арифметика... С. 267–270.

[24] Симпсон для итераций уже использовал производную.

[25] *Simpson, Th.* Essays on Several Curious and Useful Subjects, in Speculative and Mix'd Mathematicks. London: Henry Woodfall, 1740.

[26] *l'Hôpital, G. F., de.* Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris: L'Imprimerie royale, 1696.

с изложением лекций И. Бернулли. В нем впервые изложено дифференциальное и интегральное исчисления, использованы понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек. Правда, легкости и доступности изложения Лопиталь достигает за счет пренебрежения обоснованиями: «Я убежден, что в вопросах математики полезны лишь выводы и что книги, излагающие только подробности или частные предложения, заставляют лишь терять время тех, кто их пишет, и тех, кто их читает» [27]. Но он дает геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Здесь же приведено такое рассуждение:

> Всякая непрерывно возрастающая или убывающая величина [28] не может превратиться из положительной в отрицательную, не проходя через бесконечность или через нуль, а именно: через нуль – когда она сначала убывает, и через бесконечность – когда она сначала возрастает. Отсюда следует, что дифференциал наибольшей или наименьшей величины должен равняться нулю или бесконечности. Легко можно понять, что непрерывно убывающая величина не может из положительной стать отрицательной, не проходя через нуль; но не так очевидно, что при возрастании она должна пройти через бесконечность [29].

Эта книга открывает начальный период развития математического анализа, в котором все функции были непрерывными, потому что были целыми алгебраическими, и аналитические утверждения основывались на геометрическом представлении. Правила дифференциального исчисления XVII–XVIII вв. были определены лишь для алгебраических функций, формулы производных трансцендентных функций появятся позже в работах Эйлера и Коши.

1708 г. Метод Ролля в трактате Ш.-Р. Рейно

Труды Гудде, Декарта, Ролля, Ньютона, Лейбница, Бернулли и Лопиталя хорошо знал французский проповедник и профессор философии Ш.-Р. Рейно. Будучи знаком с упреками в недостаточности обоснования и отсутствии систематического изложения новой математики, он поставил себе целью дать полный курс анализа, алгебры и геометрии в их взаимосвязи с доказательствами. В 1708 г. в Париже в двух томах вышла его книга «Доказательный анализ» [30] с изложением результатов названных выше математиков. Заметим, что до того времени в математике доказывались лишь геометрические утверждения, а в алгебре и зарождающемся анализе ограничивались лишь демонстрацией примеров.

---

[27] *Лопиталь*. Анализ бесконечно малых... С. 57.

[28] Лопиталь имеет в виду подкасательную.

[29] *Лопиталь*. Анализ бесконечно малых... С. 130–132.

[30] *Reyneau, Ch.-R.* Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques. 2 vols. Paris: J. Quillau, 1708 (второе издание у того же издателя с примечаниями Вариньона вышло в 1736–1738 г.).

Первый том «Доказательного анализа» посвящен алгебраическим вопросам, второй – дифференциальному и интегральному исчислению, причем большинство утверждений автор пытается обосновать, давая большое количество примеров, не только математических, но и из области механики и астрономии. Примечания ко второму изданию 1736 г. написал П. Вариньон.

Рейно, профессиональный проповедник, хорошо владел искусством изложения и подбора терминов не только на латыни, но и на французском языке. Его язык выгодно отличается от тяжелого языка Ролля не только большей мелодичностью текста, но и последовательностью в обоснованиях, удачными определениями понятий. Рейно сначала рассматривает линейные уравнения, составляя уравнения высших степеней перемножением двучленов, доходя до уравнений шестой степени. Он показывает решения не только численных, но и буквенных алгебраических уравнений как в радикалах, так и приближенно; приводит основную теорему алгебры, теорему о значении остатка от деления многочлена на двучлен [31]. Его доказательства представляют собой рассуждения с демонстрацией частных случаев и показ примеров. В алгебраических уравнениях Рейно различает случаи однократных, кратных, положительных, отрицательных, целых, дробных, неизмеримых, а также мнимых корней.

Рейно посвящает большой раздел [32] методу Ролля:

> В шестой книге объяснен и доказан метод нахождения величин, которые являются пределами неизвестных в степенном уравнении (господин Ролль является автором этого метода), и дается несколько способов решения с помощью этих пределов, причем корни могут быть вычислены с любой желаемой точностью [33].

Рейно, развивая идеи Ролля, ввел свою терминологию. Каждое вспомогательное уравнение, корнями которого являются границы корней предыдущего уравнения, он называет уравнением пределов (*l'équation des limites*), а границы интервала, содержащего корень, называет пределами корней. Рейно определяет корневой интервал, содержащий действительный корень, по отличию знаков левой части уравнения на пределах корней; описывает восходящую и нисходящую процедуры по Роллю.

Второй том «Доказательного анализа» посвящен дифференциальному и интегральному исчислению. В нем содержится утверждение, что касательная к кривой (для конических сечений) в некоторой точке параллельна диаметру [34], а также такое: если ряд значений некоторой переменной, например, подкасательной [35], сначала положителен, а затем становится отрицательным, то он проходит некоторую точку, в которой значение рассматриваемой величины, наклона или подкасательной, равно нулю или бесконечности [36].

---

[31] Эта теорема носит имя Э. Безу (*E. Bezout*). Эта же теорема встречается и у Рафсона. *Reyneau*. Analyse démontrée... T. 1. P. 270–271.

[32] *Reyneau*. Analyse démontrée... T. 1. P. 269–375.

[33] Ibid. T. 1. P. XII.

