

Уроки истории
Lessons from History

DOI: 10.31857/S020596060014103-5

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ К. МАРКСА: СТОЛЕТНЯЯ
ИСТОРИЯ ПОИСКА, РАСШИФРОВКИ И АНАЛИЗА**

ЛАСКОВАЯ Татьяна Алексеевна — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1; E-mail: talaskovy@mail.ru

РЫБНИКОВ Константин Константинович — ООО «Полиэдр»; Россия, 115035, Москва, Овчинниковская наб., д. 22/24, стр. 2; E-mail: kkrybnikov@mail.ru

ЧЕРНОБРОВИНА Ольга Константиновна — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Мытищинский филиал; Россия, 141005, Московская обл., Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1; E-mail: ochernobrovina84@mail.ru

© Т. А. Ласковая, К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина

Статья посвящена истории поиска, расшифровки и анализа архивных математических рукописей немецкого философа К. Маркса, а также изучению предпосылок возникновения этих работ и целей, которые ставил перед собой ученый при их написании. Показано, что интерес Маркса к математике был обусловлен поисками формального математического инструмента для анализа экономических процессов. Также его привлекли ранее неизвестные возможности прикладных исследований на основе дифференциального исчисления. Высказывается предположение, что одной из целей Маркса в его анализе теорем Тейлора и Маклорена было моделирование табличной функции многочленом. Показано, что математический аппарат, использованный Марксом, основан на работах, которые были доступны европейским ученым того времени, в первую очередь английским.

Ключевые слова: К. Маркс, архивные рукописи, история наследия, обработка табличных данных, интерполяция.

Статья поступила в редакцию 29 февраля 2020 г.

MATHEMATICAL WORKS OF K. MARX: A CENTURY-LONG HISTORY OF SEARCH, DECIPHERING AND ANALYSIS

LASKOVAYA Tatyana Alekseevna – Bauman Moscow State Technical University; 2-ya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005, Russia; E-mail: talaskovy@mail.ru

RYBNIKOV Konstantin Konstantinovich – ООО “Poliedr”; Ovchinnikovskaya nab., 22/24, str. 2, Moscow, 115035, Russia; E-mail: kkrybnikov@mail.ru

CHERNOBROVINA Olga Konstantinovna – Bauman Moscow State Technical University, Mytishchi Branch; Ul. 1-ya Institutskaya, 1, Mytishchi, Moskovskaya obl., 141005, Russia; E-mail: ochernobrovina84@mail.ru

© Т. А. Laskovaya, К. К. Rybnikov, О. К. Chernobrovina

Abstract: This article is devoted to the history of search, deciphering and analysis of the archival mathematical manuscripts of a German philosopher K. Marx, and to the analysis of prerequisites for the emergence of these works and the goals pursued by the scholar when writing these works. It is shown that Marx’s interest in mathematics was spurred by his search for a formal mathematical tool for the analysis of economic processes. He was also attracted by previously unknown possibilities for applied studies based on the differential calculus. It is hypothesized that one of Marx’s goals in his analysis of the Taylor and Maclaurin theorems was modelling polynomial function from points table. It is shown that the mathematical apparatus used by Marx is based on the works that had been available to the European scientists of the time, first and foremost, to English scientists.

Keywords: K. Marx, archival manuscripts, the history of legacy, table data processing, interpolation.

For citation: Laskovaya, T. A., Rybnikov, K. K., and Chernobrovina, O. K. (2021) Matematicheskie raboty K. Marksa: stoletniaia istoriia poiska, rasshifrovki i analiza [Mathematical Works of K. Marx: A Century-Long History of Search, Deciphering and Analysis], *Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki*, vol. 42, no. 1, pp. 71–88, DOI: 10.31857/S020596060014103-5.

Математические рукописи К. Маркса в течение долгого времени были важным объектом изучения советских историков математики. В частности, эта тема активно разрабатывалась в кабинете истории математики на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Его руководители – С. А. Яновская, а позже К. А. Рыбников – были основными исследователями творческого наследия великого философа.

Какое же место эта проблематика занимает в современных условиях? В 1948 г. вышла статья Д. Стройка о математических работах Маркса ¹. В 1968 г. была издана книга «К. Маркс. Математические

¹ *Struik, D. J. Marx and Mathematics // Science & Society. 1948. Vol. 12. No. 1: A Centenary of Marxism. P. 181–196.*

рукописи», которая содержит упомянутые материалы на языке оригинала, а также их русские переводы с подробными комментариями ². В том же году появился ряд аналитических работ, посвященных этим трудам Маркса. Этому же событию были посвящены яркие статьи в популярных изданиях журналиста Л. Католина ³. Необъяснимо, но начиная с этого года какие-либо публикации о работах Маркса обнаружить достаточно трудно; среди немногих можно упомянуть, например, статьи В. Н. Молодшего 1969 и 1983 гг. ⁴ Почти то же самое можно сказать о работах зарубежных математиков. В XXI в. вышла лишь работа П. Мэтьюза, датированная 2002 г. ⁵ Сами же математические работы Маркса давно уже стали библиографической редкостью.

В настоящей статье авторы сделали попытку ознакомить читателя с почти полувековой историей исследования математических рукописей Маркса в Советском Союзе, включавшей сбор всех необходимых архивных материалов, их расшифровку, систематизацию и анализ перед окончательной публикацией, а также дать краткий анализ истоков, предпосылок и целей математических исследований Маркса. Впервые эта тема была ими поднята в ряде докладов, в частности в докладе на XVII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко, которая состоялась в 2019 г. ⁶

Что собой представляют математические рукописи Маркса?

