

Н. Н. КРАВЧУК

П. С. ПОРЕЦКИЙ ОБ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Математическая логика, подобно многим другим разделам математики, возникла в середине XIX в. Первой ее формой была алгебра классов, которую теперь чаще называют алгеброй логики. Основоположниками этого направления являются Дж. Буль и А. Де Морган¹. Работы Буля не сразу были восприняты современниками, но после некоторой паузы развитие математической логики продолжилось ускоренным темпом, начиная с работ Э. Шредера (1841–1902), первая из которых появилась в 1877 г.²

Классом Буль называет множество предметов, обладающих определенным свойством или удовлетворяющих определенному условию. Принципиальным моментом в системах Буля и Де Моргана является выделение универсального класса, или универсума (обозначаемого единицей или U), подклассами которого являются все остальные. Логические операции над классами в современной алгебре логики вводятся следующим образом:

- 1) сложение классов – объединение их элементов (теоретико-множественное объединение);
- 2) умножение классов – выбор совпадающих элементов (теоретико-множественное пересечение);
- 3) отрицание одного класса – выбор всех элементов универсума, не лежащих в этом классе (теоретико-множественное дополнение в универсуме).

В системе Буля сложение было определено только для непересекающихся классов, у Де Моргана и последующих авторов, работающих в этой области, такого ограничения нет – сложение определено для любых классов. Названия перечисленных операций оправданы тем, что они удовлетворяют важнейшим свойствам операций над числами: сложение и умножение ассоциативны, коммутативны и по отношению друг к другу дистрибутивны. Именно это дало повод ввести термин «алгебра логики». Однако наличие одноместной операции отрицания и свойство идемпотентности сложения и умножения: $a + a = a$, $a \cdot a = a$ вносят большие различия. В частности, в алгебре логики невозможно ввести операции, обратные к сложению и умножению.

Поэтому здесь особый интерес приобретают задачи выражения одного класса через другие, сводящиеся к решению логических уравнений. Популяр-

¹ *Boole, G.* The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning. Cambridge, 1847; *De Morgan, A.* Formal Logic or the Calculus of Inference Necessary and Probable. London, 1847.

² *Schröder, E.* Operationkreis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877.

ный в то время пример – задача Венна, система логических уравнений для которой выглядит так: $a = a \cdot (bc_1 + b_1c)$, $b = a \cdot b$.

В России вопросами алгебры логики занимался профессор Казанского университета П. С. Порецкий. Первое сообщение на эту тему было сделано им в 1880 г.³ Затем последовала монография «О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики»⁴, которая содержала не только замечательно ясное изложение результатов предшественников, но и собственные оригинальные исследования автора.

Вслед за работой Порецкого в России появилось и несколько других работ, в частности, не слишком удачная брошюра М. С. Волкова «Логическое исчисление»⁵, которая вызвала негативную реакцию Порецкого. В целом отношение к зарождающейся математической логике не было однозначным; многие из философских логиков относились к ней настороженно, а некоторые даже враждебно. К примеру, П. Э. Лейкфельд пишет об этом так:

Многих ученых и мыслителей [...] весьма занимает идея о каком-то родстве между логикой и математикой. Среди таких мыслителей и ученых более умеренные ограничиваются тем, что признают между этими науками известную близость; крайние – прямо объявляют, будто логика есть не что иное, как математика или часть математики⁶.

К «крайним» он относит всех тех ученых-математиков, которые внесли существенный вклад в создание математической логики, в том числе упомянутых в настоящей работе Буля, Шредера, Порецкого и других.

Логические уравнения

Вопрос о составлении и решении уравнений в логике был поставлен как следствие грандиозных успехов алгебры – решения уравнений третьей и четвертой степеней в итальянской школе алгебры (XVI в.), а также введения и усовершенствования символических обозначений (Ф. Виет, Р. Декарт). Применить алгебраические методы к решению логических задач пытался Г. В. Лейбниц; проблемой решения уравнений в логике много занимался И. Г. Ламберт. Более отчетливо сформулировал эту проблему и предложил методы ее решения Буль. Шредер развил метод Буля и сделал его формально строгим, придерживаясь того же взгляда на природу уравнений в логике и характер постановки задачи. В этом направлении развития есть большое сходство с алгеброй: решение логического уравнения рассматривается как выражение неизвестно-

³ Порецкий П. С. Изложение основных начал математической логики в возможно более наглядной и общедоступной форме // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1881. Т. 1. С. 2–31.

⁴ Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Казань, 1884.

⁵ Волков М. С. Логическое исчисление. СПб., 1888.

⁶ Лейкфельд П. Э. Различные направления в логике и основные задачи этой науки. Харьков, 1890. С. 271.

го класса через известные и для получения такого выражения применяется метод исключения (элиминации) классов. Исключение одного класса всегда можно провести полностью по алгебраическому образцу, так как специфика логического умножения приводит к тому, что все логические уравнения являются линейными по отношению к любому классу.

