

М. А. ДУБОВИЦКАЯ

О СТАНОВЛЕНИИ «СОВРЕМЕННОЙ» АЛГЕБРЫ В РОССИИ. КИЕВСКАЯ И МОСКОВСКАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XX в.

В настоящее время слово «алгебра» употребляется в отношении двух, на первый взгляд, совершенно различных наук. Первую из них изучают в средней школе, она трактует о бассейнах и трубах, линейных и квадратных уравнениях, построении и исследовании графиков функций, вторая же – удел немногих, посвятивших свою жизнь математике. Она исследует свойства странных и абстрактных математических множеств, обозначаемых хорошо знакомыми и не имеющими отношения к математике словами – «группа», «поле», «кольцо». Такое амбивалентное словоупотребление имеет и исторические, и смысловые корни, к выяснению которых мы и планируем приступить.

Возьмем для примера справочный словарь Крайя середины XIX в. – определение алгебры там такое:

Алгебра, одна из отраслей математического анализа. Обыкновенно определяют алгебру наукою о свойствах алгебраических функций, или наукою о величинах вообще, когда подвергаем их действиям алгебраическим, производимым над конечным числом конечных же величин. [...] Сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в конечные степени, извлечение радикалов, – все эти действия, производимые над упомянутыми величинами, при конечном числе их; далее, исследование свойств алгебраических уравнений и решение их, т. е. определение неизвестных по данным величинам из определенной зависимости между теми и другими, суть предметы алгебры ¹.

Это определение полностью соответствовало программам по алгебре. Начиная с 7 класса, во всех школах курс математики делился на алгебру и геометрию, и для большинства людей математика так и оставалась на всю жизнь их дуэтом. Что такое геометрия, евклидова геометрия в рамках школьного курса, интуитивно все более или менее понимают. А что же такое алгебра? Школьная алгебра обычно изучает разнообразные уравнения и их системы, методы их решения, графики, локальные экстремумы. То есть алгебра – наука об уравнениях? В общем, такое определение для «старой», или «классической», алгебры довольно точно.

В университетских курсах по высшей алгебре XIX – начала XX вв. было принято изучать решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней, отыскание рациональных корней, различные способы вычисления приближенных корней (способы Ньютона, Лежандра, Лагранжа), разложение рациональных

¹ Справочный энциклопедический словарь. В 12 тт. / Ред. А. Старческий. СПб., 1847. Т. 1. С. 22.

дробей на простейшие. С середины XIX в. к этому списку добавились симметрические функции и теория определителей (которая чаще всего читалась отдельным курсом). В некоторых университетах (например, Петербургском и Казанском) доказывалась знаменитая теорема Абеля о неразрешимости в радикалах уравнений выше 4-й степени в общем случае. Она подтолкнула молодого Э. Галуа к изучению вопроса, в каких же случаях многочлен степени выше 4-й будет иметь решение, выражающееся рациональной функцией через его коэффициенты. Ответ в современной форме звучит так: уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима группа Галуа поля разложения этого многочлена. И это уже совсем другая наука – алгебра групп и полей, алгебра абстрактных структур, «новая» алгебра. Кстати, термин «группа» был впервые введен Галуа. Начиная со второго издания «Большой советской энциклопедии» (БСЭ), справочники дают определения, мало похожие на предыдущее:

Алгебра в более широком, современном понимании может быть определена как наука о системах объектов той или иной природы, в которых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. [...] Этот новый взгляд на алгебру, вполне оформившийся лишь в 20 веке, способствовал дальнейшему расширению области применения алгебраических методов, в том числе и за пределами математики, в частности в физике. Вместе с тем он укрепил связи алгебры с другими отделами математики и весьма усилил влияние алгебры на их дальнейшее развитие².

Однако именно так термин «алгебра» трактуется в современных энциклопедиях. В третьем издании БСЭ было сформулировано основное свойство абстрактных структур, изучаемых алгеброй:

Для современной алгебры характерно то, что в центре внимания оказываются свойства операций, а не объектов, над которыми проводятся эти операции³.

Один из ведущих советских математиков И. Р. Шафаревич писал:

Алгебра играет приблизительно ту же роль, что и язык или письменность в контакте человека с внешним миром. [...] При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру – с музыкой⁴.

Грубо говоря, эти две части математики – алгебра и геометрия – подобны системе координат, позволяющей человеку ориентироваться в виртуальном пространстве, при этом геометрия формирует ощущение самого пространства, а алгебра дает язык, позволяющий его эффективно описывать. В последнее столетие четко прослеживается тенденция «алгебраизации» математики, состоящей в том, что изучение объектов, далеких от алгебры, подменяется

² Курош А. Г., Шмидт О. Ю. Алгебра // Большая советская энциклопедия. 2-е изд. М., 1950. Т. 2. С. 53–62.

³ Фаддеев Д. К. Алгебра // Большая советская энциклопедия. 3-е изд. М., 1970. Т. 2. С. 58–70.

⁴ Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. М., 1999. С. 9.

изучением алгебраических систем, позволяющих эти объекты хорошо описывать (наиболее значимые достижения в топологии были получены именно этим путем).

В Европе процесс трансформации алгебры уравнений в алгебру абстрактных структур происходил в конце XIX – начале XX вв. и был связан в первую очередь с немецкой математической школой (Д. Гильберт, Э. Нётер, В. Крулль, Б. Л. Ван дер Варден и др.). Принято считать, что новая наука восторжествовала в 1930 г.⁵, когда вышла книга Ван дер Вардена «Современная алгебра»⁶.

В России переход к «новой» алгебре начался несколько позже, только после возвращения на родину в 1902 г. профессора Киевского университета Д. А. Граве (1863–1939), побывавшего в научной командировке в Кристиании (ныне Осло). Там, на конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н. Абеля, он познакомился с многими европейскими учеными и «заразился» новой тематикой. Примечательно, что спустя 30 лет, в 1932 г. на Всемирном конгрессе математиков в Цюрихе пленарный доклад о состоянии современной теории Галуа, связанный со 100-летием со дня смерти Галуа, было поручено сделать ученику Граве, Н. Г. Чеботареву, как ведущему специалисту в мире в этой области.

Первые отечественные работы по теории групп и теории Галуа

Если под старой алгеброй понимается наука об уравнениях, то новая алгебра началась с теории групп и теории Галуа. Эти теории, поначалу тесно связанные между собой, начали развиваться во второй половине XIX в. В 1846 г. Ж. Лиувилль опубликовал самую важную часть работ Галуа в «Журнале чистой и прикладной математики»⁷, сделав их доступными широким математическим кругам. Но изложение Галуа было излишне скупым и требовало очень вдумчивого прочтения, ежели читатель хотел разобраться, в чем тут дело. Желавших было немного и теория не сразу стала пользоваться популярностью. В 1870 г. К. Жордан написал книгу «Алгебраические уравнения и теория подстановок», сказав в предисловии, что эта книга – лишь комментарий к работе Галуа. Именно этот труд привлек внимание математического мира к работам Галуа, потому что впервые его открытия предстали перед читателями не в разрозненном виде, а в систематическом изложении, понятном для всех. И потребовалось еще 40 лет, чтобы теория Галуа начала завоевывать аудитории российских университетов. Конечно,

⁵ Были и другие взгляды на алгебру, отрицающие деление на «старую» и «новую» науку. Так, А. Г. Курош писал: «Впрочем, само противопоставление алгебры современной (или новой) алгебре классической (или старой) основано на недоразумении. В действительности, подобно тому как развитие теории алгебраических уравнений с необходимостью привело к возникновению теории алгебраических числовых полей и теории конечных групп, дальнейшее развитие алгебры и всей математики в целом сделало вполне закономерным переход к общей теории полей и к теории бесконечных групп, а также возникновение и бурное развитие теории колец» (Математика в СССР за 30 лет. 1917–1947 / Ред. А. Г. Курош, А. И. Маркушевич, П. К. Рашевский. М.: JL, 1948. С. 106).

⁶ Waerden B. L., van der. *Moderne Algebra*. Berlin, 1930.

⁷ Galois, E. *Oeuvres mathématiques* // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1846. Т. 11. Р. 381–444.

было бы логично ожидать, что прежде, чем произойдет изменение университетских курсов лекций по алгебре (семинаров в это время в большинстве университетов еще не было), появятся самостоятельные научные работы по новой проблематике. Однако такой картины мы не наблюдаем⁸. Нами найдено лишь две публикации по «современной» алгебре, обе носившие компилятивный характер, и один учебник с элементами «новой» алгебры, также не содержавший самостоятельных результатов.

Самая первая работа на русском языке, посвященная теории Галуа, – магистерская диссертация Д. М. Деларю – появилась в 1864 г. в Харькове, т. е. за 6 лет до выхода книги Жордана. Затем в Петербурге в 1885 г. была опубликована магистерская диссертация Д. Ф. Селиванова «Теория алгебраического решения уравнений». Обе эти работы не содержат самостоятельных результатов, в них изложена теория Галуа, местами заметно упрощенная, однако в обеих работах дан достаточно подробный исторический обзор вопроса. Широкой известности они не получили. В 1890 г. М. Е. Ващенко-Захарченко, на тот момент уже 23 года как профессор Киевского университета, издал учебное пособие «Высшая алгебра. Теория подстановлений и приложение ее к алгебраическим уравнениям». В предисловии он писал:

Изложена теория подстановлений, приложение ее к алгебраическому решению уравнений и решению уравнения 5-ой степени с помощью эллиптических функций. В нашей математической литературе по этому предмету ничего не имеется, поэтому я думаю, что этот труд будет полезен лицам, изучающим основательно и глубоко Высшую алгебру⁹.

То есть работы Деларю и Селиванова ему известны не были, хотя наверняка он следил за публикациями. В сочинении Ващенко-Захарченко изложены некоторые результаты из теории групп и теории Галуа, вводятся понятия композиции подстановок, транспозиций, транзитивных групп, примитивных групп. Его терминология заметно отличается от современной: переносные группы вместо транзитивных, перемещения вместо транспозиций, подстановления вместо подстановок, особенные подгруппы вместо инвариантных и т. д. Упомянул ли Ващенко-Захарченко о теории Галуа и теории групп в своих лекциях, нам неизвестно. Его пособие состояло из двух огромных книг, 500 страниц в первом томе и 420 во втором. Поскольку прочесть такой объем в течение одного семестра представляется мало вероятным, а вопросы современной алгебры были изложены в конце второго тома, скорее всего до них добирались лишь самые пытливые студенты.