Интерес Маркса к освоению математического аппарата исследований не был случайным. По свидетельству П. Лафарга, он считал, «что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся воспользоваться математикой» ⁷. По-видимому, начало серьезных занятий

² Маркс К. Математические рукописи. М.: Наука, 1968.

³ Католин Л. Судьба «Математических рукописей» Маркса // Неделя. 1968. № 10 (418).

⁴ Молодший В. Н. О математических рукописях К. Маркса // Математика в школе. 1969. № 1. С. 10–23; Молодший В. Н. Математические рукописи К. Маркса и развитие истории математики в СССР // ВИЕТ. 1983. № 2. С. 29–34.

⁵ Matthews, P. H. The Dialectics of Differentiation: Marx's Mathematical Manuscripts and Their Relation to His Economics // Middlebury College Working Paper Series. 2002. No. 0203.

⁶ Ласковая Т. А., Рыбников К. К., Чернобровина О. К. Математические исследования Карла Маркса. Цели, предпосылки, источники // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко, Тула, 23–28 сентября 2019 г. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2019 (Библиотека Чебышевского сборника). С. 244–247.

⁷ Лафарг П. Воспоминания о Марксе. М.: Политиздат, 1967. С. 2.

математикой совпало с его работой над «Капиталом». В письме Ф. Энгельсу от 11 января 1858 г. он писал:

При разработке основ политической экономии меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах, что с отчаяния я снова засел за быстрое прохождение алгебры. Арифметика никогда не давалась мне. Но окольным алгебраическим путем я снова опять возьму правильный прицел⁸.

Можно утверждать, что научный багаж Маркса к этому времени ограничивался коммерческой арифметикой, тригонометрией и некоторыми базовыми сведениями из алгебры. Именно поэтому в качестве исходных предпосылок для изучения основ дифференциального исчисления он выбрал алгебраический подход.

Структурно рукописи Маркса при публикации⁹ были разделены на две части.

Первая часть — «Дифференциальное исчисление, его природа и история» — раскрывает замысел автора произвести анализ развития теории дифференциального исчисления на основе алгебраического подхода. Две основные работы — «О понятии производной функции» и «О дифференциале» — сопровождаются рукописью «Об истории дифференциального исчисления», где автор анализирует теоремы Тейлора и Маклорена, опираясь на «Лагранжеву теорию производных функций».

Вторая часть позволяет познакомиться с описанием всего творческого математического наследия Маркса. В хронологическом порядке можно проследить, как автор методично совершенствовал свои математические знания, стремясь к содержательному анализу достижений в области дифференциального исчисления.

Конспекты до 1870-х гг. содержат только сведения из коммерческой арифметики, тригонометрии и некоторых приложений понятия производной (в частности к задаче построении касательной к параболе). Рукописи 1870-х гг. посвящены основательному разбору известных Марксу учебников и работ И. Ньютона, Д. Хайнда, Ж. Л. Бушарлы и др. На основании этих учебников Маркс предлагает к осмыслению теорему Тейлора на чисто алгебраической основе. К алгебраическому аппарату Маркс возвращается вновь и вновь в своих тетрадях «Алгебра I» и «Алгебра II».

В рукописях 1880-х гг. Маркс дает свою трактовку определения производной, что позволяет ему проанализировать так называемую неопределенность $\frac{0}{0}$, связав ее с символами $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. Пытаясь остаться в рамках алгебраического подхода к понятию производной, Маркс избегает понятий предела и бесконечно малых и создает так называемый аппарат алгебраического дифференцирования.

Суть такого подхода состоит прежде всего в том, что для отыскания производной функции $f(x)$ в точке x составляется отношение

⁸ Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. 2-е изд. М.: Госполитиздат, 1962. Т. 29. С. 210.

⁹ См.: Маркс. Математические рукописи...

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

и отыскивается такая функция $\varphi(x_1, x)$, которая при всех $x_1 \neq x$ совпадает с этим отношением, но не теряет смысла и при $x_1 = x$ ¹⁰. Функцию $\varphi(x_1, x)$ Маркс называет предварительной производной, а выражение $\varphi(x, x)$ — производной функции в точке x . Оригинальным также является подход Маркса к определению дифференциала через понятие оператора.

Среди рукописей Маркса основное место занимают тетради «Алгебра I» и «Алгебра II». Третья тетрадь, не имеющая названия, по существу является продолжением тетради «Алгебра II». Содержание этих тетрадей полностью определяет замысел автора и алгебраические основы, к которым он прибегает, изучая дифференциальное исчисление. «Алгебра I» состоит из следующих разделов:

1. Общая теория уравнений.
2. Первое элементарное появление $\frac{a}{0} = \infty$ и $\frac{0}{0}$ в обыкновенной алгебре.
3. Элементарное о бесконечных рядах.
4. О понятии функции.
5. Окончание конспекта об общей теории уравнений.

Центральным здесь, безусловно, является раздел «О понятии функции». Следуя «Трактату по дифференциальному и интегральному исчислению» С. Ф. Лакруа, который, определяя понятие функции, полагал, что

всякое количество, значение которого зависит от одного или нескольких других количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, знаем или не знаем мы, через какие операции нужно пройти, чтобы перейти от этих последних к первой¹¹,

Маркс опирается на рассмотрение неопределенных уравнений, когда одна из неизвестных является функцией других, когда они изменяются в определенных пределах.

