О. Б. ШЕЙНИН

СОЗВЕДИЕ ГОДОВЩИН
(из истории теории вероятностей)

2012–2013 годы стали юбилейными для многих важных событий в истории теории вероятностей. В 1662 г. вышли «Наблюдения» Дж. Граунта, в 1712 г. – работа Дж. Арбунтота и важный мемуар А. Муавра, годом позже – «Искусство предположений» Я. Бернулли, в 1812 г. – «Аналитическая теория вероятностей» П. С. Лапласа. С Граунта началась статистика населения и медицинская статистика, Лаплас же подытожил достижения предшественников и свои собственные результаты. Мы описываем соответствующие классические сочинения; более подробно о них сказано в нашей монографии.

Ключевые слова: Дж. Граунт, Дж. Арбутнот, Н. Бернулли, Я. Бернулли, А. Муавр, П. С. Лаплас, история теории вероятностей.

2012–2013 годы стали юбилейными для многих важных событий в истории теории вероятностей. Прежде всего это касается выхода трудов, которые послужили фундаментом для этой дисциплины или оказали большое влияние на ее развитие. Цель данной статьи – кратко напомнить, в чем состояла ценность соответствующих классических сочинений. Читателя, желающего больших подробностей, мы отправляем к нашей монографии [1].

Джон Граунт (1620–1674) в 1662 г. опубликовал свои «Наблюдения» [2], которые неоднократно переиздавались и были переведены на несколько языков. Граунта и в меньшей степени Уильяма Петти можно назвать зачинателями статистики населения, Граунта же кроме того – и пионером медицинской статистики.

Граунт изучил лондонские бюллетени о смертности, которые начали появляться в XVI в. и регулярно публиковались с начала XVII в., в основном чтобы предупреждать о надвигавшихся эпидемиях чумы. Исходные данные в этих бюллетенях были ненадежны и неполны, но Граунт сумел оценить население Англии и Лондона, установил, вопреки распространенному мнению, что численности мужчин и женщин примерно равны, составил первую таблицу дожития, изучил смертность от различных заболеваний. Всего этого он достиг опираясь на здравый смысл и доверяя устойчивости статистических

---

[1] *Шейнин О. Б.* Теория вероятностей. Исторический очерк. Берлин, 2013 (см.: *http://www. sheynin de,* документ № 11).

[2] *Граунт Дж.* Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности // *Граунт Дж., Галлей Э.* Начала статистики населения, медицинской статистики, математики страхового дела. Берлин, 2005. С. 5–105 (см.: *http://www.sheynin.de*, документ № 13). Впервые опубликовано в 1662 г. на английском языке.

отношений, математической же основой служила лишь коммерческая арифметика.

Граунт во многом ошибался. Его таблицей дожития нельзя было бы пользоваться на практике, и он считал, что население растет в арифметической прогрессии, а не в геометрической, как выяснили лишь в середине XVIII в. И. П. Зюсмильх и Л. Эйлер.

Современники Граунта и позднейшие авторы единодушно отзывались о нем самым положительным образом. Гюйгенс заявил, что

> Трактат Гранта (так в оригинале. – *О. Ш.*) действительно заслуживает внимания, и он мне очень нравится. Грант рассуждает разумно и ясно. Я восхищаюсь тем, что он смог установить все свои выводы, исходя из этих простых наблюдений, которые прежде казались бесполезными [3].

Сравнительно недавно А. Хальд, крупный статистик и историк статистики, так отозвался о Граунте:

> Граунт незабываем в основном потому, что он обнаружил […] равномерность и предсказуемость многих биологических явлений в массе […]. Поэтому именно он оказался основателем статистики [4].

Исходя из таблицы Граунта, Гюйгенс ввел понятие о вероятном сроке жизни (хотя и не сам термин) и нарисовал непрерывную кривую функции

$$y = 1 - F(x),\ \ 0 \leq x \leq 100 \text{ лет},$$

проходящей через эмпирические точки таблицы Граунта [5]. Здесь $F(x)$ фактически была неустановленной функцией распределения. Такие функции были введены в теорию вероятностей лишь в конце XIX в.