[34] Ibid. T. 2. P. 176.

[35] Подкасательной называется проекция отрезка касательной между точками пересечения с осью *OX* и точкой касания на ось *OX*.

[36] *Reyneau*. Analyse démontrée... T. 2. P. 177.

1727–1729 гг. Теорема Ролля у Дж. Кемпбелла и К. Маклорена

«Доказательный анализ» Рейно был известен в Англии. Его цитирует Дж. Кемпбелл [37] в 1727 г. в работе «Метод определения количества невозможных (мнимых. – *Г. С.*) корней в низших уравнениях» [38]. Кемпбелл переводил французские математические сочинения на английский язык и сам занимался решением алгебраических уравнений. В упомянутой работе он пересказывает процедуру Ролля, привлекает метод максимумов и минимумов Ферма и рассматривает случай финального квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Тогда можно по перемене знаков коэффициентов исходного уравнения назвать количество мнимых корней, точнее, их наименьшее количество. По поводу строгости доказательств с ним полемизирует К. Маклорен (1698–1746) в своем письме [39] в этот же журнал. Маклорен формулирует следующую теорему: «Корни уравнения $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ & *с*. = 0 являются пределами корней уравнения $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3}$ & *с*. = 0» [40].

Перемена знаков перед коэффициентами обеспечивает n положительных корней. Это утверждение уже имеет статус теоремы. Маклорен рассматривает также более общий вид вспомогательного уравнения, использованный Гудде в 1658 г.

1746 г. А. К. Клеро

В 1746 г. вышла книга А. К. Клеро «Основы алгебры» [41], в которой рассказывается о методах решения алгебраических уравнений. Большое внимание уделено методу Ньютона и Маклорена, но ни слова о Ролле и его методе.

1755 г. Теорема Ролля у Л. Эйлера

В 1755 г. Петербургская академия наук опубликовала сочинение Л. Эйлера «Наставление по дифференциальному исчислению» [42]. Тенденция сближения алгебры и анализа, которую мы видели в трактате Рейно, обсуждения Даламбера и Эйлера уравнения струны привели к расширению понятия функции. Эйлер гордится тем, что при изложении анализа ему не требуется обращаться к прикладной интерпретации. В IX главе он пишет: «Понятие уравнения

---

[37] Об этом шотландском математике известно лишь, что он полемизировал с К. Маклореном и умер в 1766 г.

[38] *Campbell, G.* A Method for Determining the Number of Impossible Roots in Adfected Aequations // Philosophical Transactions of Royal Society of London. 1727/28. Vol. 35. P. 515–531.

[39] A Second Letter from Mr. Colin McLaurin [...] Concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of Other Rules in Algebra // Philosophical Transactions of Royal Society of London. 1729. Vol. 36. P. 59–96.

[40] Ibid. P. 88.

[41] *Clairaut, A. C.* Élémens d'algèbre. Paris: Les frères Guerin, 1746.

[42] Euler, L. Institutiones calculi differentialis. Petropolis: Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana, 1755.

можно свести к понятию функции» [43]. Здесь Эйлер рассматривает многочлен как заведомо непрерывную функцию, удовлетворяющую его представлениям о непрерывной функции – как функции, заданной единым аналитическим выражением. Эйлер повторяет теорему Маклорена, приведенную нами выше, о корнях уравнения

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + dx^{n-4} - \textit{и т.д.} = 0,$$

которые разделены корнями производного уравнения, т. е. экстремумами. Заметим, что и Маклорен, и Эйлер рассматривали уравнение, заведомо имеющее n действительных корней. Проблема определения количества мнимых корней, поставленная Кемпбеллом, рассмотрена Эйлером в XIII главе. Эйлер обобщает свое рассуждение:

> Из сказанного, впрочем, ясно, что если у предложенного уравнения и не все корни действительны, все же всегда между какими-либо двумя корнями имеется максимум или минимум. Обратное же утверждение вообще несправедливо, т. е. между двумя какими-либо максимумами или минимумами может не содержаться действительный корень. Это заключение, однако, можно сделать, если добавлено условие, что одно из значений z будет положительным, а другое отрицательным […] Между двумя действительными корнями уравнения существует одно значение, при котором функция становится максимумом или минимумом [44].

Обоснование Эйлера основано на представлении о непрерывном движении, он переносил на функции все свойства алгебраических выражений.

1797 г. Теорема о корневом интервале в «Основах алгебры» С. Ф. Лакруа

В 1797 г. в Париже вышло первое издание «Основ алгебры» С. Ф. Лакруа, автора многократно переизданных курсов высшей математики, известных в России XIX в. В «Основах алгебры» он приводит следующую теорему о корневом промежутке:

> Если имеются две величины, которые, будучи подставленными в уравнение вместо неизвестной, дадут два результата противоположного знака, мы можем заключить, что корни данного уравнения находятся между этими величинами, и они действительны [45].

В 1811 г. в Майнце вышел авторизованный немецкий перевод «Основ алгебры» Лакруа, сделанный М. Меттернихом, профессором математики и физики университета Майнца [46]. В этой книге также изложена теорема о корне-

---

[43] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.; Л.: Гостехтеориздат. 1949. С. 367.

[44] Там же. С. 435–436.

[45] *Lacroix, S. F.* Éléments d’algèbre, à l’usage de l’Ecole centrale des Quatre-Nations. 15 ed. Bruxelles : H. Remy, 1830. P. 298.

[46] *Lacroix, S. F.* Anfangsgründe der Algebra / M. Metternich (Übers.) Mainz: Kupferberg, 1811.