При этом Маркс использует простые примеры из учебников коммерческой арифметики:

30 человек (мужчин, женщин и детей) потратили вместе в трактире 50 шиллингов, причем каждый мужчина тратил 3 шилл., женщина – 2 шилл., а ребенок – 1 шилл. Спрашивается, сколько было мужчин, женщин и детей?¹²

Анализируя соотношение

$$\begin{cases} p + q + r = 30, \\ 3p + 2q + r = 50, \end{cases}$$

¹⁰ Розов Н. Х. Математические рукописи Карла Маркса // Успехи математических наук. 1968. Т. 23. Вып. 5 (143). С. 205–211.

¹¹ Маркс. Математические рукописи... С. 353.

¹² Там же. С. 350–351.

и отбрасывая нулевые значения p , q и r , Маркс получает девять решений, полностью определяющих зависимости неизвестных друг от друга.

Функцию одного переменного Маркс определяет следующим образом:

Функция некоторой переменной есть другая переменная, значения которой меняются вместе со значениями первой и, таким образом, зависят от них. Она имеет то общее с функцией в неопределенных уравнениях, что если переменной, чьей функцией она является, придать некоторое частное значение, то определенное соответствующее ему значение приобретает и функция¹³.

В тетради «Алгебра II» Маркс предпринял попытку систематизации известных ему результатов, связанных с проблемой разложения функций в ряды. Здесь его внимание оказалось прикованным к основной идее Лагранжа, который полагал, что для аналитической функции $f(x)$ значение $f(x+h)$ может быть разложено в ряд по целым и возрастающим степеням приращения h , т. е.

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots \quad (1)$$

где $p, q, r, \dots$ — функции одного только x (в работе Яновской¹⁴ указано, что приведенное Марксом доказательство, вообще говоря, неудовлетворительно).

Маркс определяет, что в (1) коэффициент при h^n равен $\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$, т. е. доказывает справедливость ряда Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (2)$$

Был ли он близок к идее приближенного представления функции в виде многочлена, представляющего собой конечную сумму слагаемых правой части (2)? Видимо, это так. По крайней мере идея отбрасывания бесконечно малых высшего порядка по Ньютону им анализировалась. «Почему насильственно уничтожаются стоящие на пути члены? [...] Ответ очень прост: это нашли чисто экспериментально»¹⁵.

Заметим, что известная формула Тейлора в современной трактовке определяет функцию $f(x)$, имеющую n -производную $f^{(n)}(a)$ в точке $x = a$ в виде суммы многочлена $F(x)$ степени n

$$F(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (3)$$

¹³ Рыбников К. А. К вопросу о понятии функции // Вопросы философии. 1958. № 11. С. 89–92.

¹⁴ Яновская С. А. О математических рукописях К. Маркса // Под знаменем марксизма. 1933. № 1. С. 74–115.

¹⁵ Там же.

и остаточного члена $R_n(x)$, являющегося в окрестности точки a бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x - a)^n$, т. е. $R_n(x) = \alpha_n(x)(x - a)^n$, где $\alpha_n(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow a$.

Таким образом,

$$f(x) = F(x) + R_n(x). \quad (4)$$

Можно сказать, что функция $f(x)$ приближенно описывается (моделируется) многочленом $F(x)$:

$$f(x) \approx F(x). \quad (5)$$

Этот подход наиболее ярко проявился в теории классической интерполяции. Задача классической интерполяции состоит в построении многочлена $F(x)$, удовлетворяющего условиям:

$$f(x_i) = F(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

(Функция $f(x)$ задана таблично, ее значения в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ равны соответственно $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$).

Многочлен $F(x)$ степени n определяется однозначно. В математической литературе этот многочлен известен как интерполяционный многочлен Лагранжа. Приближенной формулой Лагранжа называется соотношение (5).

Авторы предполагают, что именно моделирование функции $f(x)$ легко анализируемой функцией (многочлены) и было одной из целей Маркса в его анализе теорем Тейлора и Маклорена.

Результаты Лагранжа, связанные с созданием интерполяционной формулы (5), видимо, были неизвестны Марксу. Известно, что среди источников, которыми он пользовался, были работы Грегори, Тейлора и Ньютона, который «при нарочито туманном изложении»¹⁶ своей интерполяционной формулы создал все предпосылки для создания теории представления аналитических функций в виде многочлена. И Грегори, и Тейлор пришли к формулировке «теоремы Тейлора», отправляясь, как и Ньютон, от конечных разностей¹⁷.

Цели и предпосылки математических исследований Маркса

Попробуем найти истоки необыкновенного интереса Маркса к математике. Разумеется, логические построения, возможности использования формального математического инструментария при анализе экономических процессов были особенно близки Марксу как серьезному ученому-экономисту. Н. Х. Розов, среди многих других побудительных причин, полагает, что математика доставляла ему «радость отдыха в выдававшиеся свободные минуты и нравственное утешение

¹⁶ Там же.

¹⁷ Маркс. Математические рукописи... С. 594–596.

в мучительные моменты его беспокойной жизни»¹⁸. И действительно, в своем письме Энгельсу от 23 ноября 1860 г. Маркс пишет: «Писать статьи для меня теперь почти невозможно. Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, — это математика»¹⁹.

Другим побудительным мотивом, разумеется, стали необыкновенные, ранее неизвестные, возможности прикладных исследований на базе дифференциального исчисления. Энгельс в «Диалектике природы» пишет: «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение (здесь и далее курсив в оригинале. — Т. А., К. К., О. К.)»²⁰. Главным процессом в природе и обществе для Маркса, конечно, было движение. Энгельс также пишет:

Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисления*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем²¹.

В «Анти-Дюринге» Энгельс пишет:

Маркс и я были едва ли не единственными людьми, которые спасли из немецкой идеалистической философии сознательную диалектику и перевели ее в материалистическое понимание природы и истории. Но для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием²².