Джон Арбутнот (1667–1735) собрал данные о рождениях (точнее, крещениях) в Лондоне за 1629–1710 гг. [6] Он заметил, что в течение этих 82 лет ежегодно рождалось больше мальчиков (m) чем девочек (f) и объявил этот факт «следствием Божественного провидения, действующего для доброй цели, а не результатом случая». Он пояснил, что мальчики и мужчины, «как нас убеждает опыт», подвергаются бóльшим опасностям, чем девочки и женщины, так что их смертность выше. Даже не принимая во внимание ни «неизменное соотношение» $m : f$, ни «неизменные границы» разности $(m - f)$, «значение ожидания» подобных статистических данных, как он заявил, было менее $1/2^{82}$.

---

[3] № 1022. Christiaan Huygens à R. Moray. 9 juin 1662 // *Huygens, Ch.* Œuvres complètes. La Haye, 1891. T. 4. P. 149.

[4] *Hald, A.* History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750. New York, 2001. P. 89.

[5] *Huygens, Ch.* № 1777. Christiaan Huygens. Appendice I au No. 1776. 21 Novembre 1669 // *Huygens, Ch.* Œuvres complètes. La Haye, 1895. T. 6. P. 530–532.

[6] *Arbuthnot, J.* An Argument for Divine Providence Taken from the Constant Regularity Observed in the Birth of Both Sexes // Philosophical Transactions of the Royal Society. 1712 for 1710. Vol. 27. P. 186–190. Перепечатано в: Studies in the History of Statistics and Probability / M. G. Kendall, R. L. Plackett (eds.). London. 1977. Vol. 2. P. 30–34.

Арбутнот не смог установить, что рождения подчинялись биномиальному распределению (оно только начало вводиться в теорию вероятностей), которое гораздо убедительнее, чем неравенство $m > f$, выявило бы Божественное провидение, и, конечно же, не попытался оценить его параметр, примерно равный 18 : 17, как следовало из его данных [7].

Далее, он не учел, что крещения не равнозначны рождениям [8], что христиане быть может как-то отличались от иных лиц, и что Лондон быть может являлся исключением. Наконец, Арбутнот не исследовал границ разности $(m - f)$ и не имел сведений о сравнительной смертности мужчин и женщин. Тем не менее А. Муавр и Николай Бернулли (см. ниже), а также Э. Шусмит [9], А. Хальд [10] и Г. Дэвид и Э. Эдвардс [11] заметили его выводы и продолжали изучать соотношение мужских и женских рождений, а Г. Фрейденталь [12] даже назвал Арбутнота автором первой публикации по математической статистике.

Д. Беллхауз [13] описал рукопись Арбутнота, написанную, видимо, в 1694 г., в которой исследовалась игра в кости и которая в некоторой степени предвосхищала его заметку.

Якоб Бернулли (1654–1705) был крупнейшим ученым своего времени, математиком, механиком и физиком. В частности, до него теория вероятностей лишь подавала надежды, он же положил начало ее классическому будущему и ее приложениям. Уже в своем «Дневнике» [14] 1684–1690 гг. Бернулли исследовал азартные игры, гражданское право, а в нескольких рассуждениях применил статистическую вероятность (а не обычное для того времени сравнение шансов) и привел выходные данные рецензии на сочинение Граунта, а в статье [15] сослался на эту рецензию и применил результаты Граунта при решении одной задачи. Наконец, в том же «Дневнике» мы находим наброски доказательства его знаменитой теоремы.

---

[7] В начале гл. 12 Граунт (см. Прим. 2) сообщил, что в одном провинциальном приходе за 90 лет, 1569−1658 гг., соотношение рождений равнялось 16 : 15 (= 1,067), в Лондоне же 14 : 13 (= 1,077), но соответствующих лет он не привел. По Арбутноту, 18 : 17 = 1,059. Кроме того, в начале гл. 8 Граунт указал, что с 1628 по 1662 г. в Лондоне родились 139 782 мальчиков и 130 866 девочек (соотношение, равное 1,068). Но у Арбутнота даже с 1629 по 1662 г. количества рождений оказались равными 145 288 и 134 689 (соотношение 1,079).