вом интервале. Эта книга многократно переиздавалась на немецком языке и широко использовалась немецкими математиками.

1768 г. А. Г. Кестнер о выделении корневого интервала

А. Г. Кестнер, профессор математики и физики в Гёттингене, был уважаем как известный методист по вопросам анализа. Отметим, что он еще до Коши рассматривал иррациональные числа как пределы рациональных последовательностей. Кестнер состоял в переписке с Эйлером.

В 1758–1769 гг. Кестнер опубликовал четырехтомный курс «Основы математики» [47], превосходный методически, с хорошим историческим обзором, многократно переиздававшийся. В курсе отчетливо видно влияние Эйлера. На русском языке курс Кестнера был издан в 1792–1803 гг. Метода Ролля у Кестнера нет, но в третьем томе «Анализ бесконечных величин» [48], вышедшем в 1760 г., есть теорема о корневом интервале многочлена с доказательством, использующим геометрическую аналогию. Приведем ее по немецкому изданию 1794 г.: «Теорема. Если y положителен для $x = a$ и отрицателен для $x = c$, то между a и c найдется хотя бы одно значение $x = b$, для которого $y = 0$» [49]. Влияние Кестнера на немецкое математическое образование было очень велико, к его работам обращался К. Вейерштрасс.

1798 г. Ж. Л. Лагранж о методе Ролля

В 1798 г. Ж. Л. Лагранж предложил свой метод отделения корней, основанный на методе Ролля [50]. Лагранж утверждает, что корни исходного уравнения разделены корнями производного уравнения и характеризуются подстановкой корней производного уравнения в исходное уравнение и определением его знака:

> Таким образом, эти правила позволяют не только определять число действительных корней уравнения, но и границы, в которых они лежат; и если вы хотите ограничить корни между величиной, большей, чем α_1 и меньшей, чем ν_1, нужен дополнительный поиск по методу, изложенному в главе IV (№ 12), о границах положительных корней данного уравнения.
>
> Заметим, что правила, позволяющие найти эти пределы и изложенные нами по Ньютону и Маклорену, были известны еще Роллю, что видно из V и VI глав его «Алгебры» [51].

[47] *Kästner, A. G.* Die mathematischen Anfangsgründe (4 Th. 7 Bd.). Göttingen: Witwe Vandenhoeck, 1758–1769.

[48] *Kästner, A. G.* Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen / *Kästner, A. G.* Die mathematischen Anfangsgründe. Göttingen: Witwe Vandenhoeck, 1760. Th. 3. Abth. 1.

[49] *Kästner, A. G.* Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht, 1794. S. 198.

[50] *Lagrange, J.-L.* Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques // *Lagrange, J.-L.* Oeuvres complètes. Paris: Gauthier-Villars, 1879. T. 8. P. 11–367.

[51] *Lagrange*. Traité de la resolution des équations numériques... P. 199.

1817 г. Б. Больцано и теорема о корневом интервале

Б. Больцано, чешский математик и философ, немало сделал для развития понятия непрерывного и бесконечного. В его работе 1817 года «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения [52]» он критикует доказательства Кестнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Реслинга, Клюгеля и Лагранжа за привлечение геометрических и физических образов (времени и движения, перехода) и за отсутствие аналитичности рассуждения, т. е. понимания непрерывности как математического понятия [53]. Больцано пишет:

> Ведь в самом деле, если учесть, что доказательства в науке вовсе не должны быть лишь *уверениями*, а, наоборот, *обоснованиями*, то есть изложениями того объективного основания, которое имеет доказываемая истина, то нам само собой станет ясным, что подлинно научным доказательством, или объективным основанием истины, которая верна для всех величин, безразлично, находятся ли они в пространстве или нет, никак не может быть истина, которая верна только для величин, находящихся в *пространстве* [...] Совершенно ошибочно выводить утверждение о том, что каждая непрерывная функция x, которая становится положительной для одного значения x, а отрицательной для другого значения x, должна стать нулем для какого-нибудь значения x, лежащего между ними, – совершенно ошибочно выводить это утверждение из того, что линия пересекает ось абсцисс. Не менее неприемлемо доказательство, которое строят на понятии *непрерывности* функции, примешивая сюда понятия *времени* и *движения*. Понятие *времени*, а тем более *движения* столь же чужеродно в общей математике, как и понятие *пространства*. Лишь одного требуем мы, однако, строго: чтобы никогда не выдвигали примеры вместо *доказательств* и чтобы никогда не основывали существо самого заключения на выражениях, употребленных только в несобственном смысле, и на побочных представлениях, которые они вызывают, так что заключение отпадает, как только меняют эти выражения (здесь и далее курсив в оригинале. – *Г. С.*) [54].

---

[52] *Bolzano, B.* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag: Gottlieb Haase, 1817.

[53] Правда, как нам удалось убедиться, ни Клеро в упомянутом труде 1746 г., ни доктор Эрлангенского университета Х. Л. Реслинг в своей книге 1805 г. «Основы учения о формах, дифференциалах, производных и интегралах функций» (*Rösling, Ch. L.* Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen. Erlangen: J. J. Palm, 1805) не обращаются к методу Ролля и его теореме о корневом промежутке. Приведенные Больцано ссылки на них не соответствуют заявленной теме (*Больцано Б.* Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения // *Кольман Э.* Бернард Больцано. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 171).

[54] *Больцано*. Чисто аналитическое доказательство... С. 174–175.