К мнению Энгельса присоединяется Лафарг, который писал о Марксе: «В высшей математике он находил диалектическое движение в его наиболее логичной и в то же время простейшей форме»²³.

Авторы настоящей статьи, ни в коем случае не отрицая этих мотивов, в то же время считают, что все-таки главной причиной является его чисто практический интерес к анализу экономических показателей с помощью более совершенного аппарата, нежели элементарная статистика. Сам Маркс в письме Энгельсу от 31 мая 1873 г. пишет:

Дело в следующем: ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т. д., и т. д. представлены в их движении в течение года и т. д., в виде восходящих и нисходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался — для анализа кризисов — вычислить эти *up and downs* как неправильные кривые и

¹⁸ Розов. Математические рукописи... С. 205–211.

¹⁹ Маркс. Математические рукописи... С. 90.

²⁰ Энгельс Ф. Диалектика природы // Маркс, Энгельс. Сочинения... 1961. Т. 20. С. 587.

²¹ Там же. С. 573.

²² Энгельс Ф. Анти-Дюринг // Маркс, Энгельс. Сочинения... 1961. Т. 20. С. 10–11.

²³ Лафарг. Воспоминания о Марксе... С. 2.

думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом это возможно) математически вывести из этого главные законы кризисов²⁴.

В этом же письме Маркс сообщает Энгельсу о редкой для себя попытке привлечь к решению задачи профессионального математика.

Я рассказал здесь Муру одну историю, с которой *privatim* долго провозился. Но он думает, что вопрос неразрешим или, по крайней мере, *pro tempore* неразрешим ввиду многих и большей частью еще лишь подлежащих обнаружению факторов, относящихся к этому вопросу [...] Мур, как я уже сказал, считает задачу пока невыполнимой, и я решил до поры до времени отказаться от нее²⁵.

В соответствии с современной терминологией Маркс пытался подойти к решению задач прогнозирования экономических показателей на основе анализа так называемых временных рядов²⁶.

Надо сказать, что и в наше время задача прогнозирования экономических показателей по временным рядам остается слабо изученной. Попытки эвристических подходов, таких, например, как определение волн Эллиота, не привели пока к реальным устойчивым успехам.

На что же мог рассчитывать Маркс, опираясь на математический аппарат XIX в.? Попытки строить непрерывные функции, моделирующие дискретные (табличные) функции, в основном сводились к построению интерполяционных многочленов и методу наименьших квадратов. Эти результаты Лагранжа, Лежандра и Гаусса были получены на рубеже XVIII и XIX вв., но остались вне внимания Маркса. Впрочем, более ранняя интерполяционная формула Ньютона была, как следует из приведенной далее формулы (6), известна ему. Однако эта формула, использующая разделенные разности, не очень удобна в практическом плане, не говоря уже о том, что прогнозирование на основе интерполяционных многочленов приводит к весьма большим погрешностям, по крайней мере в точках, удаленных от узлов интерполяции. Увлеченный анализом представления (иными словами – моделирования) аналитических функций многочленами, Маркс не успел продвинуться дальше в обработке экономических табличных данных. Последняя его рукопись «Теорема Тейлора» оказалась неоконченной.

В источниках, которыми пользовался Маркс, его внимание прежде всего привлекли хорошо уже известные к этому времени результаты Грегори и Тейлора. Интересно, что теорема Тейлора в этих работах была получена на основании исследования интерполяционной формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.

²⁴ Маркс, Энгельс. Сочинения... 1964. Т. 33. С. 72.

²⁵ Там же. С. 71–72.

²⁶ См., например: Рыбников К. К., Чернышова А. Г., Евсеев Н. В. Об одном классе математических методов анализа временных рядов. Возможности прогнозирования и апостериорных исследований особенностей социально-экономических процессов // Лесной вестник (Forestry Bulletin). 2017. Т. 21. № 6. С. 109–113.

При выводе этой формулы рассматривалась заданная таблично функция $y = f(x)$, где переменная x задавалась в равноотстоящих от соседних узлов интерполяции $x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, \dots, x + n\Delta x = x + h$ при соответствующих значениях функции y (или $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$). На основании исходных данных можно построить так называемые последовательные разности:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) – разности 1-го порядка;

$\Delta^2 y, \Delta^2 y_1, \dots, \Delta^2 y_{n-2}$ – разности 2-го порядка (разности между разностями 1-го порядка) и т. д.

Выражая $f(x + \Delta x), f(x + 2\Delta x), f(x + 3\Delta x)$, через $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots$ Тейлор получил

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= y + \Delta y, \\ f(x + 2\Delta x) &= y + 2\Delta y + \Delta^2 y, \\ f(x + 3\Delta x) &= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y, \\ &\dots \end{aligned}$$

Далее, подмечая общую закономерность, Тейлор в конечном счете получает

$$f(x + \Delta x) = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \dots + \Delta^n y, \quad (6)$$

что, по существу, является интерполяционной формулой, полученной ранее Ньютоном. Далее, полагая

$$n = \frac{h}{\Delta x}, n-1 = \frac{h-\Delta x}{\Delta x}, n-2 = \frac{h-2\Delta x}{\Delta x}, \dots, n(n-1) = \frac{h-(n-1)\Delta x}{\Delta x},$$

приходим к соотношению

$$f(x+h) = y + h \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \dots$$

(Заметим, что Тейлор выписывал только первые члены этой суммы.)

Затем, считая h фиксированным, а Δx – бесконечно малым, приходим к соотношению

$$f(x+h) = y + y^* \cdot h + y^{**} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + y^{***} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

где y^* – первая флюксия по Ньютону ($\frac{dy}{dx}$ по Лейбницу), y^{**} – вторая флюксия по Ньютону ($\frac{d^2 y}{dx^2}$ по Лейбницу) и т. д., что и приводит нас к теореме Тейлора.