[8] Граунт (конец гл. 3) заявил, что в 1650−1660 гг. менее половины общего населения полагали, что крещение необходимо.

[9] *Shoesmith, E.* The Continental Controversy over Arbuthnot’s Argument for Divine Providence // Historia Mathematica. 1987. Vol. 14. P. 133–146.

[10] *Hald.* History of Probability and Statistics… P. 279–280.

[11] *David, H. A., Edwards, A. W. F.* Annotated Readings in the History of Statistics. New York, 2001. P. 7–12.

[12] *Freudenthal, H.* 250 years of Mathematical Statistics // Quantitative Methods in Pharmacology / H. de Jonge (ed.). Amsterdam, 1961. P. xi.

[13] *Bellhouse, D. R.* A Manuscript on Chance Written by J. Arbuthnot // International Statistical Review. 1989. Vol. 57. P. 249–259.

[14] *Bernoulli, J.* Meditationes // Die Werke von Jakob Bernoulli / B. L. van der Waerden (Hrsg.). Basel. 1975. Bd. 3. S. 21–92.

[15] *Bernoulli, J.* Theses logicae de conversione et oppositione enunciatorium (1686) // Die Werke von Jakob Bernoulli. Basel, 1969. Bd. 1. S. 275–284.

Основное сочинение Бернулли, «Искусство предположений» (ИП) [16], появилось лишь посмертно, в 1713 г. Закончить его автор явно не успел; в нем нет обещанного приложения «предшествующего учения в гражданских, моральных и экономических делах».

Первые три части ИП содержат важные исследования, хоть некоторые решенные задачи и не вписываются в общий контекст. Первая часть является комментарием, правда интересным, к трактату Гюйгенса 1657 г. [17], а не изложением собственных мыслей. Вторая часть посвящена комбинаторике, и в ней в связи с суммированием одинаковых степеней последовательных натуральных чисел Бернулли ввел «числа Бернулли». В дальнейшем они были включены в несколько важнейших формул, через них выражаются суммы многих бесконечных рядов, и они же появились в интегральном исчислении. На основании этой части автор решил ряд задач на жеребьевки и азартные игры в следующей третьей части.

В последней четвертой части Бернулли доказал свою основную теорему: изучаемое событие появляется с постоянной вероятностью p в большом числе n независимых испытаний и наступило μ раз, так что μ/n – статистическая вероятность события. Бернулли доказал, что с возрастанием n эта вероятность стремится к p, так что разность $|\mu/n - p|$ можно сколько угодно уменьшить, требуется лишь достаточно увеличить n. Это означает, как заметил Бернулли, что (в рамках его схемы) статистическая вероятность не хуже теоретической. Кроме того, он оценил скорость сходимости первой вероятности ко второй, т. е. указал, насколько следовало увеличить n, чтобы добиться заданной малости расхождения между ними.

Только и всего? Так ведь, казалось бы, скучная, но достойная цель теории вероятностей – определять вероятности событий по заданным вероятностям иных событий, но где же отыскивать эти исходные данные? Если не подсчитывать вероятности, скажем, выпадения двойной шестерки при броске двух игральных костей и вообще отойти от азартных игр, то исходные теоретические вероятности исчезают, и их приходится заменять статистическими вероятностями, что сам Бернулли и заявил (см. ниже). Здесь, кстати, кроется значение не вполне признанной мизесовской теории, в которой статистическая вероятность признается первичной основой.