Что касается университетских курсов лекций, то мы можем отметить крайне низкий уровень преподавания алгебры в Московском университете. Курс, разработанный профессором В. Я. Цингером в 1870-х гг., практически без изменений читался вплоть до начала 1930-х гг. В Варшаве, Дерпте, Харькове курсы алгебры также обновлялись медленно. Несколько лучше ситуация была в

⁸ Отметим, что мы рассматриваем работы исключительно по теории групп и теории Галуа. Если полагать, что к современной алгебре относятся вопросы на стыке алгебры и теории чисел, то необходимо отметить выдающиеся работы А. А. Маркова, Е. И. Золотарева и Г. Ф. Вороного.

⁹ Ващенко-Захарченко М. Е. Высшая алгебра. Теория подстановлений и приложение ее к алгебраическим уравнениям. Киев, 1890. С. 7.

Петербургском и Казанском университетах. Профессор последнего А. В. Васильев в 1886 г. издал свои лекции по алгебре под названием «Алгебраический анализ. Теория буквенных уравнений в связи с теорией субституций» (субституции = подстановки). Причем в отличие от учебника Ващенко-Захарченко, объем книги позволяет надеяться, что все написанное действительно рассказывалось студентам. В книге Васильева достаточно подробно рассматриваются группы подстановок, упоминается большое количество фактов и понятий из теории групп, например, композиционный ряд группы, но все это дается достаточно туманно и неотчетливо. Имеется и формулировка теоремы Галуа об уравнении простой степени, решаемом в радикалах, и теорема Абеля (с доказательством). Васильев вплотную подошел к теории Галуа и упоминал на лекциях теорему Галуа о разрешимости в радикалах уравнений, все корни которых рационально выражаются через произвольные два (без доказательства). В Петербургском университете основной курс алгебры читал профессор Ю. В. Сохоцкий, и он являл собой пример классической алгебры. Но помимо этого Сохоцкий читал спецкурс по алгебре. Нам трудно судить о его содержании, поскольку его программы или лекций не сохранилось, но судя по списку рекомендованной литературы, он содержал элементы теории Галуа и теории групп.

В Киевском университете уровень преподавания алгебры также оставался посредственным вплоть до начала XX в. Ситуация начала коренным образом меняться с появлением здесь Граве, который, как уже говорилось, и принес идеи «новой» алгебры в Россию. Ему мы обязаны также основанием Киевской алгебраической школы – первой в России.

Д. А. Граве. Особенности биографии

Судьба Граве была довольно сложной и запутанной, и если бы не цепь случайностей, возможно, он никогда бы не стал заниматься алгеброй.

Его род берет свое начало в Бельгии (отсюда и фамилия), сам Граве родился в г. Кириллове Новгородской губернии, учиться в гимназию он пошел уже в Петербурге, после окончания университета перебрался в Харьков, но большую часть жизни преподавал в Киеве¹⁰.

Граве закончил Петербургский университет, вместе с Е. И. Золотаревым и А. А. Марковым он принадлежал к младшему поколению школы Чебышева. Неудивительно, что его научные интересы лежали в области дифференциальной геометрии и дифференциальных уравнений. Его научным руководителем был А. Н. Коркин, предложивший тему магистерской диссертации «Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка», тесно примыкающую к его собственным исследованиям.

Защита состоялась 30 апреля 1889 г., после чего Граве стал приват-доцентом на кафедре чистой математики Петербургского университета. Одновременно он читал лекции в Институте инженеров путей сообщения и на Бес্তুжевских женских курсах, работал над созданием учебных пособий по геометрии и дифференциальным уравнениям и писал докторскую диссертацию. В начале 1896 г. Граве представил работу на тему «Об основных задачах ма-

¹⁰ См. подробную биографию Граве в кн.: *Добровольский В. А.* Дмитрий Александрович Граве. 1863–1939. М., 1968; *Урбанский В. М.* Дмитрий Граве и время. Киев, 1998.

тематической теории построения географических карт» и уже в апреле того же года ее защитил. Заметим, что уровень работы был очень высок, ее тут же заметили в Европе. В ней Граве решил изящную задачу дифференциальной геометрии, имеющую приложение к черчению карт. Поскольку поверхность Земли нельзя изобразить на плоскости без искажений, применяется два основных вида проекций: конформные (подобные в бесконечно малых частях) и эквивалентные (площади на карте пропорциональны площадям на Земле). Лагранжем были найдены все виды конформных проекций, аналогичная задача для эквивалентных проекций оказалась куда более трудоемкой. Коркину не удалось ее решить, Граве же решил полностью, описав все 11 типов проекций¹¹. Кроме того, он доказал теорему Чебышева о наилучшей проекции.

Несмотря на все эти достижения получить должность в Петербурге, соответствующую новому званию доктора наук, Граве не удалось. Практически сразу после защиты он женился на Елене Сониной, дочери знаменитого математика академика Н. Я. Сониной. Тот враждовал с Коркиным, и это печально сказалось на отношениях будущих родственников – Сонин был категорически против свадьбы, и молодые венчались тайно. Развивающийся конфликт с тестем негативно сказался на карьере Дмитрия Александровича – он с семьей был вынужден покинуть Петербург. По приглашению своего товарища А. М. Ляпунова, с которым Граве вместе учился¹², в апреле 1898 г. он прибыл в Харьков, где получил должность ординарного профессора по кафедре чистой математики. Спустя два с небольшим года он получил приглашение от киевского профессора Б. Я. Букреева баллотироваться на вакантную профессорскую должность в киевском университете Св. Владимира. Из четырех кандидатов был выбран именно Граве; в январе 1902 г. он стал одиначным профессором по кафедре чистой математики, и вся его дальнейшая жизнь была связана с Киевом. Здесь на протяжении почти 40 лет он читал лекции по аналитической геометрии, алгебре, теории чисел, теории эллиптических функций, теории групп, а также разработал ряд специальных курсов.

Как уже говорилось, летом 1902 г. Граве совершил поездку в Кристианию для участия в праздновании 100-летия со дня рождения Н. Абеля. Скорее всего, именно во время этой первой поездки он и заинтересовался проблемами современной алгебры. И надо отдать должное его математической интуиции – он почувствовал, что в этом направлении, практически неизвестном в России, таится большой потенциал, что изучение абстрактных структур скоро станет одной из ведущих тем в математике. Возможно, эта интуиция опиралась на хорошее знание истории математики, которой Граве всегда интересовался. Забегая вперед отметим, что и в последующие годы математическая интуиция не подводила Граве: так, например, в 1930-е гг. он занимался проблемами воздухоплавания, дирижаблестроения и даже ракетостроения, т. е. проблемами, которые, действительно, оказались со временем весьма востребованными.

¹¹ Граве Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт (докторская диссертация). СПб., 1896.

¹² Ляпунов также принадлежал младшему поколению школы Чебышева, и они с Граве постоянно пересекались в Петербургском университете.

В последующие годы на летнее каникулярное время Граве часто отправлялся в Европу, где посещал лучшие университеты, знакомился с известными математиками, изучал их новейшие работы. Он познакомился со многими крупными европейскими математиками: Ш. Эрмитом (Париж), К. Гензелем (Марбург), Ф. Фробениусом (Берлин), Г. Шварцем (Берлин), Г. Мертенсом (Вена). Со многими учеными, например, Э. Нётер, Граве состоял в переписке.

Алгебраические работы Граве

Алгебраическая тематика очень увлекла Граве. Вернувшись в Киев, он начал самостоятельно изучать работы Абеля, Галуа, усиленно штудировать теории алгебраических кривых и эллиптических функций. В протоколах совета факультета от 29 января 1903 г. (т. е. спустя полгода после первой поездки) отмечается:

[Получено] заявление ординарного профессора Граве о том, что им открыты необязательные практические занятия со студентами по теории алгебраических линий по два часа в неделю¹³.

7 октября 1903 г., после прочтения курса, он просит совет факультета ассигновать ему 400 рублей на издание литографированного курса «Алгебраическое решение уравнений», но ему было отказано. Также, исходя из прочитанного курса, Граве объявил студентам темы для научных сочинений. За работу «О кривых линиях третьего порядка» В. П. Вельмин, тогда студент второго курса, получил золотую медаль, а его сочинение было напечатано в «Университетских известиях».

Занятия алгеброй фактически похоронили Граве как ученого. Он имел прекрасные результаты в дифференциальной геометрии и подавал большие надежды. Продолжай он свои исследования, начатые в докторской диссертации, наверняка бы ему удалось стать одним из ведущих европейских специалистов. В алгебре серьезных результатов ему достичь не удалось. Все его научные публикации в этой области, которых, кстати, совсем немного, состояли в упрощении доказательств уже известных теорем. Кроме того, преподавание отнимало у него очень много сил и времени. Он активно участвовал в жизни Киевского университета и, кроме того, преподавал еще в нескольких вузах. Помимо лекций он вел много необязательных семинарских занятий, что резко увеличивало его нагрузку. Граве читал самые разнообразные курсы, и практически по каждому из них написал учебное пособие. Вот основные из них: «Теория конечных групп» (1908), «Элементарный курс теории чисел» (1909, 2-е изд. 1913), «Элементы теории эллиптических функций» (1910), «Арифметическая теория алгебраических величин» (Т. 1. «Квадратичная область». 1910; Т. 2. «Теория идеалов». 1912), «Курс алгебраического анализа» (1910), «Элементы высшей алгебры» (1914), «Об основных положениях теории Галуа» (1914).

В создании и издании учебных книг существенную помощь Граве оказывали его ученики. В. П. Вельмин был «соавтором» книги «Арифметическая тео-

¹³ Государственный архив г. Киева. Ф. 16. Оп. 465. Д. 1768. Л. 3.

рия алгебраических величин» (в конце книги помещена его статья в качестве приложения). К. Ф. Абрамович помогал составлять «Введение в анализ» и «Теорию эллиптических функций». Е. И. Жилинский принимал участие в первом издании «Курса теории чисел», О. Ю. Шмидт – во втором издании. В.А. Зморович был соавтором «Аналитической геометрии».