Анализ вышесказанного и последней, оставшейся неоконченной, рукописи Маркса «Теорема Тейлора» говорит о том, что он был хорошо знаком с теоремой Тейлора и с теоремой Маклорена. Об этом

свидетельствует и наличие в рукописях Маркса решения задач использования этих теорем для некоторых функций:

$$y = \frac{1}{(a+x)}; y = \sqrt{(a^2 + bx)}; y = (a+x)^m$$

В то же время Маркс не успел остановиться на примерах использования идей построения интерполяционных многочленов для функций, заданных таблично, хотя, как мы видим, был в шаге от этого.

История исследований математических рукописей К. Маркса в Советском Союзе

Начало изучению математических работ Маркса было положено в начале двадцатых годов запиской Ленина: «Т. Рязанов! Нельзя ли нам купить у Шейдеманов и К^о (ведь это продажная сволочь) письма Маркса и Энгельса? или купить снимки?»²⁷. Столетие отделяет нас от этой записки. По-видимому, следует пояснить, кто такие Шейдеман и Рязанов.

Филипп Генрих Шейдеман (1865–1939) — один из руководителей немецких социал-демократов, в руках которых оказалась переписка Энгельса и Маркса. При создании Веймарской республики (существовала в 1919–1933 гг.), пришедшей на смену немецкой монархии, он стал ее первым премьер-министром (канцлером). В дальнейшем при установлении нацистского режима Шейдеман бежал во Францию, затем в Голландию и далее в Данию.

Ленин к фигуре Шейдемана относился крайне отрицательно:

Пока немецкие рабочие терпят у власти [...] предателей социализма, негодяев и лакеев буржуазии, Шейдеманов и всю их партию, до тех пор о спасении немецкого народа не может быть и речи. До тех пор немецкий народ остается на деле – при всех «социалистических» фразах, при всяческих «демократических» и «республиканских» украшениях – рабом буржуазии и соучастником ее преступлений...²⁸

Эмиссар Ленина Рязанов немедленно выехал в Берлин и, действительно, договорился о получении фотокопий рукописей Маркса объемом около 1000 страниц. Среди них находились практически все математические рукописи Маркса. Почему же Рязанову удалось блестяще выполнить поручение Ленина при столь напряженных отношениях между большевистскими руководителями Советской России и немецкими социал-демократами?

²⁷ Католлин Л. Мы были тогда дерзкими парнями... // Знание — сила. 1968. № 5. С. 4.

²⁸ Ленин В. И. Собрание сочинений. 4-е изд. М.: Госполитиздат, 1950. Т. 29. С. 353–354.

Давид Борисович Рязанов родился 10 марта 1870 г. в Одессе. Много лет провел в Европе. Имел обширные связи в социал-демократических кругах. Был лично знаком с Г. В. Плехановым и П. Л. Лавровым. Свободно говорил на основных европейских языках. Перевел на русский язык «Диалектику природы» Энгельса. Был основателем и первым директором Института К. Маркса и Ф. Энгельса (в 1931 г. преобразован в Институт Маркса — Энгельса — Ленина при ЦК ВКП(б) (ИМЭЛ), академик. Стал жертвой волны репрессий 1930-х гг. 21 января 1938 г. расстрелян в Саратове. Реабилитирован в 1958 г.

Так или иначе ИМЭЛ сосредоточил в своих архивах достаточный материал для анализа математического наследия Маркса. В 1933 г. благодаря усилиям Яновской и ее аспирантов Д. М. Райкова и А. И. Нахимовской основные работы Маркса увидели свет. Надо ли говорить, что этому предшествовала тяжелая работа по расшифровке рукописей Маркса, иной раз трудно читаемых в силу его почерка и своеобразной манеры смешения при изложении известных результатов и самостоятельных размышлений. Этим занимались как математики, так и мастера восстановления текстов. В 1933 г. вездесущий математик-марксист Э. Кольман, кстати, принимавший весьма скромное участие в анализе работ Маркса, на математическом конгрессе в Цюрихе упомянул о них.

Далее в силу объективных причин исследования математических рукописей Маркса шли довольно вяло до 1950 г., когда на математическом конгрессе в Будапеште к ним вновь было привлечено внимание, прежде всего математиками социалистических стран. Среди членов весьма представительной советской делегации в качестве ее секретаря находился будущий известный историк математики Константин Алексеевич Рыбников. Именно к нему обратилась группа участников конгресса из стран народной демократии. Причина была проста. К этому времени статья Яновской «О математических рукописях К. Маркса», опубликованная в 1933 г.²⁹, стала хорошо известной в мировом математическом сообществе, а здесь перед ними стоял ее ученик. Впрочем, в 1933 г. Рыбников был всего лишь студентом и занимался вопросами истории развития вариационного исчисления. Остальные члены советской делегации также не были достаточно хорошо осведомлены о математических исследованиях Маркса.

Однако эта встреча с иностранными коллегами имела неожиданные последствия. В 1950 г. кандидат физико-математических наук Рыбников занимал должность инструктора в отделе науки ЦК КПСС. В личном архиве семьи Рыбниковых сохранились рукописные воспоминания Константина Алексеевича об этом периоде его работы. Он писал, что по возвращении доложил об этой беседе Дмитрию Трофимовичу Шепилову, который курировал научные международные семинары и конгрессы. Ранее тот заведовал отделом пропаганды ЦК,

²⁹ Яновская. О математических рукописях К. Маркса...