Рассмотрим простой пример Буля: пусть даны два равенства $y = vx$; $z = uy$. Требуется исключить класс y . В данном случае исключение осуществляется просто: во второе равенство вместо y подставляется его значение из первого равенства и получается ответ: $z = vix$, где v и u – неопределенные классы. Истолковать ответ можно так: «Все z суть x », т. е. z -ты представляют некоторую (неопределенную) часть x -ов. Как видно, выполнены алгебраические действия и получен ответ, класс z выражен через класс x .

Порецкий предлагает другую трактовку логических равенств. Основную задачу логики он видит в том, чтобы выводить всевозможные следствия из заданных посылок (и наоборот, как можно видеть дальше). Решить логическое равенство – означает вывести из него следствия. В связи с таким подходом он приходит к формулам для решения логических уравнений другим путем, получая одновременно и новое, более характерное для логики истолкование этих формул.

Получаемые им формулы для выражения одного класса через остальные аналогичны тем, какие составлял Шредер, только записаны они в другом виде, без использования неопределенных классов. В своих комментариях к методу Шредера Порецкий замечает лишь, что доказательство Шредера проведено из чисто формальных соображений и не проливает свет на особенности именно логических равенств, выражающих взаимосвязи между классами мира речи.

Об алгебраическом и неалгебраическом подходах к постановке задачи решения логических равенств

По поводу использования неопределенного класса при записи решения логического равенства между Порецким и Шредером разгорелась дискуссия, в которой также были выражены взгляды обоих ученых на саму постановку задачи. Мы не считаем возможным принять один из подходов как единственно верный; различие между ними состоит, скорее, в определении места алгебры логики в математике и сферы действия алгебры в логике.

Подход Шредера является чисто алгебраическим: для решения логических равенств им модифицирован в соответствии с законами алгебры логики стандартный метод исключения переменных и постановка задачи очень сходна с решением уравнений в алгебре. Действительно, в его методе сначала устанавливается условие существования решения, а затем дается формула, по которой можно получить всевозможные решения, подставляя всевозможные классы вместо неопределенного.

Нам представляется, что подход Порецкого более естественен для задач логики. Примеры, которые приводят оба автора, сформулированы в устоявшемся еще до них стиле: описываются возможные классы предметов, соотно-

шения между ними и требуется узнать какие-то новые соотношения, характеризующие те или иные классы.

Например, уже упоминавшаяся задача Венна формулируется так:

Все члены совета были или владельцы облигаций, или владельцы акций, но не те и другие вместе. Случилось так, что владельцы облигаций все были в совете. Какое можно вывести из этого заключение?

В этой задаче имеются три свойства: членство в совете, обладание облигациями и обладание акциями. Здесь подразумевается, что эти свойства предметов уже зафиксированы, а значит, все классы в задаче определены; неизвестных величин как таковых нет, а есть только неизвестные или неявно заданные отношения между классами. В такой ситуации, действительно, странно говорить о «всевозможных решениях», поэтому Порецкий считает ошибочным применение Шредером произвольного класса.

Кроме того, логическая задача не обязательно формулируется относительно одного неизвестного класса. Вопрос может быть поставлен в очень общем виде: что можно сказать о соотношениях между классами задачи? Порецкий говорит, что решение логического равенства – это выведение следствий из посылок. То есть просто использование содержащихся в условии сведений о классах, чтобы охарактеризовать не один, а все классы задачи, насколько это возможно. В практических целях (а подход Порецкого всегда очень практичен) имеет смысл рассмотреть те следствия, которые выглядят проще посылок; если из нескольких сложных уравнений относительно пяти классов удастся вывести следствие, что два из них совпадают, третий содержится в них и четвертый с ними не пересекается – это и есть решение, получена полезная информация, которая содержалась в условии задачи, но не была очевидна.

Обратный способ математической логики: современный взгляд

Помимо подведения итогов в теории логических равенств Порецкий также ставит и решает совершенно новую задачу, и в его терминах именно ее следует называть обратной задачей. Если решение логических равенств – это выведение следствий из посылок, то обратная задача – поиск возможных гипотез, приведших к данному следствию (также выраженному в форме логического равенства). Однако его формулировка задачи требует получения для данного равенства любой эквивалентной системы посылок, из которой оно следует.

Подход Порецкого к решению поставленной им задачи естественен: надо найти некую максимальную систему посылок, от которой можно будет перейти к любой другой, и указать способ перехода. Отсюда ясно, что каждая посылка в максимальной системе должна быть неразложимой на несколько других. Такие посылки он называет элементарными и показывает, какой вид они должны иметь.

Всякое логическое равенство можно преобразовать в эквивалентное ему равенство в нулевой (или единичной) форме, т. е. с нулем (или соответственно единицей) в правой части. Обратный способ Порецкого применяется к равен-

ству, приведенному к одной из этих двух стандартных форм. Элементарные посылки также будут равенствами в нулевой или единичной форме.