Закон непрерывности Больцано формулирует так:

Функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности [55] для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, лишь то, что если x какое-нибудь из этих значений, тогда разность $f(x + \omega) - f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим [56]

Истинным является утверждение, что непрерывная функция никогда не достигает своего высшего значения без того, чтобы пройти сначала через все низшие, т. е. что $f(x + n\Delta x)$ может принимать всякое значение, лежащее между $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$, если принять n произвольно между 0 и 1. Однако это утверждение нельзя рассматривать как *объяснение* понятия непрерывности, оно является *теоремой* о непрерывности [57].

Таким образом, эту теорему можно сформулировать так:

Если переменная величина, зависящая от другой переменной величины x, окажется для $x = \alpha$ положительной, а для $x = \beta$ – отрицательной, то всегда существует значение x, лежащее между α и β, для которых она становится нулем, или же такое, для которого она становится бесконечной [58].

Это теорема, говорит Больцано, и она должна быть доказана. Больцано также обращает внимание на то, что такая точка x может быть не единственной. Он полагает ее лежащей в основе теоремы алгебры о разложении многочлена на множители и теоремы Лагранжа о положительности определенного интеграла для положительной функции, равной нулю лишь в крайней точке интервала.

Больцано предлагает свой, более строгий план доказательства этой теоремы, основанной на другой, более общей:

Если две функции x, $f(x)$ и $\varphi(x)$, либо для *всех* значений x, либо для всех, которые лежат между α и β, изменяются *по закону непрерывности*, если далее $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ и $f(\beta) > \varphi(\beta)$, то имеется всякий раз значение x, лежащее между α и β, для которого будет $f(x) = \varphi(x)$ [59].

Эту теорему Больцано доказывает с помощью предположения о существовании верхней грани такой области, где выполняется некоторое отвлеченное свойство функции [60], при этом использует во вспомогательной теореме метод деления интервала пополам. Он показывает, что существование точной верхней грани не приводит к противоречию, ибо более строгое доказательство существования границы стало возможно лишь после появления теории действительного числа, разработанной к 1872 г. Ш. Мере, К. Вейерштрассом,

[55] Формулировка этого закона принадлежит Лейбницу.
[56] *Больцано*. Чисто аналитическое доказательство... С. 174–175.
[57] Там же. С. 175.
[58] Там же. С. 176.
[59] Там же. С. 198.
[60] Например, отрицательность.

Э. Гейне, Р. Дедекиндом и Г. Кантором. Попытка разработать теорию действительного числа через сечение была сделана Больцано позже, в 1830-е гг. [61]

После этого Больцано доказывает теорему о корневом интервале [62]. Здесь же он формулирует еще одну теорему: «Переходя от одного своего значения к другому, функция хоть раз принимает в качестве значения каждое промежуточное число» [63]. Больцано подчеркивал, что указанное свойство есть следствие непрерывности, но его нельзя класть в основу определения непрерывности.

В этой же работе содержится и критерий сходимости последовательности [64], сформулированный четыре года спустя О. Коши и носящий его имя. Больцано принадлежат многие основополагающие идеи, воплощение которых принято связывать с именами Коши и Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Это понятие верхней грани (1817), осознание необходимости и попытка построения теории вещественного числа (1830-е гг.), теоретико-множественные представления [65].

1821 г. О. Л. Коши, теорема о корневом промежутке в «Курсе анализа»

В 1821 г. О. Л. Коши под названием «Алгебраический анализ» [66] издал первую часть «Курса анализа», написанного на основании лекций, прочитанных в Политехнической школе. Вторая его часть, посвященная дифференциальному и интегральному исчислению, была опубликована в 1823 г. В силу недоступности первого издания мы будем ссылаться на «Собрание сочинений» Коши [67].

Коши гениально перерабатывал идеи, высказанные его коллегами и порой нестрого либо неумело обоснованные. В качестве примера можно привести идеи Ампера, Абеля, Грассмана, Больцано и Галуа [68].

Определение непрерывной функции, введенное в «Алгебраическом анализе», в точности повторяет определение Больцано [69].

---

[61] *Рыхлик К.* Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано // Историко-математические исследования. М.: Госфизматиздат, 1958. Т. 11. С. 515–532.

[62] Заметим, что в русском переводе Кольмана содержатся неточности.

[63] То есть континуум.

[64] *Больцано*. Чисто аналитическое доказательство... С. 188–189.

[65] Идеи Больцано стали широко известны в Германии благодаря Г. Ганкелю, опубликовавшему в 1870 г. в Тюбингене упомянутую работу Больцано и популяризировавшего другие его работы. Интересна также работа О. Штольца о Больцано (*Stolz, O. B.* Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung // Mathematische Annalen. 1881. Bd. 18. S. 255–279). Коши был лично знаком с Больцано и использовал его идеи в своих работах (см.: *Синкевич Г. И.* К истории эпсилонтики // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 149–166).

[66] *Cauchy, A.* Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique. Paris: L'Imprimerie royale, 1821.

[67] *Cauchy, A.* Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique // *Cauchy, A.* Oeuvres complètes. Paris: Gauthiers-Villars et fils, 1897. Sér. 2. T. 3.

[68] *Синкевич*. К истории эпсилонтики...

[69] *Cauchy*. Cours d'analyse... 1897... P. 43.

Коши не упоминает имени Ролля, хотя уделяет внимание приближенному решению алгебраических уравнений. В главе о решении уравнений он приводит следующую теорему:

> Пусть функция $f(x)$ действительной переменной x непрерывна между пределами $x = x_0$, $x = X$. Если $f(x_0)$ и $f(X)$ имеют противоположные знаки, то уравнению $f(x) = 0$ может удовлетворять по крайней мере одно или несколько (нечетное количество) действительных значений x, расположенных между x_0 и X[70].