одно время был главным редактором газеты «Правда», а в 1950 г. был назначен инспектором ЦК и фактически был личным помощником Г. М. Маленкова.

Шепилов сразу отвел Рыбникова к члену ЦК КПСС Петру Николаевичу Поспелову, в недалеком будущем секретарю ЦК КПСС, директору ИМЭЛ при ЦК КПСС, которому уже доложили об интересе международной математической общественности к математическим рукописям Маркса. Разумеется, знал он и о том, что ИМЭЛ обладает почти полным собранием математических работ Маркса (в фотокопиях). Он сказал Рыбникову:

Вы – математик, Вы – коммунист, Вам надо эти рукописи изучить. Я об этом распоряжусь. Начиная с этого дня, у вас будет новый распорядок дня. Полдня Вы будете работать в Центральном партийном архиве (ЦПА), а остальную часть дня – в своем отделе.

В это время заведующим отделом документов Маркса был Виктор Алексеевич Радус-Зенькович, старый большевик. Сперва он встретил Константина Алексеевича настороженно, но вскоре у них установились добрые деловые отношения. Основная часть сотрудниц – дамы в возрасте, но каждая из них хорошо знала свое дело. Одна из них, Нина Ильинична (фамилия, к сожалению, в воспоминаниях Рыбникова не сохранилась), знала несколько языков, а главное – обладала искусством разбирать почерк Маркса, что всегда было нелегкой задачей для всех исследователей. Работу своего маленького отдела Виктор Алексеевич умел поставить.

Упорная математическая работа, исследования историков-документалистов и почерковедов дала неплохие результаты. Все тексты архива были восстановлены (а их было более 100 страниц). Была также решена нелегкая задача выделения чисто конспективных знаний, оригинальных исследований и серьезных аналитических разработок того, что Маркс почерпнул из источников. Кроме того, все документы архива были окончательно переведены на русский язык.

В мае 1953 г. Рыбников вернулся на работу в МГУ им. М. В. Ломоносова. Практически сразу он рассказал о математических исследованиях Маркса академикам Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому. Кроме того, он поделился собственными результатами их анализа и представил план диссертации «О работах К. Маркса по математике». Кстати, Колмогоров был участником Международного математического конгресса, проходившего в Венгрии в 1950 г.

И Колмогоров, и Петровский благосклонно отнеслись к его докладу, а главное – посетили ИМЭЛ, где познакомились с архивом Маркса, причем Колмогоров приезжал в ИМЭЛ неоднократно.

25 июня 1954 г. состоялась успешная защита докторской диссертации Рыбникова «О работах К. Маркса по математике»³⁰ (интересно, что она состоялась ровно (день в день) через тринадцать лет после защиты им кандидатской диссертации (в 1941 г.). В качестве оппонентов выступили известные историки математики А. О. Гельфонд, А. П. Юшкевич и С. А. Яновская. Положительный отзыв прислал Колмогоров. В связи с его участием в защите стоит вспомнить один из ее эпизодов. Когда один из авторитетных историков математики с большей долей скептицизма высказался о рукописях Маркса, Андрей Николаевич обратился к нему с вопросом: «А вы их видели? А я видел!» и засмеялся своим характерным «колмогоровским» смехом.

Казалось бы, после успешной защиты диссертации вопрос о математических рукописях Маркса был исчерпан. Однако многое оставалось неясным. Каким математическим аппаратом обладал Маркс, на какие источники он опирался и, наконец, главное — какие задачи он перед собой ставил?

В 1965 г. Рыбников был направлен в командировку в Лондон. Программа командировки предусматривала работу в библиотечных фондах Британского музея, где содержалась практически исчерпывающая информация о том, какими источниками пользовался Маркс, а также в Лондонском и Кембриджском университетах. При посредстве советского посольства в Лондоне было выяснено, что следы библиотечных поисков Маркса надо искать в колледжах Тринити, Сент-Джонса и Санкт-Катарини.

Кстати, появились и неизвестные страницы работ Маркса. Так, например, за два года до командировки заведующая секцией документов Маркса и Энгельса Ольга Константиновна Сенекина сумела получить ряд фотокопий неизвестных рукописей в Институте социальной истории в Амстердаме.

Что же касается лондонской экспедиции, то неоценимую и квалифицированную помощь в ее организации оказал легендарный советский дипломат, бывший посол СССР в Великобритании Иван Михайлович Майский. Его обширная сеть знакомых дипломатов и ученых Лондона позволила ему дать рекомендации по организации работы в библиотечных фондах, в первую очередь фондах Британского музея. Представляется уместным остановиться на личности Майского, без участия которого заключительный этап анализа работ Маркса вряд ли был бы так успешен.

Иван Михайлович Майский — одна из самых ярких фигур советской дипломатии. Он прожил жизнь, полную невероятных приключений. Его отец, выходец из военных кантонистов, служил военным врачом в старинном городе Кириллове, откуда семья перебралась в Череповец. Именно в Череповце, скромном уездном городе, были неплохие возможности для получения полноценного среднего образования.

³⁰ Рыбников К. А. О работах К. Маркса по математике: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1954.

Система учебных заведений, основанная легендарным городским головой Иваном Андреевичем Милютиным, была настолько необычна для России, что уездный город Череповец на страницах газет именовался не иначе как «Северные Афины» или «Русский Оксфорд на Шексне».

Реальное череповецкое училище, которое закончил Майский, как ни странно, оставило заметный след в русской истории. Так, например, среди череповецких «реалистов» первого набора (1873) был будущий профессор, основатель Ленинградского кораблестроительного института И. Н. Воскресенский, в училище учился «король поэтов» Игорь Северянин (Лотарев). Одним из лучших выпускников был Николай Рысаков, первым метнувший бомбу в карету Александра II при покушении на него боевой группы «Народной воли».