Граве старался улаживать проблемы с учебой своих учеников, даже если они касались других предметов. В воспоминаниях Б. Н. Делоне можно найти такой эпизод:

Шмидт держал все экзамены на 2 месяца раньше меня. На каком-то первом из них строгий экзаменатор ¹⁴ хотел поставить ему посредственно, но Граве настоял на том, чтобы поставили отлично. После этого вышло особое постановление Совета университета о том, чтобы отметки ставил только экзаменатор ¹⁵.

Граве все время пытался усовершенствовать систему преподавания, создать какие-то общие требования к экзаменам. Именно по его инициативе они стали проводиться два раза в год, в две сессии, а не в одну, как это было до него. Он стал читать лекции в новом для Киевского университета стиле: строгое, доказательное, последовательное изложение, связанное с последними достижениями математической мысли. Вот что пишет об этом Делоне:

Д. А. Граве был замечательным профессором, его лекции отличались глубиной мысли и необыкновенным блеском изложения. Д. А. считал, что и общеобязательные курсы (он читал обычно аналитическую геометрию, высшую алгебру и теорию чисел) должны давать широкую картину предмета, причем надо подчеркивать связи между отдельными математическими дисциплинами. Особое значение он придавал специальным курсам и семинарам. На них-то и выдвигались ученики Граве ¹⁶.

Сам Граве много сил положил на то, чтобы университет стал в первую очередь научным центром, в котором бы возвращались молодые кадры. Он ратовал за то, чтобы большее количество студентов оставлялось при кафедре в качестве стипендиатов, и большее количество выпускников при университете, чтобы отбор научных кадров проводился в ходе их творческой работы. И в то время, когда постоянно сменяющиеся власти Украины требовали от высшей школы украинизации, политической благонадежности и быстрых результатов на благо народного хозяйства, Граве много размышлял над тем, как бы сделать деятельность высших учебных заведений более эффективной. Чуть раньше, 14 мая 1917 г. он писал по этому поводу в письме к В. А. Стеклову:

Я хочу Вам сообщить мои мысли, которые я давно сообщаю моим друзьям и знакомым, о желательном направлении школьной политики в вопросе о высшей школе. [...] Я ставлю три принципа в основу новой школы: свободу, децентрализацию и демократизацию. Свободу я понимаю в смысле возможной краткости и лаконичности нового университетского устава, который не ме-

¹⁴ Г. В. Пфейффер.

¹⁵ Цит. по: Урбанский. Дмитрий Граве и время... С. 81.

¹⁶ Делоне Б. Н. В Киевском университете // Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность. М., 1959. С. 181.

шал бы жизни школы развиваться самостоятельно в зависимости от местных условий. Поставьте по возможности меньше рогаток и формалистики... Децентрализацию я понимаю, как стремление основать высшие школы по всей территории России, а не сгущать их в немногих центрах. Без большого числа провинциальных университетов невозможен прогресс культуры провинции... Под демократизацией науки я понимал обязательность для научного университета руководить также и народным, который должен быть слит с научным. В особенности это верно для провинции ¹⁷.

В весеннем семестре 1908 г. Граве прочитал курс по теории чисел, еще не обязательный. После этого он обратился к совету физико-математического факультета с просьбой включить теорию чисел в обязательную программу. Граве указывал на то, что Петербургский университет включил теорию чисел в свою программу, и исследования по теории чисел прославили школу Чебышева на весь мир. Его прошение было удовлетворено, теория чисел стала читаться в Киевском университете как обязательный курс с 1908 г. и сохраняет этот статус по настоящее время. Он также разработал программу по «Основному курсу теории чисел» и на базе прочитанных лекций подготовил монографию «Элементарный курс теории чисел», первое издание которой вышло в 1909 г., а второе, существенно дополненное, – в 1913 г. Второе издание было уникальным, не имевшим аналогов в русской литературе. Первые пять глав повторяли первое издание и соответствовали обычным университетским курсам. Следующие же десять содержали все последние достижения в теории чисел, а также некоторые результаты, полученные на стыке алгебры и теории чисел. Были включены результаты работ Кю Гаусса, Э. Галуа, Н. Абеля, Л. Кронекера, Ш. Эрмита, П. Дирихле, Д. Гильберта, К. Якоби, К. Жордана, Г. Вебера, Г. Минковского, Э. Ландау, Э. Варинга, К. Гензеля, Ф. Фробениуса, а также отечественных математиков Л. Эйлера, П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. Н. Коркина, Г. Ф. Вороного и др.

В этих заключительных главах автор дает представление читателю о целях и нерешенных задачах как классической, так и современной теории чисел. Особое внимание было уделено теории конечных полей и ее приложениям, была показана связь идеальных чисел с конечным полем и теорией алгебраических решений уравнений. Граве отмечает новый вид поля – p -адические числа – и доказывает, что p -адические числа Гензеля действительно образуют поле. Кроме того, он включил в монографию достижения своих учеников: «теорему студента Шмидта» и «теорему студента Жилинского». В конце книги Граве привел ряд таблиц, в том числе таблицу индексов простых чисел Якоби, которую он сделал вместе со своими студентами.

Суть таблицы проста. Если задано показательное сравнение $a^x \equiv b \pmod{p}$, где p – простое число, то число a называется первообразным корнем простого числа p . Известно, что если b не делится на p , то это сравнение всегда можно решить. Тогда x будет называться индексом числа a , а первообразный корень a – основанием индекса. Теория показательных сравнений очень похожа на теорию логарифмов, и эти индексы удобны тем, что при вычислениях позволяют заменить трудоемкую операцию умножения на сложение индексов, а возведение в степень на умножение индекса на число. Якоби составил табли-

¹⁷ Архив РАН. Ф. 162. Оп. 2. Д. 108. Л. 26, 27.

цу индексов для всех простых модулей до 1000¹⁸. В научной литературе Граве встретил замечание о том, что для второй тысячи индексы никогда не будут вычислены, т. к. это занятие излишне трудоемкое. Однако он решил попробовать решить задачу коллективно, составил план и обратился к студентам-математикам Киевского университета принять участие в составлении таблицы. 63 студента согласились, и за 6 недель таблица была составлена. В январе 1910 г. Граве принимал участие в XII Съезде русских естествоиспытателей и врачей в Москве, где доложил коллегам о своих результатах в докладе «О вычислении таблицы индексов для второй тысячи». По воспоминаниям некоторых участников съезда, впечатление было очень сильное, потому что никто не ожидал, что идея коллективного труда в математике может принести такие плоды. Даже история создания этой таблицы простых индексов показывает, что в Киевском университете Граве проявлял себя в первую очередь не как ученый, а как блестящий организатор и популяризатор науки.

Семинар Граве в Киевском университете

В 1904 г. начал свою работу семинар Граве по алгебре, благодаря которому вокруг Дмитрия Александровича сложилась группа учеников, впоследствии получившая название «Киевская алгебраическая школа». Киевский университет одним из первых стал использовать семинарские занятия как новую форму обучения. Еще до приезда Граве в Киев профессора Б. Я. Букреев и В. П. Ермаков вели различные семинары, на которых студенты, начиная с младших курсов, после изучения научной литературы по специальности занимались реферированием. В том же стиле начал свою работу семинар Граве. Занятия проводились либо во внелекционное время в математическом кабинете при кафедре, либо у него дома. В 1906–1907 гг. Граве серьезно болел и находился на лечении за границей, в это время семинар не работал, но в 1907 г. по возвращении из-за границы Дмитрий Александрович возобновил занятия у себя дома. Таким образом, в течение первых четырех-пяти лет традиция семинаров укрепилась, хотя и проводились они нерегулярно. В последующие годы (1908–1911) особое внимание на семинаре уделялось теории групп. Вот что об этом пишет сам Граве:

В моем стремлении поднять преподавание чистой математики в Киевском университете я столкнулся с большими препятствиями косности официальных программ. Теории групп не было места в обязательном преподавании.

Желая тем не менее дать серьезным студентам, занимающимся наукой, возможность практически познакомиться с теорией групп и получить, таким образом, в свое распоряжение сильное орудие исследования, я выделил один день в неделю из моего семинара, который посвятил теории групп. Я назвал занятия по теории групп просеминаром, желая этим подчеркнуть элементарность указанной теории: элементарность не в смысле простоты ее, а в том смысле, что основы теории групп не требуют почти никаких предварительных сведений по другим предметам.

Занятия в этом просеминаре проходили в осеннем полугодии 1911 г. по субботам. Самый характер занятий был такой. Мы взяли книгу Е. Paskal «Repertorium der hoheren Analysis», в которой заключается статья проф.

¹⁸ Jacobi, C. G. J. Canon Arithmeticus. Berlin, 1839.

Loewy об абстрактной теории групп. В этой статье перечислены теоремы без доказательства с подробными литературными ссылками. Эти теоремы представлялись в русском переводе в книге, находившейся в помещении математического семинара. Студенты должны были пробовать сами доказать теоремы и, если встречали затруднение, то могли обратиться к литературе ¹⁹.

В 1913 г. на семинаре Граве студенты изучали конечные группы ортогональных преобразований и теорию алгебраических функций с арифметической и групповой точек зрения. В другие годы темами занятий были: арифметическая теория квадратичных форм, теория идеалов, теория эллиптических функций и связанные с ней проблемы теории чисел, общая теория полей и др. Обсуждались также отдельные вопросы, касающиеся издания новых курсов Граве.

Много позже сам он о своем семинаре писал следующее:

Моя школа имела блестящих по способностям учеников, и я горжусь тем, что свободные приемы работы с ними давали быстрые и хорошие результаты. Семинар мой проходил у меня на дому ²⁰. Он не находился ни в каком отношении к официальному преподаванию в университете. Кроме того, также не находясь ни в каких отношениях с университетским преподаванием, происходил по вечерам мой семинар в здании университета. Единственное, в чем я поддерживал связь с общим университетским преподаванием это то, что требовал, чтобы мои ученики сдавали экзамены по другим дисциплинам удовлетворительно ²¹.

Граве выбивал из университета целевые командировки в отечественные и зарубежные научные центры для своих воспитанников. Например, Абрамович посетил Берлинский, Геттингенский, Марбургский и Мюнхенский университеты для ознакомления с различными стилями и методиками чтения лекций. Вельмина командировали в Геттингенский университет для слушания лекций в течение летнего семестра 1908 г., Граве мотивировал просьбу об этой поездке тем, что направление математических исследований Вельмина связано в последними достижениями германской математической школы, а в Киеве исследования по этому направлению не проводились и не проводятся. М. Ф. Кравчук был отправлен в Москву, чтобы ознакомиться с абстрактной теорией функций, которой совсем не занимались в Киеве, но которая занимала умы московских математиков.