Коши доказывает эту теорему, используя деление отрезка пополам, но, в отличие от Больцано, не пользуется понятием верхней грани, а опирается на сходящиеся последовательности.

Что очень важно для анализа, Коши формулирует теорему о среднем значении как свойство непрерывной функции:

> *Теорема о непрерывной функции.* Если $f(x)$ – непрерывная функция переменной x между пределами $x = x_0$, $x = X$ и число b расположено между $f(x_0)$ и $f(X)$, то уравнение $f(x) = b$ всегда имеет решение, расположенное между x_0 и X[71].

Коши приводит несколько методов решения алгебраических уравнений, в том числе метод Декарта, сравнивает методы Ньютона и Лагранжа на примере решения одного и того же кубического уравнения, но ничего не говорит о разделении корней уравнения корнями производной.

1834 г. Теорема Ролля у М. В. Дробиша

В 1834 г. профессор Лейпцигского университета М. В. Дробиш опубликовал «Лекции по уравнениям высших порядков»[72], где в § 107[73] рассказывает о методе каскадов Ролля. Он сетует на сложное изложение Ролля, но называет его метод достойным уважения, обосновывает и излагает его так:

> Эти теоремы (правила) получены в незавершенном виде в предложенном проекте Ролля, притом практически крайне затруднительном для понимания методе каскадов. В нем есть существенное зерно, что для решения исходного уравнения друг за другом формируются производные уравнения, что похоже на строительство дома таким методом. Таким образом, мы последовательно получаем корни уравнений низшего порядка, которые дают нам достоверные пределы корней уравнений высшего порядка и которые мы вычисляем приближенно, что изложим позже, вплоть до корней исходного уравнения. Этот метод основан на предположении, что исходное уравнение вообще имеет корни. Это обусловливает его ограниченность и непрактичную громоздкость, вместо поиска более прямого пути[74].

---

[70] Ibid. P. 378.

[71] Ibid. P. 50.

[72] *Drobisch*, M. W. Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen. Leipzig: Leopold Voss, 1834.

[73] Ibid. S. 161.

[74] Ibid. S. 186–188.

Дробиш цитирует теорему о корневом интервале из курса Коши и его теорему о среднем значении в седьмой главе «Альтернативный метод распознавания действительных и мнимых корней» [75]. Он приводит теорему: «Два близлежащих действительных корня разделены корнем производной уравнения, корни которой в свою очередь разделяются корнями следующей производной» [76]. Далее Дробиш рассматривает частные случаи этой теоремы.

Теорема 1. Между двумя ближними действительными корнями исходного уравнения лежит по крайней мере один действительный корень производной; однако между ними также может находиться 3, 5, и т. д. вообще любое нечетное количество корней. Теорема 2. Между двумя ближними действительными корнями производного уравнения лежит не более одного корня первоначального уравнения, однако также может быть, что между ними совсем нет корней. Теорема 3. Не менее чем один действительный корень исходного уравнения может быть больше, чем наибольший действительный корень производного уравнения; не более чем один действительный корень первоначального уравнения меньше, чем наименьший корень производного уравнения; однако может быть, что нет никакого действительного корня исходного уравнения больше большего корня и меньше меньшего корня производного уравнения. В этом последнем выводе мы соединили две половины второго следствия, т. е. наибольший корень исходного уравнения может лежать между первым и вторым или между вторым и третьим, третьим и четвертым и т. д. корнем производного уравнения [77] (к теоремам имеется примечание Дробиша: «Изложено в соответствии с *Lagrange's Résolution de l'équat. Numér. Not. VIII*, возможно первого изобретателя того и другого из вышеупомянутых тезисов, опирающихся на достойное уважения правило Ролля»).

Алгебраический аспект теоремы Ролля в решении уравнений привлек также внимание итальянского математика Дж. Беллавитиса, описавшего метод Ролля в своей книге «Простой способ нахождения действительных корней алгебраических уравнений и новый метод определения мнимых корней» [78].

Другие имена

В глубоком исследовании Дж. Барроу-Грин [79] по истории метода каскадов подчеркнута алгебраическая сторона вопроса, упомянуты работы О. Герли (*O. Gherli*, 1771), Ф. Муано (*F. Moino*, 1840), О. Теркема (*O. Terquem*, 1844), Х. Кокса (*H. Cox*, 1851), Ж. Лиувилля (*J. Liouville*, 1864), Ж. Серра (*J. Serre*, 1868), П.-О. Бонне (*P.-O. Bonnet*, 1868), но не выделена роль теорем Ролля в анализе (т. е. линия Больцано – Коши – Кантор).

[75] Ibid. S. 161–176.

[76] Ibid. S. 176.

[77] Ibid. S. 178–179.

[78] *Bellavitis, G.* Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebraiche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie memoria. Venezia: Presso la segreteria dell'Instituto nel palazzo ducale, 1846.

[79] *Barrow-Green, J.* From Cascades to Calculus: Rolle's Theorem // The Oxford Handbook of the History of Mathematics / E. Robson, J. Stedall (eds.). Oxford: Oxford University Press, 2009. P. 737–754.

1861 г. Теорема Ролля у К. Вейерштрасса

Представление о непрерывных функциях резко изменилось в середине XIX в. с появлением новых математических объектов, необходимостью классифицировать точки разрыва и оценивать объем этого понятия и возможность пренебрегать ими при разложении функций в ряды Фурье. Определение непрерывной функции на языке «$\varepsilon - \delta$» ввел К. Вейерштрасс в 1861 г. [80], развитие концепции непрерывности было продолжено в работах Э. Гейне [81], Р. Дедекинда и Г. Кантора [82] в 1870-х гг.

