

ЛОРЕН ГРЭХЭМ, ЖАН-МИШЕЛЬ КАНТОР

ДВА ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ МАТЕМАТИКИ КАК ФЕНОМЕНА КУЛЬТУРЫ: ФРАНЦИЯ И РОССИЯ, 1890–1930 гг.*

От редакции

Рукопись публикуемой ниже статьи авторы практически одновременно передали в две редакции – журнала ВИЕТ и журнала Isis. По обоюдному согласию этих редакций текст появится почти в одно и то же время в двух разных версиях, на русском и на английском языках. Подготовка к публикации проходила независимо, в соответствии с традициями каждого журнала. К тому же мы считаем, что вопрос, поднятый в статье, и конкретный исторический материал, на примере которого этот вопрос решался, привлекали на протяжении последних полутора десятилетий особое внимание именно российских историков и философов науки, оставаясь в значительной степени terra incognita для большинства их западных коллег. Всячески приветствуя расширение «культурного ареала» выбранной авторами проблематики, мы сочли тем не менее полезным снабдить статью примечаниями и комментариями ведущих российских специалистов, предоставив возможность и самим авторам откликнуться на высказанные там замечания. Нам пока неизвестно, какую тактику выберут наши коллеги из Isis, но, несомненно, она будет другой. На наш взгляд, эти обстоятельства оправдывают подобную двойную публикацию, привнося в рассматриваемую в статье проблему двойную интригу.

Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit!
Georg Cantor, 1883

Откуда берутся новые научные идеи и как они возникают – этот вопрос интересует, конечно же, самих ученых, а также историков и философов науки, психологов и многих других. В случае с математикой новые идеи обычно находят воплощение в виде новых «математических объектов» – групп, векторных пространств, множеств и пр. Одни полагают, что математики создают эти новые объекты у себя в головах, другие же считают, что математики каким-то образом

* Перевод статьи с английского языка на русский выполнила О. А. Валькова, а перевод ответа авторов Д. А. Баюк.

Авторы выражают благодарность за комментарии и помощь Бернарду Брю, С. С. Демидову, Дональду Фангеру, Барри Мазуру, Чарльзу Форду, Михаилу Гордину, Елене Репиной, Евгению Альбац, Наталии Ермолаевой, Марку Крамеру, Сьюзан Блейк Гардос, Петеру Баку, Георгию Левинтону, Марджори Сенегал, Роджеру Куку и Джону Мердоку. Однако за фактические ошибки, которые содержит настоящий текст, ответственность несут только его авторы.

¹ «Сущность математики заключается в ее свободе».

обнаруживают их где-то еще, возможно, в мире платоновских идей. Нам кажется, что было бы интересно исследовать различие в подходах к одним и тем же проблемам двух различных групп математиков, работавших в одно и то же время, но при различающихся внешних обстоятельствах. Влияла ли конкретная культурная среда на то, как математики каждой из этих групп видели свою работу? Возможно ли, что она даже помогала им делать выводы, отличные от другой группы? В настоящей статье мы исследуем этот вопрос на примере рождения дескриптивной теории множеств во Франции и в России в период с 1890 г. по 1930 г. (Все математические термины разъясняются по мере необходимости в сносках ².)

В российском случае мы обнаружили, что конкретная богословская точка зрения – а именно точка зрения «имяславцев» – оказалась существенной в дискуссии о природе математики. Придерживавшиеся ее российские математики считали, что они обладают большей свободой для создания математических объектов, чем их французские коллеги, стоявшие на позициях светского рационализма.

Таким образом мы подходим к проблеме взаимоотношений «религии и науки», о которой было написано так много ³. Обычно литература, посвященная

² Теория множеств – это математическая наука о бесконечности; в основе ее лежит представление о множестве как об определенном наборе объектов (элементов данного множества), конечном или бесконечном. Элементам одного множества можно поставить в соответствие элементы другого согласно некоторому правилу, называемому отображением; соответствия между множествами – это функции; если отображение взаимно однозначно, то говорят, что множества имеют равные мощности, или кардинальные числа (кардинальное число может быть и бесконечным). Например, любое множество, взаимно однозначно отображаемое на множество целых чисел, называется счетным; его мощность – $\aleph_0$. Это типичный способ, с помощью которого Кантор вводил определения мощности (для упорядоченных множеств подобным образом определяются порядковые числа). Трансфинитные числа – это как кардинальные так и порядковые числа, сконструированные путем различных операций и по возможности сопоставленные друг с другом. Кантор ввел их в 1882 г. в связи с философскими и даже теологическими рассмотрениями об «Абсолюте». Это было первым математическим введением бесконечности в математику (именуемой «актуальной бесконечностью» в отличие от изученной Аристотелем «потенциальной бесконечности»), мыслимой как результат предельного перехода. Теория множеств родилась из изучения точечных множеств действительной прямой. Позднее, как мы увидим, усилия по описанию и классификации таких множеств приведут к дескриптивной теории множеств (см. сноску 87). См.: *Ferreiros, J. Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*. Boston: Birkhäuser, 1999; *Purkert, W. Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre* // *Bulletin de la Société mathématique de Belgique*. 1986. № 38. P. 313–327; *Purkert, W. Georg Cantor, 1845–1918*. Basel; Boston: Birkhäuser, 1987.