---

[16] *Bernoulli, J.* Ars Conjectandi (1713) // Werke von Jakob Bernoulli… Bd. 3. P. 107–259. Немецкий модернизированный перевод: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi) von Jakob Bernoulli (1713) / R. Haussner (Übers., Hrsg.). Leipzig, 1899. Перепечатка: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi) von Jakob Bernoulli (1713) / R. Haussner (Übers., Hrsg.). Thun; Frankfurt am Main, 1999. Русский перевод четвертой части ИП см.: *Бернулли Я.* Искусство предположений. Часть четвертая // *Бернулли Я.* О законе больших чисел / Ред. Ю. В. Прохоров. М, 1986. С. 23–59. Английский перевод четвертой части ИП см.: *Bernoulli, J.* On the law of large numbers / O. B. Sheynin (transl.). Berlin, 2005 (см.: *http://www.sheynin.de*, документ № 8). Английский перевод 2006 г. всего ИП негоден, см. нашу рецензию: *Шейнин О. Б.* Bernoulli, Jacob. The Art of Conjecturing together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis. Translated with an introduction and notes by E. D. Sylla. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2006. 430 + xx p. // ВИЕТ. 2007. № 1. С. 178–180.

[17] *Huygens, Ch.* Van rekeningh in spelen val geluck. De calcul dans les jeux de hazard // *Huygens, Ch.* Œuvres complètes. La Haye, 1920. T. 14. P. 44–91.

Есть в доказанной теореме и слабости. Во-первых, независимость испытаний Бернулли не оговорил (хотя, наверное, представлял ее себе в «физическом» смысле), ее ввел только Муавр. Во-вторых, условия теоремы были стеснительны; гораздо позже, в 1837 г., С. Д. Пуассон подчеркивал, что следует учитывать часто происходящие изменения вероятности события во время испытаний. Именно он расширил (даже слишком) эти условия и ввел свой «закон больших чисел» (ЗБЧ), равно как и этот термин, так что теорема Бернулли оказалась частным случаем этого закона. Еще более, по сравнению с допустимыми условиями у Пуассона, расширил условия ЗБЧ П. Л. Чебышев.

В третьих, Бернулли слишком преуменьшил скорость сходимости статистической вероятности к теоретической, в основном, правда, потому, что в то время не была еще известна формула Стирлинга (а точнее, формула Стирлинга – Муавра) для приближенного вычисления факториалов, т.е. произведений последовательности натуральных чисел от 1 до некоторого *n*. Марков [18] показал, что Бернулли все же мог бы правильнее оценить скорость сходимости, а затем, в другом месте того же сочинения, вдруг повторил свое исследование уже с применением формулы Стирлинга. Чуть позже подобное исследование с применением той же формулы и примерно с тем же результатом опубликовал К. Пирсон [19], но добавил непонятный комментарий: теорема Бернулли, мол, практически непригодна (это верно) и ее можно сравнить с ошибочной птолемеевой системой мира. Ничего ошибочного у Бернулли не было, Пирсон же явно недооценивал значение теорем существования (в данном случае существования практически приемлемого предела статистической вероятности). Такого же типа была теорема Гаусса о существовании хотя бы одного корня у каждого алгебраического уравнения (а потому *n* корней у уравнений *n*-й степени), названная основной теоремой алгебры.

Менее известны предварительные рассуждения Бернулли в четвертой главе той же части. В ней он привел несколько примеров, в которых вероятность события (быть может и не существующая) могла быть установлена (оценена) только статистически, в мизесовском духе. Таким образом, Бернулли хотел установить не доказанную им теорему, а обратный ЗБЧ. Но ни он, ни позднее Муавр не заметили, что обратный закон не так точен, как прямой, и указал это только Т. Бейес [20]. Качественное пояснение, впрочем, весьма просто. И в прямой, и в обратной задаче известны результаты испытаний, но дополнительное сведение, а именно теоретическая вероятность события, указано только в прямой задаче. Поэтому для достижения той же точности обратной задачи требуется больше испытаний, чем в прямой.

Из остальных тем четвертой части ИП назовем лишь введение «неаддитивных» вероятностей. Так, некоторое событие может иметь вероятность 2/3, а противоположное – вероятность 3/4. Их качественная история восходит

[18] *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. М., 1924. С. 44–52.

[19] *Pearson, K.* James Bernoulli's Theorem // Biometrika. 1925. Vol. 17. P. 201–210.