В летнем семестре (май – июнь) 1861 г. Вейерштрасс читал курс лекций по дифференциальному исчислению в Королевском торговом институте Берлина. Г. Шварц сохранил конспект этих лекций, опубликованный П. Дюгаком [83].

Вейерштрасс определяет непрерывные функции, выводит их свойства.

> Если $f(x)$ есть функция x и x – определенное значение, то при переходе x в $x + h$ функция переменится и будет $f(x + h)$; разность $f(x + h) - f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x + h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению еще меньших, чем δ, $f(x + h) - f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если ее абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствует бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – *непрерывная функция* (курсив в оригинале. – *Г. С.*) аргумента или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом [84].

Под заголовком «Исследование хода функций» приводится следующая теорема:

> *Если для двух определенных значений x_1 и x_2 аргумента $f(x_1) = f(x_2)$, то между x_1 и x_2 обязательно имеется по меньшей мере одно значение x_0, для которого первая производная $f\,(x)$ равна нулю* (курсив в оригинале. – *Г. С.*) [85].

---

[80] *Синкевич*. К истории эпсилонтики...

[81] *Синкевич Г. И.* Генрих Эдуард Гейне. Теория функций // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Вып. 18 / Ред. Б. Г. Вагер. СПб.: СПбГАСУ, 2012. С. 6–26; *Гейне Э. Г.* Лекции по теории функций / Пер. и прим. Г. И. Синкевич // Там же. С. 26–46.

[82] *Синкевич Г. И.* Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора // Труды XI Международных Колмогоровских чтений / Гл. ред. В. В. Афанасьев. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013. С. 336–347.

[83] *Dugac, P.* Eléments d'analyse de Karl Weierstrass // Archive for History of Exact Sciences. 1973. Vol. 10. No. 1– 2. P. 41–176.

[84] Хрестоматия по истории математики. Математический анализ / Ред. А. П. Юшкевич. М.: Просвещение, 1977. С. 189.

[85] Там же. С. 192.

Как полагает А. П. Юшкевич, «это первая или одна из первых формулировок так называемой “теоремы Ролля”» [86].

Позже, в 1886 г., Вейерштрасс, анализируя расширение понятия функции, писал, что сначала рассматривались только функции, представленные рациональным числовым выражением, например, рядом с рациональными коэффициентами.

> Они изменялись по закону непрерывности, и тем исчерпывалось все наше понятие о функции. Но открытие рядов Фурье показало, что это не так, существуют непрерывные функции, которые не могут быть получены прежним способом задания. Для строго определенной непрерывной функции всегда можно найти математическое выражение. Благодаря этому можно вывести свойства любой функции из основных понятий непрерывности, так как в любом научном исследовании важно извлекать из основных понятий дальнейшие последующие [87].

Теорема о корневом промежутке, теорема о среднем значении, теорема о корне производной приобрели статус теорем, описывающих свойства непрерывных функций. Если во времена Коши таковых свойств было около четырех, то у Дини их уже одиннадцать.

1878 г. Теорема Ролля у У. Дини

В 1878 г. вышел «Курс лекций по теории функций действительного переменного» [88] профессора Пизанского университета У. Дини. В этом курсе впервые вводится определение непрерывной функции через односторонние пределы. Теорема Ролля, без указания его имени, сформулирована так:

> Если в интервале (α, β) функция $f(x)$ конечна и непрерывна и во всех точках, кроме краев интервала, имеет конечную и определенную либо бесконечную и определенную производную и, кроме того, в крайних точках a и b принимает одинаковые значения, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка x', для которой $f'(x') = 0$ [89].

1879 г. Теорема Ролля у Г. Кантора

В период с 1874 по 1884 г. Кантор написал свои основные статьи по теории множеств [90]. В 1872 г. он создает свою теорию вещественных чисел, в 1874 г. доказывает счетность множества алгебраических чисел, в 1878 г. формирует

---

[86] Там же. С. 193.

[87] *Weierstrass, K.* Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86 / R. Siegmund-Schultze (Hrsg.) // Teubner-Archiv zur Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner, 1988. Bd. 9. S. 21.

[88] *Dini, U.* Fondamenti per la theorica delle funzioni di variabili reali. Pisa: Tip. T. Nistri, 1878.

[89] Ibid. P. 76–77.

[90] Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.

понятие мощности и рассматривает проблему сравнения по мощности непрерывных многообразий любого числа измерений, получив парадоксальный вывод, что все они имеют одинаковую мощность и эквивалентны единичному отрезку. «Я вижу, но не верю», – писал Кантор Дедекинду. Кантор приходит к выводу, что понятие размерности должно опираться на взаимно непрерывное отображение многообразий друг на друга.

В 1879 г. Кантор сделал попытку доказать теорему о том, что два непрерывных многообразия M_{μ} и M_{ν} разных порядков μ и ν, где $\mu < \nu$, нельзя отобразить друг на друга непрерывно и двусторонне однозначно. Кантор использовал для доказательства теорему Ролля о корневом интервале. Примечательно, что Кантор ссылается на «Курс анализа» Коши 1821 г., но схема его рассуждения близка интерпретации Больцано 1817 г. Эта попытка доказательства изложена Кантором в статье «Об одной теореме из теории непрерывных многообразий» (*Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*) [91]. Его доказательство не было полным [92]. Однако теорема о корневом интервале приобретает у него фундаментальный смысл для понятий непрерывности и размерности.