Заметим, что Граве не ограничился руководством семинаром. Он понимал, что элементы «современной» алгебры необходимо вводить в основной университетский курс. После нескольких лет успешной работы семинара им была разработана программа курса «Основы новой математики», состоявшая из таких разделов как «Обобщение понятия о числе», «Кватернионы Гамильтона», «Теория групп», «Теория множеств», «Теория полей» и др. На практике эта программа опробована не была, однако на ее базе была написана монография «Элементы высшей алгебры».

¹⁹ Центральный государственный исторический архив Украины. Ф. 708. Оп. 405. Д. 1855. Л. 12.

²⁰ В 1904–1905 гг., затем в 1912–1914 гг.

²¹ Граве Д. А. Моя жизнь и научная деятельность (рукопись) (библиотека Института математики НАН Украины. Оп. 1. Д. Г-75. Л. 36–37; цит. по: Добровольский. Дмитрий Александрович Граве... С. 85).

Семинар Граве вынужденным образом сошел на нет после революции. В декабре 1917 г. в университете для студентов были объявлены досрочные каникулы на неопределенное время, часть их забрали на фронт. Государственные перевороты шли один за другим, и руководство университета не успевало договориться с руководством страны о своей дальнейшей судьбе. В 1920 г. Киевский университет был расформирован²². После окончательного установления советской власти на Украине заниматься вопросами чистой математики стало практически невозможно (именно поэтому Делоне предпочел переехать в Петроград). Руководство страны требовало развития механики и прикладной математики, надеясь на помощь ученых в деле восстановления народного хозяйства. Граве стал заведующим кафедры прикладной математики АН Украины и начал активно заниматься изучением магнитного поля Солнца и роли электрических сил в небесной механике. Так закончился период расцвета Киевской алгебраической школы, связанный с университетом Св. Владимира.

Мы попытались восстановить список наиболее активных участников семинара Граве и их дальнейшую судьбу, что было весьма непросто, поскольку значительная часть архива Киевского университета была уничтожена во время Отечественной войны. Перечислим фамилии наиболее известных из них, чья дальнейшая судьба была связана с математикой.

• *К. Ф. Абрамович*

Профессорский стипендиат с 1913 г. Основные научные интересы лежали в области гипергеометрических функций, за студенческую работу «О гипергеометрическом ряде» был награжден золотой медалью. В 1916–1917 гг. Абрамович, будучи приват-доцентом, читал в Киевском университете спецкурс по теории эллиптических функций. Позже преподавал математику в различных вузах Польши.

• *В. П. Вельмин*

Профессорский стипендиат с 1907 г. За статью «О кривых линиях третьего порядка» награжден золотой медалью. В 1909 г. после сдачи магистерских экзаменов стал преподавателем Варшавского университета. В 1914 г. в Варшаве опубликовал монографию «О квадратичном законе взаимности в произвольной квадратичной области», посвященную обобщению закона взаимности. Это была одна из первых работ на русском языке по этой теме. В 1915–1950 гг. Вельмин состоял профессором математики в Ростове, куда в связи с немецким наступлением переехал Варшавский университет, руководил там исследованиями по алгебре и теории чисел. В 1950 г. он вернулся в Киев, где стал заведовать кафедрой высшей математики в Институте легкой промышленности.

• *Е. И. Жилинский*

Профессорский стипендиат с 1911 г. В 1911–1917 гг. занимался теорией *p*-адических чисел. За свою первую студенческую работу «Новейшие течения в теории идеалов» награжден серебряной медалью. В 1913 г. сделал

²² В 1920 г. на базе университета Св. Владимира был создан Высший институт народного образования имени М. П. Драгоманова (с 1926 г. – Киевский институт народного образования), а также институты социального образования, профессионального образования и физико-химико-математический институт. В 1933 г. на Украине были восстановлены государственные университеты, среди которых был и Киевский государственный университет. В 1939 г. ему было присвоено имя Т. Г. Шевченко.

доклад на заседании Геттингенского физико-математического общества, который произвел такое хорошее впечатление, что Гильберт дал указание опубликовать основанную на докладе статью вне очереди в «Mathematische Annalen», а Ландау включил ее в свой курс. В 1915–1916 гг. работал ассистентом в Киевском университете, впоследствии преподавал в различных вузах Польши.

• *Б. Н. Делоне*

Профессорский стипендиат с 1916 г. Первое студенческое сочинение Делоне «О соотношении между теорией идеалов и теорией Галуа» было награждено золотой медалью. Он занимался теорией Галуа и теорией идеалов, а также некоторыми вопросами теории чисел. В 1922 г. был приглашен на должность профессора в Петроградский университет и проработал там до 1935 г., считается основателем Ленинградской алгебраической школы. В 1929 г. Делоне стал членом-корреспондентом АН СССР. Одновременно с должностью в университете он занимал должность заведующего отделом алгебры Физико-математического института им. В. А. Стеклова. В 1934 г. институт был разделен на два независимых учреждения – Математический институт им. В. А. Стеклова и Физический институт им. П. Н. Лебедева, которые были переведены в Москву, из-за чего в 1935 г. Делоне как глава отдела также переехал в столицу. С 1935 по 1942 гг. он был профессором Московского университета, читал в основном геометрические предметы. Делоне с рядом своих учеников (Д. К. Фаддеевым, В. А. Тартаковским, И. Р. Шафаревичем) занимался вопросами алгебраической геометрии и геометризации теории Галуа.

• *О. Ю. Шмидт*

Профессорский стипендиат с 1914 г. Является основателем Московской алгебраической школы (подробнее о нем см. ниже).

• *А. М. Островский*

15-летнего Островского, ученика частного коммерческого училища, привел к Граве его учитель математики. Граве проверил его способности, после чего Островский стал активным участником семинара. После окончания коммерческого училища он не мог поступить в университет, так как не имел аттестата зрелости. Граве ходатайствовал перед попечителем округа о допуске Островского к экзаменам экстерном, но ему было отказано. Тогда Граве написал письма Ландау в Геттинген и Гензелю в Марбург с просьбами об устройстве Островского. Принять мальчика согласились оба, и Граве посоветовал своему ученику поступить сначала в Марбургский университет, а затем совершенствоваться в Геттингенском. Первые работы Островского были посвящены абстрактной теории полей. Уже к началу 1920-х гг. Островский был известен как один из ведущих алгебраистов. Он много работал с Ф. Клейном, редактировал его сочинения, был помощником Крелля в его журнале. С 1927 г. работал профессором Базельского университета.

• *М. Ф. Кравчук*

Профессорский стипендиат с 1 января 1915 г., участник семинара. С дипломного сочинения «О параметрическом представлении перестановочных матриц» началась разработка Кравчуком теории матриц. В 1924 г. он защитил докторскую диссертацию «О квадратичных формах и линейных преобразованиях», в которой продолжил свои исследования. В 33 года он стал профессором в Киевском университете, а в 37 лет – действительным членом Украсо-

инской АН. В 1929 г. активная гражданская позиция Кравчука привела его к конфликту с властями, в итоге в 1938 г. он был арестован, а в 1942 г. расстрелян, точная дата его смерти и место захоронения неизвестны.

• *Н. Г. Чеботарев*

Профессорский стипендиат с 1916 г. Изучал теорию алгебраических функций и алгебраические числа по Гензелю, связанные с p -адическими разложениями. В 1918–1921 гг. был приват-доцентом в Киевском университете, в 1921 г. уехал к родителям в Одессу и там продолжил свои исследования в местном университете. Главный результат в теории Галуа, полученный Чеботаревым, состоит в решении проблемы Фробениуса об определении плотности множества простых чисел, принадлежащих заданному классу автоморфизмов группы Галуа нормального расширения поля рациональных чисел (1922). Решение проблемы Фробениуса принесло ему мировую известность. В 1927 г. Чеботарев получил назначение в Казанский университет на должность заведующего кафедрой математики, где проработал почти 20 лет. Им была создана Казанская алгебраическая школа, основные интересы которой до сих пор сосредоточены на группах и алгебрах Ли.

Таким образом, если мы посмотрим на дальнейшее распространение «современной» алгебры в России, то увидим, что в первой половине XX в. возникает несколько новых научных центров, в первую очередь в Москве, Ленинграде и Казани. Все три школы были созданы учениками Граве – Шмидтом, Делоне и Чеботаревым, – которые по тем или иным причинам уехали из Киева.

Новая алгебра в Москве

Наиболее весомый вклад в развитие алгебры в XX в. внесла Московская алгебраическая школа. Она возникла в 1930-е гг. в Московском университете и ее стремительный взлет с практически нулевого уровня до открытий мировой значимости представляет собой загадку, представляющую глубочайший интерес с точки зрения истории математики.

Как уже отмечалось, уровень преподавания алгебры в Московском университете вплоть до конца 1920-х гг. был чрезвычайно низким не только по сравнению с европейскими университетами, но и с некоторыми российскими высшими учебными заведениями. Это было связано в первую очередь с тем, что алгебра не входила в круг интересов ведущих московских профессоров. Первая треть XX в. – время расцвета школы Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина в области теории множеств и теории функций действительного переменного и выросших на их основе исследований по теории вероятностей, топологии, теории чисел. Алгеброй, особенно «новой», практически никто не занимался. Как мы уже говорили, курс высшей алгебры, который еще в конце XIX в. читал В. Я. Цингер, а затем Л. К. Лахтин, вслед за ними практически без изменений читали К. А. Андреев, Д. Ф. Егоров, Б. К. Млодзеевский и Н. Н. Лузин.

По мнению С. С. Петровой²³, такое положение дел могло быть связано еще и с тем, что именно в Московском университете очень сильно чувствова-

²³ Петрова С. С. Из истории преподавания математики в Московском университете в 1905–1917 гг. // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2007. Вып. 12 (47). С. 55–67.

лась преемственность поколений и непоколебимость профессорского авторитета. Поэтому когда новый преподаватель брал курс своего учителя, он зачастую не решался ничего в нем менять.