[20] *Шейнин О. Б.* К истории теоремы Бейеса // Историко-математические исследования. 2007. Вып. 12 (47). С. 312–320.

к теории «пробабилизма», в соответствии с которой мнение каждого «отца церкви» считалось вероятным. В осторожной форме приложение неаддитивных вероятностей началось в середине XX в. [21]

Бернулли часто ссылался на А. Арно, основного автора «Искусства мыслить» [22]. Четвертая часть этой книги содержала рассуждения о моральной достоверности, которую Бернулли даже предлагал официально установить в судопроизводстве, и примеры применения апостериорных вероятностей. Само название ИП Бернулли возможно выбрал по аналогии с указанным авторитетным сочинением, и искусство предположений он, как можно понять, считал математической дисциплиной, основанной на вероятности как на мере достоверности и математическом ожидании (в первой части ИП), включающей явно еще не сформулированные теоремы сложения и умножения вероятностей и увенчанной его ЗБЧ.

Примерно двести лет прошло, прежде чем статистики начали всерьез применять ЗБЧ. Будучи в своем большинстве чужды математике, они, кажется, до середины XIX в. считали, что «национальный дух», «любовь к свободе» важнее чисел [23] и что, если на то пошло, ЗБЧ просто означает, что необходимо набирать побольше наблюдений. Переменные вероятности (и тем более отсутствие равновероятных случаев, т. е. теоретической вероятности) не признавались, ни о каких оценках расхождений между статистической и теоретической вероятностями и речи не было. Для внедрения математических методов понадобилось зарождение «континентального направления» статистики в конце XIX в. и особенно несколько позже – биометрической школы Пирсона.

В 1913 г. по инициативе А. А. Маркова Петербургская академия наук постановила перевести четвертую часть ИП и провести торжественное заседание, посвященное 200-летию ИП. Перевод Я. В. Успенского под редакцией Маркова появился в том же году, и тогда же прошло торжественное заседание. С докладами на нем выступили Марков (описание теоремы Бернулли), А. В. Васильев (состояние теории вероятностей до Бернулли) и А. А. Чупров (роль ЗБЧ в естествознании и обществоведении).

В 1986 г. вышла в свет брошюра Бернулли «О законе больших чисел» [24] с перепечаткой перевода Успенского и комментариями. Подобных мероприятий за рубежом, кажется, не было.

---

[21] *Shafer, G.* Non-additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert // Archive for History of Exact Sciences. 1978. Vol. 19. P. 309–370.

[22] *Арно А., Николь П.* Логика, или искусство мыслить. М., 1991. Впервые опубликовано в 1662 г. на французском языке.

[23] *Knies, C. G. A.* Die Statistik als selbstständige Wissenschaft. Kassel, 1850. P. 24. Упомянутая автором точка зрения утрированно отражала ограниченность математики количественными описаниями.

[24] *Бернулли Я.* О законе больших чисел / Ред. Ю. В. Прохоров. М, 1986. Содержит перепечатку выступления Маркова 1913 г. на торжественном заседании Петербургской академии наук (с. 9−16) и его же предисловия к изданию перевода четвертой части «Искусства предположений» (с. 19–20), далее перепечатку самого этого перевода (СПб, 1913), выполненного Я. В. Успенским, «Искусство предположений. Часть четвертая» (с. 23–59), затем комментарии О. Б. Шейнина (предшественники Бернулли и общая характеристика ИП), Ю. В. Прохорова (ЗБЧ у Бернулли и дальнейшие результаты) и А. П. Юшкевича (биография Бернулли).

Абрахам де Муавр (1667−1754) более всего известен своим доказательством 1733 г. предельной теоремы для биномиального распределения, к которой, по всей видимости, он пришел в связи с исследованием Арбутнота. Он сообщил о своем результате в кратком латинском мемуаре, разослав его своим друзьям и коллегам, а затем уже на английском языке, изложив его в последующих изданиях своего «Учения о случае» [25].