В связи с элементарными посылками появляются разложения функции в совершенные нормальные формы – дизъюнктивную и конъюнктивную. Этими терминами Порецкий не пользуется, но по существу оперирует именно с ними. Элементарные дизъюнкции и конъюнкции, составляющие эти формы, названы соответственно продуцентами и конституентами (последний термин принадлежит Булю), и уделено некоторое внимание доказательству их основных свойств. Например, для задачи о трех классах элементарные продуценты будут иметь вид $a + b + c$, $a_1 + b + c$, и т. д., а элементарные конституенты – abc , ab_1c_1 и т. д. Элементарные посылки в нулевой форме содержат конституенты, а посылки в единичной форме – продуценты.

Для получения максимальной системы посылок в нулевой форме предлагается привести исходное равенство к нулевой форме, а затем привести функцию, стоящую в левой части, к виду суммы элементарных конституентов n -го порядка, т. е., в современных терминах, к СДНФ – совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Полученное равенство будет эквивалентно системе равенств в нулевой форме, где левыми частями будут служить все конституенты, которые вошли в разложение. Для единичной формы также используется совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Однако отметим снова, что Порецкий не задается вопросом о всевозможных посылках или всевозможных следствиях данного равенства; он ищет только эквивалентные системы. Нам остается лишь сожалеть, что обратный способ не продвинут им дальше. Ведь в действительности предложенная им максимальная система посылок может быть применена к получению всевозможных как следствий, так и гипотез для исходного равенства. Например, можно провести следующие рассуждения.

Имея максимальную систему посылок в нулевой форме, эквивалентную данному равенству, очень легко получить его всевозможные следствия, вычеркивая из этой системы любой набор посылок. Получаемые уменьшенные системы далее будем преобразовывать эквивалентным образом – складывая некоторые посылки между собой, получим какую-то систему равенств в нулевой форме, а затем можем избавиться и от нулевой формы, прибавляя к обеим частям любую функцию от простых классов задачи. Чтобы понять, что таким способом будут исчерпаны все следствия исходного уравнения, заметим, что с любым следствием можно провести описанные выше операции 1–3 и получить для него максимальную систему посылок в нулевой форме. Если бы оказалось, что какая-то из посылок не содержится в системе посылок исходного равенства, то, раз она следует из этой системы, необходимо как-то выразить соответствующий элементарный конституент через конституенты, входящие в посылки исходной системы. Но это невозможно, так как элементарные конституенты друг через друга не выражаются.

Получать гипотезы, которые могли привести к исходному равенству, будет сложнее: для этого надо прибавить к системе посылок любой набор элементарных посылок, не вошедших в нее, а затем проводить эквивалентные преобразования над полученной системой. По аналогичным соображениям таким способом можно получить все возможные гипотезы.

Заключение

Алгебра логики стала одной из первых разработанных областей, входящих в современную математическую логику, и как мы стремились продемонстрировать в этой работе, русские ученые были знакомы с этими разработками и внесли свой вклад в алгебру логики. Особенно значительный вклад был сделан Порецким, что получило признание и у иностранных математиков. Помимо Порецкого, которого можно считать самым значительным математическим логиком этого периода, стоит отметить одесских математиков-логиков И. В. Слешинского и С. О. Шатуновского, а также в некоторой степени Е. Л. Буницкого. Слешинский активно пропагандировал развитие математической логики, его усилиями русские математики знакомятся со многими зарубежными работами, в частности, систематизирующим трудом Л. Кутюра «Алгебра логики», вышедшим на французском языке в 1905 г. и опубликованным по-русски в переводе Слешинского уже в 1909 г.⁷ И этот случай не является из ряда вон выходящим, русское математическое сообщество достаточно быстро получало информацию о достижениях иностранных ученых (можно обратить внимание хотя бы на скорость, с какой Порецкий реагировал на работы Шредера), и обратно, за рубежом работы Порецкого были известны многим. Немало его трудов было издано и на французском языке, например, «Теория логических равенств с тремя переменными a, b, c »⁸, где излагается теория логических равенств от трех классов. Только что упомянутая работа Кутюра посвящает отдельную главу изложению его методов. Заметим, кстати, что в 1910 г. П. Эренфест в своей рецензии на работу Кутюра⁹ высказал идею о возможности применения аппарата алгебры логики к решению технических задач, например, к упрощению телефонных сетей.

Работы Шредера и Порецкого подвели итоги развития алгебры логики. Вышедшие вскоре труды Г. Фреге и Б. Рассела направили развитие математической логики в новое русло и окончательно утвердили ее место среди математических наук. Однако в XX в. алгебра логики не только не была забыта, но и нашла новые практические применения, к примеру, в теории релейно-контактных схем. Эти приложения потребовали дальнейшего усовершенствования ее аппарата.

⁷ Кутюра Л. Алгебра логики. Одесса, 1909.

⁸ Poretzky, P. S. Théorie des égalités logiques à trios termes a, b, c // Revue de métaphysique et de morale, 1900. Т. 8. Р. 594–598.

⁹ Эренфест П. Рецензия на работу Кутюра «Алгебра логики» // Журнал Русского физико-математического общества. Физический отдел. 1910. Т. 42. Вып. 10. С. 382–387.