За исключением Млодзеевского никто из вышеупомянутых лекторов не написал учебного пособия по алгебре, поэтому нам затруднительно восстановить подробное содержание курса. Большие трудности при изучении данной проблемы создает то, что архивных материалов за 1920–1940-е гг. практически не осталось. До сих пор не удалось найти ни одной программы курсов, читавшихся на физико-математическом факультете 1 МГУ в послеоктябрьские годы. К сожалению, даже литографированных курсов по высшей алгебре, которые в XIX в. часто издавались студентами самостоятельно, не осталось. Это связано во многом с тем, что 20 сентября 1894 г. был издан указ «О запрещении студентам литографирования лекций профессоров»:

Студенты Университетов [...] позволяют себе издавать лекции и конспекты типографским способом. Даже с разрешения цензуры, но без согласия Профессоров и, следовательно, без ответственности Профессоров за качество изданных лекций и конспектов и за их научное содержание ²⁴.

В конце указа подводится следующий итог:

1. Студент, которому профессор разрешит или поручит издание лекций, должен «предоставить в Инспекцию заявление за подписью Профессора». Инспекция же в свою очередь просит профессоров и приват-доцентов давать разрешения на издания своих лекций на специальных бланках, получаемых в инспекции, с указанием точного имени студента и его данных.

2. Самовольное издание лекций считается «*поступком предосудительным*» (§ 36 правил для студентов). В результате этого указа количество издаваемых студентами пособий заметно сократилось, несмотря на то, что с развитием издательского дела делать это было все проще и проще.

Что касается курса, читаемого Млодзеевским, то в библиотеке механико-математического факультета сохранилось только две его книги ²⁵. Сравнивая их, мы приходим к выводу, что на протяжении более чем десятилетия программа курса высшей алгебры оставалась неизменной, а уровень преподавания – крайне слабым. В то время высшая алгебра читалась на протяжении двух семестров по три часа лекций в неделю, до 1917 г. семинарских занятий не было. При этом под часом понимался астрономический час (т. е. на самом деле три часа в то время примерно соответствовали сегодняшним двум лекциям в неделю.) Курс Млодзеевского был рассчитан, по всей видимости, на весь учебный год. Он включал в себя следующие разделы: 1) комплексные числа; 2) многочлены; доказательство основной теоремы алгебры; 3) симметрические функции; 4) системы уравнений (все рассматривается для двух или трех уравнений, а не в общем виде. Теория определителей читалась отдельным курсом); 4) часть про двучленные уравнения, которая по сути повторяет соответствующую главу из пособия Лахтина по теории чисел 1899 г. изд.; 5) алге-

²⁴ Центральный исторический архив Москвы. Ф. 418. Оп. 461. Д. 62а.

²⁵ Млодзеевский Б. К. Основы высшей алгебры. М., 1922 и Млодзеевский Б. К. Курс высшей алгебры. Лекции, читанные в Императорском Московском Университете / Издание студ. А. М. Бычкова и Л. Н. Лодыженского. М., 1911.

браическое решение уравнений; решения уравнений 3-й степени (формула Кардана-Ферро); решение уравнения 4-й степени (формула Феррари); 6) отделение корней; теорема Ролля; 7) вычисление корней; рациональные корни; способы приближенного вычисления корней.

Уравнениям выше 4-й степени Млодзеевский посвятил лишь один абзац в разделе, посвященном алгебраическому решению уравнений:

Решение уравнений высших степеней. Абель (Abel) доказал, что для уравнения выше четвертой степени общего вида алгебраическое решение невозможно. [...] Вероятность невозможности такого общего решения выясняется из следующего соображения. Всякое алгебраическое выражение из коэффициентов содержит последние под знаком сложения, вычитания, умножения и деления, возвышения в степени и извлечения корня; извлечение корня всегда равносильно решению некоторого двучленного уравнения вида $y^m = A$, где A – известная функция от коэффициентов данного уравнения. Таким образом, найти алгебраическое решение данного уравнения, значит свести решение этого уравнения к решению нескольких двучленных уравнений. Между тем, двучленные уравнения представляют собой тем более частный случай уравнений, чем выше их степень, и потому естественно, что решения уравнения высокой степени не может быть приведено к решению уравнений этого частного вида ²⁶.

Таким образом мы видим, что вплоть до середины 1920-х гг. курс высшей алгебры мало чем отличался от курса второй половины XIX в.

С одной стороны, хорошо известно, что все новые идеи науки очень тяжело привносятся в курсы лекций. Лекции отличаются стабильностью, выверенностью программы и даже излишней консервативностью. Курс по алгебре, читаемый сегодня на мехмате МГУ, практически не отличается от курса 25-летней давности. Однако аналогичная ситуация в первой трети XX в. была непростительным упущением – все новые алгебраические идеи прошли мимо московских профессоров.

Для Московского университета было характерно большое количество спецкурсов, и можно было надеяться, что этим частично восполнятся пробелы в основном курсе алгебры. Нам удалось найти сведения о трех спецкурсах – Егорова «Непрерывные группы преобразований» (1912/1914) и В. А. Кудрявцева «Теория Галуа» (1916/1917) и «Теория групп» (1917/1918). Их программы не сохранились, однако если судить по воспоминаниям очевидцев, популярностью у студентов они не пользовались, читались несистематически и никакого существенного влияния не оказали.

В январе 1923 г. Млодзеевский скончался, и вместо него курс алгебры стал читать Лузин, не изменивший программы. Об этом свидетельствуют слова А. П. Юшкевича, который в своих воспоминаниях о студенческих годах писал следующее:

Следует сказать, что курс высшей алгебры 1923–1924 гг. был очень далек от нынешнего. [...] Ни линейные пространства, ни понятия кольца, поля группы не упоминались ни в лекциях, ни в руководствах, которыми мы пользовались. [...] Преподавание теории групп, как специального курса,

²⁶ Млодзеевский. Основы высшей алгебры... С. 43.

началось в Московском университете только в середине двадцатых годов, а специальный семинар — в 1930 г. Инициатором этого дела и основателем большой новой алгебраической школы в Москве явился воспитанник Киевского университета и ученик Д. А. Граве, профессор, впоследствии академик О. Ю. Шмидт ²⁷.

Какую именно дату надо считать началом Московской алгебраической школы, сказать невозможно. В конце 1920-х гг. научной школы еще заведомо не было, хотя спецкурс по теории групп Шмидт уже читал. В начале 1930-х гг. мы уже можем говорить о ее существовании, т. к. в 1932 г. были опубликованы две серьезные работы А. Г. Куроша и Л. С. Понтрягина (первый обобщил теорему Ремака—Шмидта, а второй доказал теорему о том, что всякое связное локально-компактное топологическое тело со второй аксиомой счетности изоморфно либо полю вещественных чисел, либо полю комплексных чисел, либо телу кватернионов).

Таким образом, менее чем за 5 лет из ничего появилась серьезная научная школа. Мы полагаем, что причина такого успеха лежит в слиянии направлений и идей, вынесенных из трех различных математических школ. Наибольшее влияние оказали, во-первых, выходцы из Киевской алгебраической школы во главе с Граве. Шмидт являлся специалистом в области теории групп, и именно эта тема стала основной в первые годы работы московского семинара по алгебре. Во-вторых, после 1935 г. начало сказываться влияние Ленинградской школы, созданной Делоне. Сам Делоне не оставлял при этом своих прежних научных интересов, связанных с теорией чисел, а кроме того его серьезно увлекли геометрические работы Вороного. Такое разнообразие научных интересов привело к плодотворному синтезу, когда уже после переезда в Москву он вместе с Шафаревичем начал разрабатывать алгебраическую геометрию. В-третьих, благотворное влияние оказала Московская топологическая школа, созданная Александровым. Два ученика Александрова, Курош и Понтрягин, не только сами получили серьезные алгебраические результаты, но и оказали существенное влияние на изменение тематики московской алгебраической школы, на переход от конечных групп к бесконечным и к изучению новых структур (свободных произведений, модулей и др.).

Шмидт как математик

Итак, наибольший вклад в создание школы внесли О. Ю. Шмидт, А. Г. Курош, Б. Н. Делоне и Л. С. Понтрягин. Трудно сказать, какая фигура тут наиболее важна, однако именно Отто Юльевича Шмидта принято считать основателем московской алгебраической школы. О нем написано несколько книг ²⁸, правда, большинство авторов практически не уделяют должное Шмидту как математику. А между тем к моменту окончания Киевского университета Шмидту прочили большое математическое будущее. Ему были не понаслышке знакомы последние достижения по алгебре, он имел собственные результаты в тео-

²⁷ Юшкевич А. П. Годы учения / Публикация, предисловие и примечания С. С. Демидова и Т. А. Токаревой // Историко-математические исследования. Вторая серия. 2006. Вып. 11(46). С. 23–24.

²⁸ Дуэль И. И. Каждой гранью! Творцы науки и техники. М., 1981; Матвеева Л. В. Отто Юльевич Шмидт: 1891–1956. М., 1993.

рии конечных групп, изложенные в трех публикациях (две из них были замечены в школе Гильберта): «О разложении конечной группы на прямые неразложимые сомножители»²⁹ «О прямых произведениях»³⁰, «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа»³¹ (работа была удостоена физико-математическим факультетом Киевского университета золотой медали).

Первые две работы содержали новое, значительно более простое доказательство теоремы Р. Ремака о разложении конечной группы в прямое произведение неразложимых сомножителей. Они были замечены европейскими учеными и, по словам Граве, произвели настоящую сенсацию в Германии. Впоследствии эта теорема, а также несколько ее обобщений вошли в математику под названием «теорема Ремака–Шмидта».

В 1916 г. была опубликована монография Шмидта «Абстрактная теория групп»³², носившая большей частью реферативный характер, но содержащая и самостоятельные результаты автора. По сути это было учебное пособие, написанное 23-летним юношей. За эту книгу Шмидт получил премию профессора И. И. Рахманинова – большую золотую медаль и 300 рублей. Принято считать, что «Абстрактная теория групп» – первая книга на русском языке, посвященная теории групп без ограничения на их конечность. Однако так можно говорить с большой натяжкой: только первые четыре главы из десяти, наиболее простые, занимающие лишь четверть книги, посвящены основным понятиям общей теории групп (Определение группы, Простейшие свойства, Сопряженность и инвариантность, Гомоморфизм и автоморфизм.). Остальные шесть глав, в которых уже излагается весьма сложный материал, идут под общим подзаголовком «Теория конечных групп» (Введение. Фундаментальные теоремы. Абелевы группы и прямые произведения. Группы порядка p^m и их прямые произведения. Теория характеров. Дальнейшие свойства и приложения характеров). Заметим, что в данном случае слово «абстрактная» не означает отсутствия требования конечности группы. Абстрактная – значит, использующая в своих доказательствах лишь общие рассуждения, не прибегающая к другим теориям, в частности, к теории характеров.