1886 г. К. Вейерштрасс и обоснование непрерывности

В летнем семестре 1886 г. (май – июнь) К. Вейерштрасс читал лекции по обоснованию теории аналитических функций. На основе понятия предельной точки Вейерштрасс развивает понятие точной верхней грани [93], используя теорему о корневом интервале. На ее основе он вводит понятие связности: «...исходя из любой точки континуума, мы всегда в нем и останемся» [94].

К названным теоремам обращались многие математики XIX в., во многих случаях их анализ был весьма интересен. К сожалению, за пределами этой статьи остались работы Г. Ганкеля и многих других.

Заключение

Анализ алгебраического уравнения привел к формулировке двух фундаментальных положений теории функций – теоремы о корневом промежутке и теоремы о корне производной – и созданию теоремы о среднем значении. Теорема о корневом промежутке в русской литературе у разных авторов названа и второй теоремой Ролля (О. С. Шатуновский [95]) и теоремой Больцано – Коши (ученик Шатуновского Г. М. Фихтенгольц [96]). Теорема о среднем значении называется второй теоремой Больцано – Коши [97].

---

[91] Там же. С. 36–39.

[92] Первое удовлетворительное доказательство общей теоремы, что многообразия различного числа измерений нельзя отобразить друг на друга одновременно взаимно однозначно и взаимно непрерывно дал Л. Э. Я. Брауэр в статье: *Brouwer, L. E. J.* Beweis der Invarianz der Dimensionzahl / /Mathematische Annalen. 1911. Bd. 70. S. 161–165.

[93] При этом Вейерштрасс использует методы вариационного исчисления.

[94] *Weierstrass*. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre... S. 70.

[95] *Шатуновский О. С.* Введение в анализ. Одесса, 1923. С. 121–122.

[96] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. 6 изд. М.: Наука, 1968. Т. 1. С. 128.

[97] Там же. С. 131.

За триста лет сформировалась одна из самых фундаментальных теорем анализа, имеющая не только большое методологическое, но и прикладное значение, например, в дифференциальной геометрии, функциональном анализе, механике. Н. Н. Лузин с ее помощью доказывал теорему о соприкасающемся круге и теорему о центре кривизны [98]. В западной историко-математической литературе прежде всего рассматривается ее алгебраический аспект [99]. Первоначально предназначенная для многочленов, теорема Ролля была распространена на непрерывные функции, обогатив их свойства. Н. Н. Лузин говорил, что «эта теорема лежит в основании теоретического развития дифференциального и интегрального исчисления» [100].

References

A Second Letter from Mr. Colin McLaurin [...] Concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of Other Rules in Algebra (1729), *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, vol. 36, pp. 59–96.

Barrow-Green, J. (2009) From Cascades to Calculus: Rolle's Theorem, in: Robson, E. and Stedall, J. (eds.) *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, pp. 737–754.

Bellavitis, G. (1846) *Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebraiche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie memoria*. Venezia: Presso la segreteria dell'Instituto nel palazzo ducale.

Bolzano, B. (1817) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prag: Gottlieb Haase.

Bolzano, B. (1955) Chisto analiticheskoe dokazatel'stvo teoremy, chto mezhdu liubymi dvumia znacheniiami, daiushchimi rezul'taty protivopolozhnogo znaka, lezhit po men'shei mere odin veshchestvennyi koren' uravneniia [Purely Analytic Proof of the Theorem That Between Any Two Values Which Give Results of Opposite Sign, There Lies at Least One Real Root of the Equation], in: Kolman, E. *Bernard Boltsano*. Moskva: Izdatel'stvo AN SSSR, pp. 170–204.

Campbell, G. (1727/28) A Method for Determining the Number of Impossible Roots in Adfected Aequations, *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, vol. 35, pp. 515–531.

Cantor, G. 1985. *Trudy po teorii mnozhestv [The Works on Set Theory]*. Moskva: Nauka.

Cauchy, A. (1821) *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique*. Paris: L'Imprimerie royale.

Cauchy, A. (1897) Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique, in: Cauchy, A. *Oeuvres complètes*. Paris: Gauthiers-Villars et fils, 1897, sér. 2, vol. 3.

Clairaut, A. C. (1746) *Élémens d'algèbre.* Paris: Les frères Guerin.

Dini, U. (1878) *Fondamenti per la theorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa: Tip. T. Nistri.

Drobisch, M. W. (1834) *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen.* Leipzig: Leopold Voss.

Dugac, P. (1973) Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, 1973, vol. 10, no. 1– 2, p. 41–176.

Euler, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis*. Petropolis: Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana.

Euler, L. (1949) *Differentsial'noe ischislenie [Differential Calculus]*. Moskva and Leningrad: Gostekhteorizdat.

[98] *Лузин Н. Н.* Дифференциальное исчисление. М.: Советская наука, 1946. С. 317.

[99] *Barrow-Green*. From Cascades to Calculus…, а также: *Shain, J.* The Method of Cascades // American Mathematical Monthly. 1937. Vol. 44. P. 24–29.

[100] *Лузин*. Дифференциальное исчисление... С. 317.

Fikhtengolts, G. (1968) *Osnovy matematicheskogo analiza. 6 izd. [The Foundations of Analysis, 6th ed.]*. Moskva: Nauka.

Fontenelle, B. (1719) Eloge de M. Rolle, in: Histoire de l'Académie royale des sciences. Paris: L'Imprimerie royale, p. 94–100.