После реального училища Майский закончил последний класс классической гимназии в Омске, поскольку только классическое образование открывало путь в университет. В 1901–1902 гг. он учился на историко-филологическом факультете Санкт-Петербургского университета. В 1902 г. за участие в революционном движении был арестован, исключен из университета и выслан в Омск. Уже в 1903 г. он вступает в РСДРП, примкнув к фракции меньшевиков. Увлечение идеями марксизма и сближение с социал-демократическими кругами молодежи привело к тому, что в 1908 г. Майский эмигрировал в Швейцарию, а затем в Германию. В 1912 г. он заканчивает Мюнхенский университет, получив специальность экономиста. Обладая феноменальными способностями к изучению языков, он практически в совершенстве овладевает немецким, французским и английским языками.

После Февральской революции 1917 г. Майский возвратился в Россию и активно работал в аппарате Временного правительства. Он также становится депутатом Учредительного собрания. В 1919 порвал с меньшевиками.

Его политическая карьера в период Гражданской войны получает неожиданное развитие. Во время продвижения войск адмирала Колчака к Волге он становится министром труда в Самарском правительстве Комитета членов Всероссийского учредительного собрания (КОМУЧ). Как известно, финансовые возможности этого правительства-однодневки были более чем значительными. Этим воспользовался Майский. Почти все время существования правительства КОМУЧа он провел в щедро оплаченной научной командировке в Монголии. Может быть, поэтому советская власть не сочла нужным применить к Майскому карательные меры. Более того, в 1921 г. его принимают в ряды РКП(б) и он занимает высокую должность председателя Сибирского госплана. После перевода на работу в Москву, где он получил назначение на пост главного редактора журнала «Звезда», Майский окончательно переходит на дипломатическую работу.

В период с 1929 по 1932 г. Майский был полпредом СССР в Финляндии и способствовал заключению 21 января 1932 г. Договора

о ненападении и о мирном улаживании конфликтов между СССР и Финляндией. С 1932 г. он — полпред (а позднее посол) СССР в Великобритании. Свободное владение английским языком и глубокое знание английской литературы и истории, остроумие и эрудиция сделали его популярной фигурой среди политиков и ученых кругов Лондона.

В 1943 г. Майский был отозван из Лондона, получив, правда, высокое назначение в Москве. С 1943 по 1946 г. он занимает пост замнаркома Наркомата иностранных дел. После 1946 г. — пост советника и консультанта при МИДе.

В 1953 г. он был арестован как английский шпион. Допрашивал его лично Лаврентий Берия. И снова Майскому повезло — с падением Берии он был освобожден. Полностью реабилитирован в 1960 г. В последние годы жизни сумел опубликовать несколько книг и был принят в Союз писателей. Наиболее известные его произведения: «Перед бурей», «Записки посла» и, наконец, вошедший в советскую библиотеку приключений роман «Близко — далеко»³¹ о приключениях семей советских дипломатов во время войны.

Майский прожил долгую жизнь, полную удивительных событий, по-своему похожую на приключенческий роман.

Одним из результатов исследований Рыбникова было определение всех источников, на которые опирался Маркс в своих аналитических разработках. Главным образом это были общепринятые учебники высшей математики на английском и французском языках, авторами которых были Сори, Бушарла, Лакруа, Хайнд, Холл, Хемминг³². Все эти учебники, хотя и отражали идейные установки Даламбера, Лагранжа и Лейбница, практически не использовали подходов Коши, за исключением курса лекций Муаньо³³, с которым Маркс, по-видимому, не успел глубоко познакомиться. Другим не менее важным результатом стал анализ подхода Маркса к выводу теорем Тейлора и Маклорена.

Работа над рукописями Маркса была закончена. Они, по существу, были готовы к публикации. К сожалению, в конце 1966 г. не стало многолетнего руководителя всей работы Софьи Александровны Яновской. Книга, объединяющая все работы Маркса с комментариями, появилась только в 1968 г. к 150-летию со дня его рождения.

³¹ Майский И. М. Близко — далеко. М.: Детская литература, 1961.

³² Sauri, J. L. Cours complet de mathématiques. Paris: J.-F. Bastien, 1778. Т. 5; Bouchardat, J. L. Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris: Bachelier, imprimeur-librairie pour les mathématiques, 1838; Lacroix, S. F. Traité du calcul différentiel et de intégral. Т. 1–3. Paris: Courcier, 1810–1819; Hind, J. The Principles of the Differential Calculus. Cambridge: J. Smith, 1831; Hall, Th. G. A Treatise on the Differential and Integral Calculus and the Calculus of Variations. Cambridge: The University Press; London: J. W. Parker, 1841; Hemming, G. W. An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus. Cambridge: Macmillan, 1848.

³³ Moigno. Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral: rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiées ou inédits de A. L. Cauchy. Paris: Bachelier, 1840–1844.

Подводя итоги анализа работ Маркса, необходимо признать, что, разумеется, он не был профессиональным математиком, хотя, по выражению Энгельса, и «был основательным знатоком математики»³⁴. Тем не менее при знакомстве с его работами полезно обратить внимание на явную попытку создания математической модели, когда в ходе работы с табличными функциями строится непрерывная функция (вообще говоря, многочлен), которая и является математической моделью исходной функции, описывающей табличную функцию.