Недооценивать труд Шмидта нельзя: книга действительно на многие годы стала базовым учебником по теории групп, особенно после ее переиздания в 1933 г. Простота, последовательность и доступность изложения привлекали студентов и аспирантов еще долгое время. Мы нашли в ней лишь один недостаток с точки зрения современной методологии: излишняя любовь автора к готическому шрифту, являющаяся данью времени.

Еще в Киеве Шмидт начал принимать активное участие в общественной жизни. После революции 1917 г. в университете Св. Владимира был создан Совет младших преподавателей, основной целью которого была борьба за реформирование порядков в учебном округе. Шмидта избрали его председате-

²⁹ Schmidt, O. Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren // Протоколы Физико-математического общества при Киевском университете. 1912. С. 1–6.

³⁰ Schmidt, O. Sur les produits directs // Bulletin de la Société mathématique de France. 1913. Vol. 41. P. 161–164.

³¹ Шмидт О. Ю. Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа // Киевские университетские известия. 1913. С. 1–60.

³² Фактически она была написана к 1914 г.

лем. В июне 1917 г. он был делегирован в Петроград на съезд по делам высшей школы от имени преподавателей университета. Общественная деятельность так увлекла Шмидта, что 19 сентября 1917 г. он подал прошение на имя ректора об освобождении его от чтения лекций и ведения практических занятий в осеннем полугодии. Его просьба была удовлетворена. Шмидт также попросил Граве дать ему рекомендательные письма к петроградским математикам, чтобы иметь возможность продолжить свою научную и педагогическую деятельность, однако воспользоваться ими ему не пришлось. В Петрограде он увлекся службой в министерстве, организаторской работой и оставил на несколько лет и науку, и преподавание, хотя предложения были. В марте 1918 г. по решению СНК правительство Советской Республики переехало в Москву, а вместе с ним и Шмидт. Важнейшее событие в это время, по его словам – вступление в крохотную партию левых интернационалистов, которая приняла программу РКП(б) и вскоре просто слилась с ней.

Спустя два или три года после переезда в Москву Шмидт стал внештатным преподавателем 1 МГУ, а в 1929 г. – там же профессором. Точной даты начала его работы в университете установить не удалось: в архиве МГУ от всей многолетней и весьма обширной деятельности Шмидта осталось только три личных карточки преподавателя за разные годы, а литературные источники полны противоречий. Но и в личных карточках имеются расхождения: в одной Шмидт указал, что начал работать в 1 МГУ в 1920 г., в другой – в 1921 г. В Центральном архиве города Москвы сохранился список основного и дополнительного состава физико-математического факультета за 1922 г., и в нем Шмидт числится преподавателем (не профессором) дополнительного состава, кроме того указано, что он читает спецкурс по теории групп. Какие еще предметы вел Отто Юльевич в 1 МГУ, доподлинно неизвестно. Спецкурс по теории групп был разработан им еще в Киеве как часть дипломной работы на соискание звания приват-доцента и читался в МГУ на протяжении многих лет. В Архиве РАН сохранился рукописный набросок плана лекций по теории групп. Он весьма прост и включает в себя основные понятия и теоремы теории групп, изложенные в первых четырех главах его монографии. Примеры даются исключительно из конечных групп. Из нового материала Шмидт добавил исторический очерк возникновения теории Галуа.

По воспоминаниям современников, Шмидт был человеком энциклопедических знаний, прекрасно разбиравшимся в философии и истории науки, владевшим многими иностранными языками и при этом политически грамотным и, что немаловажно, идейно правильным — его называли «красным профессором», т. к. он был одним из немногих преподавателей физмата 1 МГУ, кто с 1918 г. состоял в ВКП(б). Он много занимался организационной работой, быстро стал выдвигаться на руководящие посты³³, ему поручали читать такие курсы, как история точных наук или методология науки. В архиве РАН сохранились рукописи и машинописные варианты некоторых лекций Шмидта по истории естествознания, из которых видно, что он был убежденным материалистом и полагал, что основной импульс для своего развития наука получает извне:

³³ В 1930–1931 гг. Шмидт был директором Научно-исследовательского института математики и механики при 1 МГУ, сменив на этой должности Д. Ф. Егорова.

Я старался в своих лекциях показать, что то или другое научное открытие явилось не случайно, а главным образом, в зависимости от потребностей общества, конечно, материальных, связанных с производством ³⁴.

Нам неизвестно, читал ли Шмидт когда-либо основной курс по высшей алгебре – когда он появился в 1 МГУ, его читал Лузин. В рукописях Шмидта сохранилось два плана лекций по основному курсу высшей алгебры для первого курса, датируемые 1928/1929 и 1943/1944 учебными годами соответственно, однако пока мы не располагаем сведениями, был ли хоть один из них претворен в жизнь. Изучив их, можно проследить, как менялось представление о предмете алгебры, ее задачах и методах в Московском университете. В первом случае подробностей программы не сохранилось, говорится лишь следующее:

Программа курса строится концентрически, причем в первый концентр, читаемый в течение осеннего семестра, включаются те главы, скорейшее прохождение которых требуется другими предметами (например, Аналитической Геометрией) или же требуются упражнения, которые учебным планом предусмотрены только на первом семестре. В первый концентр входят наиболее основные и конкретные, во второй – более трудные и абстрактные главы ³⁵.

Второй план сохранился лишь за весенний семестр. Программа Шмидта содержала такие понятия как группы и их основные свойства, кольца, поля, построение поля разложения многочлена, алгебраические расширения, симметрические функции. Примечательно, что основные структуры Шмидт предлагал вводить не в порядке усложнения материала (группа–кольцо–поле), а путем построения примеров (группа–поле–кольцо). Поле возникало как множество, на котором группу можно задать с помощью двух различных действий, хорошо согласующихся между собой (Q, R). При разборе примеров полей возникал вопрос «А является ли множество матриц полем?», ответ на который получался с помощью теории определителей, пройденной в первом семестре, и в итоге вводилось понятие кольца.

В 1931/1932 учебном году Отто Юльевич написал пособие по высшей алгебре для заочного отделения, состоящее из трех частей. Первые две части посвящены теории определителей, третья – решению алгебраических уравнений. В 1933 г. пособие было переиздано. Мы предполагаем, что этот курс слабее соответствующего курса для очного отделения. Но даже с учетом этого видно, что курс алгебры по-прежнему оставался очень слабым. Первые два тома представляют интерес с методической точки зрения. Для того чтобы дать общее определение определителя, Шмидту потребовалось 8 параграфов,

³⁴ Вообще, лекции Шмидта по истории науки изобилуют яркими примерами и нетрадиционной трактовкой и оценкой некоторых явлений. Например, о первых университетах Европы он пишет следующее: «Конституция этих университетов была своеобразная: ректор университета избирался только студентами и чаще всего из студенческой среды, иногда из профессорской. Такая постановка дела является правильной потому, что университет существует для студентов; они и должны выбирать человека, которому они доверяют. Профессора и преподаватели отстаивают себя как от произвола студенчества и ректора, так и государственной власти всевозможными корпорациями. Профессора тогда уже существовали, но чаще они назывались магистрами. Эти корпорации имели в сущности профсоюзный характер и были прообразом факультетского собрания».

³⁵ Архив РАН. Ф. 496. Оп. 1. Д. 275. Л. 1.

в которых детально излагались случаи определителей 2×2 и 3×3 . В девятом параграфе Шмидт дает словесное определение, вообще не прибегая к помощи формул (отличительная черта многих работ Шмидта):

Определитель n -го порядка есть функция от n^2 величин (т. н. «элементов»), обозначаемых двумя индексами и расположенных в квадратную схему

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

Эта функция есть алгебраическая сумма $n!$ членов, каждый из которых есть произведение n элементов, составленных таким образом, что в каждом произведении среди его множителей имеется по одному, и только одному элементу из каждой строки и каждого столбца схемы.

Если в каждом произведении расположены элементы в натуральном порядке первых индексов, то вторые образуют все возможные расположения n чисел $1, 2, \dots, n$. При этом, если расположение вторых индексов данного произведения есть четное, то соответствующий член в алгебраической сумме берется со знаком $+$, а если нечетное, то со знаком $-$ ³⁶.

Зато в последующих девяти параграфах Шмидт излагает все свойства определителей, которые изучаются сейчас на мехмате МГУ.

Что касается третьей книги, то она не содержит никаких идей «новой» алгебры. Итоговая контрольная работа состоит из следующих заданий:

Контрольная работа по алгебре (1932 г.).

1. Составить график функции $x^3 - 4x + 1$ между $x = -2$ и $x = +2$, через $0, 2$.
2. Разобрать, где расположены 3 корня уравнения $x^3 + 7x + 7 = 0$. Пользуясь способом ложного положения и способом Ньютона, вычислить все три корня с точностью до $0,0001$.
3. Вычислить положительный корень уравнения $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$ с шестью десятичными знаками.
4. Не вычисляя корней и не строя графика, установить возможно близкие целые числа, внутри которых находятся все корни уравнения $x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.
5. Доказать, пользуясь теоремой Ролля, что «двучленное» уравнение вида $x^n = A$ имеет не более двух вещественных корней (при $A \neq 0$); пользуясь той же теоремой Ролля и этим результатом, доказать, что «трехчленное» уравнение $x^n + px^m + q = 0$ имеет не более четырех вещественных корней (при $q \neq 0$) ³⁷.

Как мы видим, задания можно отнести не столько к современной алгебре, сколько к математическому анализу.

Необходимо отметить, что несмотря на выдающиеся способности к математике, Шмидт занимался наукой не слишком усердно. Он был так увлечен общественно-политической жизнью страны, что алгебре мог уделять только свое свободное время, которого было немного.