Но уже в 1712 г. Муавр опубликовал мемуар [26], оказавшийся зародышем этого сочинения. В нем он, а не Лаплас, ввел «классическое» определение вероятности, притом в общем виде, в котором отдельные случаи могли не быть равновозможными, и определение независимости событий, а также теорему умножения вероятностей. Биномиальное распределение появилось у Муавра и в случае, при котором одно из двух возможных событий было маловероятным (случай, рассмотренный впоследствии Пуассоном); он исследовал несколько вариантов разорения игрока в серии игр – классической задачи теории вероятностей – и применил так называемый метод включения и исключения для подсчета вероятности суммы перекрывающихся событий.

Николай Бернулли в 1709 г. опубликовал диссертацию [27] о приложении теории вероятностей к юриспруденции. В ней он предложил вероятностный критерий для объявления безвестно отсутствующего умершим, оценил ожидаемую потерю при игре в знаменитую генуэзскую лотерею и ожидаемый срок жизни последнего из заданной группы людей.

При решении последней указанной задачи Н. Бернулли исходил из непрерывного равномерного распределения смертности на конечном интервале (первого непрерывного распределения теории вероятностей), а его вывод соответствовал теории так называемых порядковых статистик математической статистики. Гюйгенс [28], можно заметить, ошибся при решении подобной же задачи.

Но вот К. Коли [29] указал на то, что Н. Бернулли внес в свою диссертацию куски текстов умершего Якоба Бернулли, притом даже из его «Дневника», не предназначавшегося для публикации.

Н. Бернулли не редактировал ИП, как то полагали некоторые авторы, но написал предисловие к нему, в котором впервые появился (на латинском языке) термин «исчисление вероятностей». В 1713 г. он написал несколько писем П. Р. Монмору, которые тот опубликовал во втором издании своей книги [30]. Наибольший интерес в них представляют две темы [31].

---

[25] *Moivre, A., de.* Doctrine of Chances. London, 1718, 1738, 1756. New York, 1967.

[26] *Moivre, A., de.* De mensura sortis or the measurement of chance // International Statistical Review. 1984. Vol. 52. P. 236–262. Комментарий: A. Hald. P. 229–236.

[27] *Bernoulli, N.* De usu artis conjectandi in jure. Basel, 1709. Перепечатка: Die Werke von Jakob Bernoulli… Bd. 3. S. 289–326. Перевод на английский язык см.: *http://www.cs.xu.edu/math/Sources/NBernoulli/de_usu_artis.pdf.*

[28] № 1781. Christiaan Huygens à [Lodewijk Huygens]. 28 novembre 1669 // *Huygens, Ch.* Œuvres complètes… T. 6. P. 537–539.

[29] *Kohli, K.* Kommentar zur Dissertation von N. Bernoulli // Die Werke von Jakob Bernoulli… Bd. 3. P. 541.

[30] *Montmort, P. R.* Essay d’analyse sur les jeux de hazard. Paris, 1708, 1713; New York, 1980.

[31] *Montmort, P. R.* Essay d’analyse sur les jeux de hazard. Paris, 1713. P. 388–394, 402 соответственно.

Во-первых, Н. Бернулли придумал «петербургскую игру», в которой математическое ожидание выигрыша одного из игроков оказывалось бесконечным, что полностью противоречило здравому смыслу. Неудивительно, что эта игра обсуждалась почти до наших дней и, например, Кондорсе заметил, что для вероятностного исследования необходима серия игр, а Даниил Бернулли [32] заменил математическое ожидание «моральным». Свой мемуар он опубликовал в Петербурге, отсюда и произошло название игры. Суть морального ожидания состояла в том, что ценность выигрыша в азартной игре убывает с ростом капитала победителя и это ожидание оказалось в петербургской игре конечным. В конце XIX в. оно послужило исходным понятием экономической теории предельной полезности.

Во-вторых, Н. Бернулли исследовал статистические данные Арбутнота, вывел локальную предельную теорему для биномиального распределения и косвенно ввел (не замеченный в то время) нормальный закон. Впрочем, в соответствующей формуле нехватало сомножителя $\sqrt{2/\pi} \approx 0{,}80$.