References

- Boucharlat, J. L. (1838) *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Bachelier, imprimeur-librairie pour les mathématiques.
- Engels, F. (1961) Anti-Diuring [Anti-Dühring]. in: Marks, K., and Engels, F. (Marx, K., and Engels, F.) *Sochineniia. 2-e izd. [Works. 2nd ed.]*. Moskva: Gospolitizdat, vol. 20, pp. 1–338.
- Engels, F. (1961) Dialektika prirody [Dialectics of Nature], in: Marks, K., and Engels, F. (Marx, K., and Engels, F.) *Sochineniia. 2-e izd. [Works. 2nd ed.]*. Moskva: Gospolitizdat, vol. 20, pp. 339–626.
- Hall, Th. G. (1841) *A Treatise on the Differential and Integral Calculus and the Calculus of Variations*. Cambridge: The University Press and London: J. W. Parker.
- Hemming, G. W. (1848) *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*. Cambridge: Macmillan.
- Hind, J. (1831) *The Principles of the Differential Calculus*. Cambridge: J. Smith.
- Ianovskaia, S. A. (1933) O matematicheskikh rukopisyakh K. Marksa [On the Mathematical Manuscripts of K. Marx], *Pod znamenem marksizma*, no. 1, pp. 74–115.
- Katolin, L. (1968) My byli togda derzkimi parniami... [We Were Daring Guys Then...], *Znanie – sila*, no. 3, pp. 15–17; no. 4, pp. 25–27; no. 5, pp. 2–5.
- Katolin, L. (1968) Sud’ba “Matematicheskikh rukopisei” Marksa [The Fate of Marx’s “Mathematical manuscripts”], *Nedelia*, no. 10 (418).
- Lacroix, S. F. (1810–1819) *Traité du calcul différentiel et de intégral*. Paris: Courcier, vols. 1–3.
- Lafarg, P. (Lafargue, P.) (1967) *Vospominaniia o Markse [Reminiscences of Marx]*. Moskva: Politizdat.
- Laskovaia, T. A., Rybnikov, K. K., and Chernobrovina, O. K. (2019) Matematicheskie issledovaniia Karla Marksa. Tseli, predposylki, istochniki [Karl Marx’s Mathematical Studies. Goals, Prerequisites, Sources], in: *Algebra, teoriia chisel i diskretnaia geometriia: sovremennye problemy, prilozheniia i problemy istorii. Materialy XVII mezhdunarodnoi konferentsii, posviashchennoi 100-letiiu so dnia rozhdeniia professora N. I. Fel’dmana i 90-letiiu so dnia rozhdeniia professorov A. I. Vinogradova, A. V. Malysheva i B. F. Skubenko, Tula, 23–28 sentiabria 2019 g. [Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and Problems of History. Materials of the 17th International Conference Dedicated to the Centenary of the Birth of Professor N. I. Feldman and the 90th Anniversary of the Birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev, and B. F. Skubenko, Tula, September 23–28, 2019]*. Tula: TGPU im. L. N. Tolstogo, pp. 244–247.
- Lenin, V. I. (1950) *Sobranie sochinenii. 4-e izd. [Collected Works. 4th ed.]*. Moskva: Gospolitizdat, vol. 29.
- Maiskii, I. M. (1961) *Blizko – daleko [Close – Far Away]*. Moskva: Detskaia literatura.
- Marks, K. (Marx, K.) (1968) *Matematicheskie rukopisi [Mathematical Manuscripts]*. Moskva: Nauka.

³⁴ Энгельс. Анти-Дюринг... С. 11.

- Matthews, P. H. (2002) The Dialectics of Differentiation: Marx's Mathematical Manuscripts and Their Relation to His Economics, *Middlebury College Working Paper Series*, no. 0203.
- Moigno (1840–1844). *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral: rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiées ou inédits de A. L. Cauchy*. Paris: Bachelier.
- Molodshii, V. N. (1969) O matematicheskikh rukopisyakh K. Marksa [On the Mathematical Manuscripts of K. Marx], *Matematika v shkole*, no. 1, pp. 10–23.
- Molodshii, V. N. (1983) Matematicheskie rukopisi K. Marksa i razvitie istorii matematiki v SSSR [Mathematical Manuscripts of K. Marx and the Development of the History of Mathematics in the USSR], *Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki*, no. 2, pp. 29–34.
- Rozov, N. Kh. (1968) Matematicheskie rukopisi Karla Marksa [Karl Marx's Mathematical Manuscripts], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 23, no. 5 (143), pp. 205–211.
- Rybnikov, K. A. (1954) *O rabotakh K. Marksa po matematike: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk [On the Mathematical Works of K. Marx. Thesis for the Doctor of Physical and Mathematical Sciences Degree]*. Moskva.
- Rybnikov, K. A. (1958) K voprosu o poniatii funktsii [On the Concept of Function], *Voprosy filosofii*, no. 11, pp. 89–92.
- Rybnikov, K. K., Chernyshova, A. G., and Evseev, N. V. (2017) Ob odnom klasse matematicheskikh metodov analiza vremennykh riadov. Vozmozhnosti prognozirovaniia i aposteriornykh issledovaniy osobennostei sotsial'no-ehkonomicheskikh protsessov [On a Class of Mathematical Methods for Time Series Analysis. Possibilities for Forecasting and A Posteriori Studies of the Features of Socio-Economic Processes], *Lesnoi vestnik (Forestry Bulletin)*, vol. 21, no. 6, pp. 109–113.
- Sauri (1778) *Cours complet de mathématiques*. Paris: J.-F. Bastien, vol. 5.
- Struik, D. J. (1948) Marx and Mathematics, *Science & Society*, vol. 12, no. 1: A Centenary of Marxism, pp. 181–196.

Received: February 29, 2020.