В сентябре 1923 г. Шмидт был командирован во Флоренцию на Всемирную книжную выставку, где встретился со многими известными математиками, в том числе с И. Шуром. Вдохновленный поездкой, Шмидт написал небольшую

³⁶ Шмидт О. Ю. Высшая алгебра. Задания 1, 2. МГУ, заочный сектор. М., 1931. С. 37.

³⁷ Там же. С. 2.

работу «Группы, все подгруппы которых специальные»³⁸.

Летом 1927 г. Шмидт был отправлен в научную командировку в Геттинген, где познакомился с новейшими достижениями немецких алгебраистов (И. Шура, Э. Прюфера, Э. Нётер, О. Шрейера, В. Крулля, Р. Ремака, Д. Гильберта). У нас имеется версия, основанная на отрывочных сведениях из Архива РАН, что причиной командировки Шмидта было желание его коллег по Наркомпросу отстранить Шмидта от работы в этой организации. Итогом поездки в Геттинген стала работа «О бесконечных группах с конечной цепью», в которой классическая теорема Ремака для конечных групп была обобщена на некоторый класс бесконечных групп. Доказательство является собой пример блестящей компиляции нескольких общих теорем из теории групп (теоремы Ремака, теоремы Крулля–Нётер, теоремы Жордана), с которыми он, судя по всему, в Геттингене же и ознакомился.

Значение этой его работы определялось важностью самой теоремы Ремака–Шмидта. Одной из основных задач в теории групп, как конечных, так и бесконечных, является задача классификации или нахождения в группе некоторой системы инвариантов, позволяющих полностью описать ее. Этой задачей занимались многие алгебраисты, начиная с конца XIX в., то есть практически с самого начала существования самой теории групп.

К 1910 г. была доказана основная теорема теории абелевых групп (автора первого доказательства пока установить не удалось): если абелева группа G разложена на прямое произведение неразложимых циклических множителей двумя различными способами, то эти множители попарно изоморфны, а набор их порядков одинаков. Таким образом, набор порядков и набор циклических подгрупп образует систему инвариантов, позволяющую полностью описать группу, что давало возможность полной классификации абелевых конечных групп. Естественным желанием было получить аналогичный результат для более широкого класса групп. Сначала алгебраисты пытались снять условие коммутативности (и это удалось сделать Р. Ремаку), затем условие конечности группы (до конца этот вопрос не решен и по сей день, получены лишь результаты для некоторых классов бесконечных групп).

В 1911 г. Ремак защитил докторскую диссертацию, доказав аналогичную теорему о изоморфных разложениях в случае некоммутативных конечных групп. Разумеется, этот результат давал набор инвариантов, но не давал классификации всех некоммутативных конечных групп, поскольку строение неразложимых компонент нельзя однозначно выяснить по их порядку. Однако это было серьезным шагом в развитии теории групп. Первая студенческая работа Шмидта, о которой мы упоминали выше, содержала значительное упрощение доказательства теоремы Ремака. Перенос этих результатов на бесконечные группы оказался возможным только при требовании на конечность некоторых внутренних структур группы. В 1927 г. Шмидт существенно усилил теорему Ремака, доказав ее для бесконечных групп, обладающих композиционным рядом.

Забегая вперед, отметим, что теорему Ремака–Шмидта обобщали еще не раз. Последняя работа на эту тему, известная нам, датируется 2001 г.³⁹ Даль-

³⁸ Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Математический сборник. 1924. Т. 31. С. 366–372.

³⁹ Ringel, C. Krull–Remak–Schmidt Fails for Artinian Modules over Local Rings // Algebras and Representation Theory. 2001. Vol. 4. N 1. P. 77–86.

нейшее развитие этой теоремы было связано с тем, что вместо групп стали рассматриваться более сложные объекты, например, модули над кольцами (которые по определению являются абелевыми группами).

После Геттингена

Скорее всего, именно поездка в Геттинген подтолкнула Шмидта к мысли, что состояние алгебры в Московском университете требует коренных преобразований. В конце 1929 г. по его инициативе на физико-математическом факультете была открыта кафедра высшей алгебры⁴⁰, сам Отто Юльевич стал ее первым заведующим. Получить в то время разрешение на новую кафедру было непросто: управление вузами было централизовано, и 1 МГУ подчинялся Наркомпросу наравне с другими вузами, поэтому для создания кафедры и выделения новых штатных единиц требовалось согласие сектора кадров Наркомпроса (бывшего Главпрофобра). Кроме того, время для создания кафедры алгебры – одного из наиболее абстрактных направлений в математике – было выбрано не самое удачное: с точки зрения советского правительства наука должна была служить подъему народного хозяйства, а не бессистемно развиваться сама по себе. Разумеется, Шмидту как «красному профессору», члену Государственного ученого совета (ГУС) и коллегии Наркомпроса удалось обойти все эти препятствия, однако необходимо понимать, в каких тяжелейших условиях приходилось работать ему и его коллегам. 1920–1940-е гг. были тяжелым временем для физико-математического факультета. Бесконечные споры о преподавании в средней школе (в которых принимал активное участие и Шмидт) приносили мало плодов: уровень знаний по математике у поступающих в целом был очень низким, Наркомпрос обязывал университет, во-первых, увеличивать год от года количество выпускающихся специалистов, а следовательно, и число принимаемых абитуриентов, во-вторых, требовал смотреть в первую очередь не на знания поступающих, а на их классовое происхождение и политическую грамотность. Кроме того, согласно постановлениям ЦИК СССР постоянно менялись способы преподавания от лекционных к бригадно-лабораторным и обратно, что негативно сказывалось на процессе обучения. Кафедры и факультеты заменялись комиссиями, потом новая система терпела крах, и возвращалась старая.

В истории этих бесконечных изменений было несколько принципиальных моментов, на которых хотелось бы остановиться подробнее. 2 сентября 1921 г. Совет народных комиссаров утвердил «Положение о высшей школе», которому должен был подчиняться на общих условиях и МГУ. Фактически это был новый, четвертый устав МГУ. Он ставил перед университетом следующие основные задачи: 1) воспитание кадровых специалистов по всем отраслям народного хозяйства, 2) подготовка научных работников, 3) просветительская работа среди широких крестьянских и пролетарских масс.

Тем самым университет, как и все вузы, полностью подчинялся Наркомпросу, точнее, специально созданному внутри него Главному комитету про-

⁴⁰ Точное название кафедры нам установить не удалось. В различных официальных источниках она называется и кафедрой алгебры, и кафедрой алгебры и теории групп и кафедрой высшей алгебры. Последнее название прижилось и в данный момент является официальным.

фессионально-технического образования. От него же отныне полностью зависело назначение членов правления вуза и состав президиумов факультетов. Правила приема студентов также регламентировались отныне Наркомпросом; от него зависило назначение новых преподавателей и научных сотрудников. Профессора избирались ГУСом.

В рамках проводимой реформы создавались предметные комиссии, на две трети состоящие из научных работников, объединенных родственными дисциплинами, на одну треть – избранные студенты. Предметные комиссии должны распределять курсы между преподавателями, устанавливать порядок контроля над студенческими занятиями, вести детальную разработку программ и методов преподавания, осуществлять руководство вспомогательными учреждениями.

В июле 1921 г. впервые приемная комиссия осуществила прием студентов по новым правилам. Согласно ему в первую очередь в университет принимались выпускники рабфаков, члены РКП и комсомола по рекомендации своих организаций и те, кого направляли на учебу наркоматы, ВЦСПС или ЦК профсоюзов. Лица, не попадавшие под эти категории, принимались в случае наличия свободных мест по личному заявлению. Предпочтение отдавалось абитуриентам, имевшим рекомендации партийных органов и губернских профсоюзных объединений.

К 1930 г. университет настолько разросся, а его структура стала настолько сложной и плохо управляемой, что многие факультеты вместе со своими многочисленными научно-исследовательскими институтами вышли из его состава (например, отделились химический, медицинский и все гуманитарные факультеты). В итоге осталось всего два факультета – физико-математический и биологический. Поэтому в 1931 г. факультетская система была ликвидирована, и вместо нее было создано 7 отделений: астрономо-математическое, механическое, физическое, географическое, почвенное, зоологическое и ботаническое.

Качество научной и учебной работы резко снизилось. Лекции читались в заметно сокращенном объеме, основным методом работы стал бригадно-лабораторный, система индивидуальной отчетности студента была отменена. Для «ликвидации перегибов» и общего улучшения ситуации 19 сентября 1932 г. ЦИК СССР приняла постановление «Об учебных программах и режиме в высшей школе и техникумах». В рамках этого постановления в начале 1933 г. в Московском университете была восстановлена факультетская и кафедральная системы, и в мае того же года были созданы следующие 5 факультетов: механико-математический (декан В. В. Голубев), физический, биологический, почвенно-географический, химический.

Итак, в 1933 г. был создан механико-математический факультет, на астрономо-математическом отделении которого было всего три кафедры ⁴¹: кафедра анализа (заведующий В. В. Степанов), кафедра геометрии (заведующий П. С. Александров) и кафедра алгебры (заведующий О. Ю. Шмидт).

⁴¹ На сегодняшний день в составе механико-математического факультета насчитывается 15 кафедр по отделению математики и 9 кафедр по отделению механики.

Семинар Шмидта

Шмидт понимал, что создания кафедры недостаточно для поднятия уровня алгебры. В апреле 1930 г. он организовал первый научно-исследовательский кафедральный семинар, который работает и поныне ⁴². Его участниками были несколько учеников Шмидта – А. А. Кулаков, А. П. Дицман, В. К. Туркин, С. А. Чунихин – и А. Г. Курош, аспирант П. С. Александрова (хотя Шмидт говорил о Куроше как о своем ученике). Единственный литературный источник, позволяющий нам восстановить картину первых лет жизни семинара, – это несколько абзацев в статье Куроша, где он писал:

К работе семинара Отто Юльевич относился с большим интересом и вниманием, стараясь, насколько это было в его силах, не пропускать его заседаний. В первые годы мы собирались на квартире у Отто Юльевича. Тематика семинара почти полностью ограничивалась теорией групп – участники сообщали свои новые результаты, обсуждали проблематику, иногда реферировали только что опубликованные работы. Было много споров, часто резких. Они вызывались четким и непримиримым делением участников семинара на два лагеря – на тех, кто интересовался лишь конечными группами, и тех, кто признавал лишь группы бесконечные. Какими наивными кажутся сейчас эти споры, хотя они сыграли определенную роль в формировании научных взглядов будущей московской алгебраической школы! ⁴³

Спустя несколько лет семинар стал проводиться в здании МГУ, что заметно расширило и число его участников, и круг его интересов.