Пьер-Симон Лаплас (1749–1827) почти три десятилетия публиковал мемуары по теории вероятностей, затем обобщил их в своей «Аналитической теории» [33]. Ее серьезный математический фундамент составляет первую книгу сочинения, вторая книга посвящена собственно теории вероятностей, а с 1816 до примерно 1819 г. к ней присоединилось три «Дополнения». Эта книга состоит из трех теоретических глав и восьми глав прикладного направления, и таков же характер «Дополнений».

Книга содержит громадное число математических рассуждений, часто трудных для понимания ввиду неполноты промежуточных результатов и крайне небрежного стиля. Главным стохастическим инструментом Лапласа оказалась центральная предельная теорема (термин Г. Полиа 1920 года) о стремлении различных распределений к нормальному закону. Известно, что впервые ее строго доказали Марков и Ляпунов (даже не Чебышев), у Лапласа же доказательство не могло еще быть строгим, а кроме того он не указывал всех необходимых условий теоремы.

В основном Лаплас применил ее к теории ошибок, но в геодезии она оказалась бесполезной, поскольку количество наблюдений в этой научной дисциплине невелико, т. е. важное условие теоремы не выполняется. В практической астрономии это возражение иногда отпадает, но погрешности в длинных рядах наблюдений могут изменять свои свойства и потому не представлять собой единой статистической совокупности.

Из математических новинок, содержащихся во второй книге, назовем введение интегралов от комплексных функций, метода статистических испытаний (Монте-Карло), выборочного метода с оценкой его погрешности, фактического введения случайных процессов и дельта-функции Дирака.

---

[32] *Бернулли Д.* Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского поведения и спроса / Ред. В. М. Гальперин, пер. А. Нардовой. СПб., 1999. С. 11–27. Впервые опубликовано в 1738 г. на латинском языке.

[33] *Laplace, P. S.* Théorie analytique des probabilités. Paris, 1812. См. также: *Laplace, P. S.* Œuvres Complètes. 1886. T. 7. Livres 1–2.

Основным объектом теории вероятностей Лапласа было естествознание и особенно астрономия и теория ошибок (в которой он, однако, не последовал за К. Ф. Гауссом), а также статистика населения. Но он несколько раз отделял себя от «геометров», не ввел хотя бы эвристического определения случайной величины и уже поэтому не мог изучать плотности (еще не функции распределения) или характеристические функции как математические понятия. Уровень абстракции его теории вероятностей, принадлежащей прикладной математике, был слишком низок, и эту теорию пришлось создавать заново, с учетом достижений его предшественников.

В отдельном «философском» введении в теорию вероятностей [34] Лаплас обращал серьезное внимание на приложение теории вероятностей к юриспруденции и статистике населения, но изложение не было достаточно понятным массовому читателю, а научно-популярное «Изложение системы мира» [35] доказало, что Лаплас был и историком астрономии. Впрочем, он там же заявил вопреки Ньютону, что эксцентриситеты планетных орбит были вызваны случайными причинами [36].

Будучи пэром Франции, Лаплас выступал в Палате пэров по поводу проведения кадастровых съемок (в 1817 г.), о необходимости упразднения вредной лотереи Франции (в 1819 г.) и изменения важного установления уголовного судопроизводства (в 1821 г.). Тексты этих выступлений (хоть и без указания на их последствия) включены в том 12 его полного собрания сочинений (1912 г.). Не был включен (но опубликован в редком источнике) текст его выступления против внезапных ограничений экспорта зерна (в 1814 г.).

---

[34] *Лаплас П. С.* Опыт философии теории вероятностей // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / Ред. Ю. В. Прохоров. М., 1999. С. 834–863. Впервые опубликовано в 1814 г. на французском языке.

[35] *Лаплас П. С.* Изложение системы мира. Л., 1982. Впервые опубликовано в 1796 г. на французском языке.

[36] *Шейнин О. Б.* Случайность и необходимость. Почему орбиты планет эллиптичны? // ВИЕТ. 2011. № 2. С. 43–44.