Heine, H. E. (2012) Lektsii po teorii funktsii [The Lectures on the Theory of Functions] in: Vager, B. G. (ed.) *Matematicheskoe modelirovaniie, chislennye metody i kompleksy program [Mathematical Modelling, Calculus of Approximations and Program Systems]*. Sankt-Peterburg: SPbGASU, no. 18, pp. 26–46.

Kästner, A. G. (1758–1769) *Die mathematischen Anfangsgründe (4 Th. 7 Bd.)*. Göttingen: Witwe Vandenhoeck.

Kästner, A. G. (1794) *Angfangsgründe der Analysis endlicher Grössen*. Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht.

l'Hôpital, G. F., de (1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: L'Imprimerie royale.

l'Hôpital, G. F., de (1935) *Analiz beskonechno malykh [Infinitesimal Analysis]*. Moskva and Leningrad: Gostekhteorizdat.

Lacroix, S. F. (1811) *Anfangsgründe der Algebra.* Mainz: Kupferberg.

Lacroix, S. F. (1830) *Élémens d'algèbre, à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations. 15 ed.* Bruxelles: H. Remy.

Lagrange, J.-L. (1879) Traité de la resolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques, in: Lagrange, J.-L. *Oeuvres complètes.* Paris: Gauthier-Villars, vol. 8, pp. 11–367.

Luzin, N. N. (1946) *Differentsialnoe ischislenie [Differential Calculus]*. Moskva: Sovetskaia nauka.

Mordukhai-Boltovskoi, D. D. (1952) Iz proshlogo analiticheskoi geometrii [From the Past of Analytical Geometry], in: *Trudy Instituta istorii estestvoznaniia*, vol. 4, pp. 217–235.

Newton, I. (1707) *Arithmetica universalis; sive De compositione et resolutione arithmetica liber*. Cantabrigia: Typus academicis.

Newton, I. (1711) De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, in: Newton, I. *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. Londinium: Ex officina Pearsoniana.

Newton, I. (1736) *The Method of Fluxions and Infinite Series; with Its Application to the Geometry of Curve-Lines*. London: Henry Woodfall.

Newton, I. (1948). *Vseobshchaia arifmetika, ili kniga ob arifmeticheskom sinteze i analize [Universal Arithmetic; Or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution]*. Moskva: Nauka.

Raphson, J. (1702) *Analysis aequationum universalis.* 2nd ed. Londinium.

Reyneau, Ch.-R. (1708) A*nalyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques. 2 vols.* Paris: J. Quillau.

Rolle, M. (1690) *Traité d'algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique.* Paris: Estienne Michallet.

Rolle, M. (1691) *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés*. Paris: Jean Cusson.

Rösling, Ch. L. (1805) *Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen*. Erlangen: J. J. Palm.

Rykhlik, K. (1958) Teoriia veshchestvennykh chisel v rukopisnom nasledii Boltsano [Theory of Real Numbers in Bolzano's Manuscripts], *Istoriko-matematicheskie issledovaniia*, vol. 11, pp. 515–532.

Shain, J. (1937) The Method of Cascades, *American Mathematical Monthly*, vol. 44, pp. 24–29.

Shatunovskii, O. (1923) *Vvedenie v analiz [Introduction to Analysis]*. Odessa: Mathesis.

Simpson, T. (1740) *Essays on Several Curious and Useful Subjects, in Speculative and Mix'd Mathematicks.* London: Henry Woodfall.

Sinkevich G. I. (2012). Genrikh Eduard Geine. Teoriia funktsii [Heinrich Eduard Heine. Function Theory], in: Vager, B. G. (ed.) *Matematicheskoe modelirovaniie, chislennye metody i kompleksy programm [Mathematical Modelling, Calculus of Approximations and Program Systems]*. Sankt-Peterburg: SPbGASU, no. 18, pp. 6–26.

Sinkevich, G. I. (2012). K istorii epsilontiki [On the History of Epsilontics], *Matematika v vysshem obrazovanii*, no. 10, pp. 149–166.

Sinkevich, G. I. (2013) Poniatie nepreryvnosti u Dedekinda i Kantora [A Notion of Continuity in Dedekind's and Cantor's Works], in: Afanasiev V. V. (ed.) *Trudy XI Mezhdunarodnykh Kolmogorovskikh chtenii*. Iaroslavl': IaSPU, pp. 336–347.

Sinkiewich, G. I. (2013) Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznei: M. Rolle, B. Bolzano, A. Cauchy, in: Więsław, W. (ed.) *Dzieje matematyki polskiej II.* Wrocław: Sowa, pp. 165–181.

Stolz, O. B. (1881) Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, *Mathematische Annalen*, vol. 18, pp. 255–279.

Wallis, J. (1685) *A Treatise of Algebra, Both Historical and Practical: Shewing the Original, Progress, and Advancement Thereof, from Time to Time, and by What Steps It Hath Attained to the Heighth at Which Now It Is; With Some Additional Treatises*. London; Oxford: John Playford.

Weierstrass, K. (1988) Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86, in: Siegmund-Schultze, R. (ed.) *Teubner-Archiv zur Mathematik*. Leipzig: B. G. Teubner, vol. 9.

Yanovskaya, S. (1947) Michel' Roll' kak kritik analiza beskonechno malykh [Michel Rolle as a Critic of Infinitesimal Analysis], *Trudy instituta istorii estestvoznaniia*, vol. 1, pp. 327–346.

Yushkevich, A. (ed.) (1977) *Khrestomatiia po istorii matematiki. Matematicheskii analiz [Reading Book on the History of Mathematics. Analysis]*. Moskva: Prosveshcheniie.