Разумеется, семинар Шмидта был слеплен по образу и подобию семинара Граве. Вообще, сравнивая киевскую и московскую алгебраические школы, нетрудно заметить, что они имеют много общего. Помимо научного семинара как основного объединяющего момента в работе школы, нельзя не отметить, что центральной личностью в формировании школы был не крупный ученый, а в первую очередь талантливый педагог. Принято считать, что во главе научной школы должен стоять ученый, сделавший в своей области нечто значительное. Б. В. Гнеденко в одной из своих работ пишет:

На протяжении всей истории науки ученые группировались вокруг того, кто сделал крупное открытие, дал толчок научному развитию. Молодежь подхватывала рождающиеся около открытия идеи, добавляла к ним свои мысли и результаты, расширяла круг решаемых задач. В результате рождалась научная школа, т. е. группа лиц, объединенных единым отношением к научному процессу, едиными взглядами на метод исследования и на центральную линию развития ⁴⁴.

Далее он приводит два примера: французскую школу математической физики Лапласа, Фурье, Пуассона, Остроградского и петербургскую школу теории вероятностей и теории чисел, созданную Чебышевым. Но ни Граве, ни

⁴² Кафедральный семинар сегодня играет большую роль в жизни кафедры: все дипломные и диссертационные работы должны пройти апробацию на этом семинаре.

⁴³ Курош А. Г. Основоположник советской алгебраической школы // Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность. М., 1959. С. 57.

⁴⁴ Гнеденко Б. В. Математическое образование в вузах. М., 1981. С. 85–86.

Шмидта нельзя отнести к крупным ученым. У них были хорошие открытия, но не более того. И все же силой своего личного обаяния и педагогического таланта они сумели собрать вокруг себя группу заинтересованных студентов, которые получили значительные результаты в различных разделах алгебры.

Еще одна особенность, роднившая Шмидта и Граве, заключалась в том, что они оба воспринимали алгебру как прикладную науку. Мировоззрение Граве сформировалось под влиянием школы Чебышева, который полагал, что основные задачи перед математикой должна ставить практика. Шмидт также полагал, что алгебра – наука прикладная, только «прикладывать» ее надобно не непосредственно к народному хозяйству, а к другим областям математики.

К середине 1930-х гг. он практически перестал заниматься алгеброй, лишь изредка публикуя небольшие статьи. Его интересы все больше смещаются в область полярных исследований и геофизики. Он не следил за новыми открытиями и направлениями, об этом свидетельствует предисловие, которое он написал на «Челюскине» ко второму изданию «Абстрактной теории групп»:

Я сознаюсь, что охотно переработал бы книгу, пользуясь опытом двадцатилетнего преподавания. Правда, за это время Теория групп не подверглась каким-либо коренным изменениям ⁴⁵.

Однако за почти 20 лет появилось много новых работ в немецкой алгебраической школе (Г. Леви, О. Шрейера, А. Гурвица, В. Крулля, Э. Нётер), с которыми Шмидт познакомился, будучи в Геттингене. Курош в своей статье «Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп» упоминает все наиболее важные результаты.

Курош был одним из активнейших участников семинара Шмидта, и поскольку последний был все время в разъездах, Курош взял на себя функции неформального руководителя семинара. И постепенно под его влиянием произошло изменение тематики семинара от конечных групп к бесконечным. Дальнейшее развитие теории показало, что хотя конечные группы по сравнению с бесконечными оказались менее перспективным направлением, наиболее сложные задачи возникают именно в теории конечных групп. Один из учеников Шмидта С. Н. Чунихин уехал в Белоруссию (сначала в Могилев, потом в Минск), и там создал свою школу конечных групп и сделал ряд серьезных открытий в области обобщенных теорем Силова.

Далее интересы Куроша сместились в сторону свободных произведений, и это сразу отразилось на тематике семинара. В 1927 г. Шрейер доказал, что всякая подгруппа свободной группы сама является свободной, и поставил задачу, будет ли аналогичное утверждение верно для свободных произведений. В 1934 г. Курош решил этот вопрос положительно.

В 1935 г. Куроша пригласили заведовать только что созданной кафедрой алгебры в Саратовском университете, поэтому до 1937 г. он много времени проводил вне Москвы. Кто в эти годы исполнял обязанности заведующего кафедрой алгебры в Московском университете в отсутствие О. Ю. Шмидта, нам неизвестно. По возвращении Куроша в Москву, его позиции фактического руководителя московской алгебраической школы заметно упрочились. Офици-

⁴⁵ Шмидт О. Ю. Абстрактная теория групп. 2-е изд. М.; Л., 1933. С. 3.

ально Шмидт числился заведующим кафедрой вплоть до 1949 г., когда он по причине тяжелой прогрессирующей болезни оставил сразу несколько руководящих постов (в декабре 1948 г. Президиум АН СССР удовлетворил его просьбу об освобождении в связи с болезнью от руководства Геофизическим институтом). 15 июня 1949 г. пост заведующего кафедрой высшей алгебры занял Курош.

В 1940-х гг. он начал читать курс высшей алгебры, и читал его вплоть до 1956 г. Спустя некоторое время был издан ряд его учебных пособий, сначала в виде ротапринтов, затем отдельными книгами. Это его знаменитые «Курс высшей алгебры», «Введение в теорию групп», «Лекции по общей алгебре». Разумеется, они содержали в себе все основные понятия «современной» алгебры.

С 1935 г. на алгебраические исследования в Москве стали оказывать существенное влияние работы Делоне. Несмотря на то, что Делоне и Шмидт оба были учениками Граве, их научные интересы шли параллельно. Делоне изначально занимался смежными вопросами алгебры и теории чисел. Ему принадлежит цикл исследований в теории диофантовых уравнений третьей степени с двумя неизвестными. Несмотря на крайнюю простоту формулировок, теория диофантовых уравнений не богата общими результатами. Исследованием диофантовых уравнений 2-й степени занимался Эйлер, общий анализ был проведен Лагранжем. Что же касается решений диофантовых уравнений более высоких степеней, то серьезных успехов в этом вопросе не было вплоть до начала XX в. Исследования Делоне были посвящены диофантовым уравнениям $f(x, y) = 1$, где $f(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3$ кубическая форма с отрицательным дискриминантом и коэффициенты a, b, c – целые числа. Посредством созданного им «алгоритма повышения» Делоне получил фундаментальный результат: изучаемые уравнения имеют не более пяти решений в целых числах, причем в каждом частном случае алгоритм дает возможность фактически найти решения, если они существуют. Работы Делоне по кубическим диофантовым уравнениям обозначили едва ли не первый после Эйлера и Лагранжа серьезный сдвиг в направлении конкретного исследования уравнений более высоких степеней.

Далее мы наблюдаем смещение интересов Делоне в сторону геометрии, связанное с изучением им работ Вороного⁴⁶. В 1923 г. Делоне предложил геометрическую интерпретацию алгоритма Вороного, который тот использовал в своих работах по диофантовым уравнениям. В 1930-е гг. Делоне со своими учениками (В. А. Тартаковским и Д. К. Фаддеевым в Ленинграде, И. Р. Шафаревичем в Москве) занимался построением геометрического обоснования теории полей алгебраических чисел, геометризацией теории Галуа и алгебраической геометрией. В 1935 г. он стал профессором кафедры геометрии и топологии мехмата МГУ. По воспоминаниям его учеников, в своих лекциях он делал упор на наглядность материала, стараясь для любых алгебраических конструкций найти изящную геометрическую интерпретацию⁴⁷.

⁴⁶ В историко-математической литературе можно встретить версию о том, что Вороной, друживший с отцом Делоне, оказал непосредственное влияние на математические интересы Бориса Николаевича. Однако эта версия не выдерживает никакой критики: Вороной умер в 1908 г., когда Делоне только поступил в Киевский университет.

⁴⁷ В то время на мехмате был популярен анекдот про то, кто из преподавателей в чем варит суп. Про Делоне говорили, что он варит суп в n -мерной решетке: все выливается, зато очень наглядно.

* * *

В заключение нельзя не упомянуть о еще одном важном источнике успеха Московской алгебраической школы – о той почве, в которую попали идеи, привнесенные Шмидтом и Делоне. В 1920-е гг. Московский университет славился своей топологической школой, во главе которой стоял Александров. Благодаря соединению топологических идей и идей «современной» алгебры появился ряд блестящих работ Понтрягина, ученика Александрова. Его основной результат состоял в доказательстве того, что всякая счетная абелева группа изоморфна некоторой компактной топологической коммутативной группе ⁴⁸, что сразу показало важность развития теории абелевых групп. Кроме того, на развитие алгебры существенное влияние оказали некоторые работы А. Н. Колмогорова, относящиеся к топологической алгебре (теория групп и алгебр Ли). В конце 1930-х гг. одним из участников семинара Шмидта стал ученик Колмогорова А. И. Мальцев, который вскоре доказал несколько важных теорем в теории групп Ли и теории колец и алгебр. Дальнейшие успехи московской алгебраической школы связаны с развитием именно этих трех направлений – теории групп, алгебраической геометрии и топологической алгебры. Заметим, что во всех трех направлениях нашим ученым удалось достичь результатов мировой значимости.

Подводя итоги, мы можем сказать, что становление «современной» алгебры в России шло весьма бурными темпами и закончилось одновременно с аналогичным процессом в Европе – к 1930-м гг. Несмотря на отсутствие большого интереса к алгебре у отечественных математиков во второй половине XIX в. за сравнительно небольшой период было создано несколько крупных алгебраических центров, некоторые из которых успешно функционируют по сей день. Киевская алгебраическая школа была первой в России, и именно благодаря ее представителям идеи «современной» алгебры получили дальнейшее распространение по России. В частности, Шмидту удалось создать научную школу, возглавляя ее сугубо номинально. Имея в арсенале небольшое число научных открытий, из которых лишь одна работа получила международное признание, мало уделяя времени науке как таковой, он сыграл огромную роль в формировании школы в качестве талантливого педагога и организатора научной жизни.

⁴⁸ *Pontrjagin, L. The Theory of Topological Commutative Groups // Annals of Mathematics. 1934. Vol. 35. P. 361–388.*