³ Существуют сотни книг о взаимоотношениях религии и науки. Укажем здесь: *Brook, J. H. Science and religion: some historical perspectives*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991; *Larson, E. J. Trial and Error: The American Controversy Over Creation and Evolution*. Oxford: Oxford University Press, 1989; *Ruse, M. Can a Darwinian be a Christian? The relationship between science and religion*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001; *Gregory, F. Nature Lost? Natural science and the German theological traditions of the nineteenth century*. Cambridge: Harvard University Press, 1992; *Jammer, M. Einstein and religion: physics and theology*. Princeton: Princeton University Press, 1999; *Châtellier, L. Les espaces infinis et le silence de Dieu: science et religion XVI^e–XIX^e siècle*. Paris: Aubier, 2003; *Chevalley, C. Pascal, contingency et probabilities*. Paris: PUF, 1995; *Lévy, T. Figures de l'infini: les mathématiques au regard des cultures*. Paris: Seuil, 1987; Наука, философия, религия: в поисках общего знаменателя / Под ред. П. П. Гайденоко, В. Н. Катасонова. М.: Изд-во РАН, 2003; *Blinderhöfer, S. Naturwissenschaftlicher Weltzugang und der Überschuss der Schöpfungsperspektive*. Frankfurt: Lang, 2000. Более старая книга, все еще сохраняющая значение: *Gillispie, C. C. genesis and Geology: A study*

этой теме, сосредоточивается на вопросе о том, находятся ли религия и наука в «конфликте» или в «гармонии»⁴. Мы не ставили своей целью поиск ответа на этот вопрос, считая его слишком упрощенным. Мы можем указать в истории науки эпизоды, когда религия «конфликтowała» с наукой (например, по поводу идей Галилея или Дарвина), а можем указать эпизоды, когда, по мнению многих, религия и наука пребывали в гармонии друг с другом (например, в случаях Ньютона и Паскаля). Имея это в виду, мы предпочитаем рассматривать контекст и детали каждого отдельного случая, не становясь заранее на ту или иную точку зрения. Мы считаем, что наша статья не содержит аргументов ни в поддержку, ни против религии.

Мы утверждаем, что господствовавшая во Франции светская рационалистическая культура оказала негативное влияние на признание бесконечных (в частности, несчетных) множеств⁵ допустимыми математическими объектами, в то время как мистические религиозные взгляды основателей московской математической школы оказали позитивное влияние на подобное признание. Ведущие французские математики, чьи взгляды мы рассмотрим в настоящей статье, – Рене Бэр (1874–1932), Анри Лебег (1875–1944) и Эмиль Борель (1875–1956). Ведущие российские математики, на взглядах которых мы остановимся, – это Дмитрий Егоров (1869–1931) и Николай Лузин (1883–1950). В российском случае также необходимо изучить значение философии друга и коллеги Егорова и Лузина Павла Флоренского (1882–1937), ставшего священником и оставившего математику. Именно признание этими тремя людьми, особенно Николаем Лузиным, трансфинитных чисел⁶ как допустимых математических объектов ускорило развитие теории функций действительного переменного и рождение московской школы теории функций, одной из наиболее влиятельных в математике XX в.

Мы начнем наше изложение с Франции, затем перейдем к России и, наконец, сделаем наши выводы.

Теория множеств в картезианской Франции

Развитие теории множеств началось, как известно, в Германии благодаря сочинениям Георга Кантора (1845–1918). Среди тех, кто способствовал ее появлению, наиболее важен в контексте настоящей статьи философ, богослов и математик Бернард Больцано (1781–1848), введший в употребление сам термин «множество» (*die Menge*) и отстаивавший «актуальную бесконечность»⁷. Идеи Кантора стали известны во Франции почти сразу, но приняты были прохладно. Большинство французских математиков оказалось не готово к

in the relations of scientific thought, natural theology, and social opinion in Great Britain, 1790–1850. Cambridge: Harvard University Press, 1951 (2-е издание – 1969).

⁴ Классическим изложением «конфликтных» взаимоотношений является работа: White, A. D. A History of the warfare of science with theology in christendom. New York: Appleton, 1896 (переиздана в: Buffalo: Prometheus Books, 1993). Книга, в которой пересматривается «конфронтационная» модель: God and nature: historical perspectives on the encounter between science and Christianity / Ed. by D. C. Lindberg, R. L. Numbers. Berkeley: University of California Press, 1986.

⁵ См. сноску 2.

⁶ См. сноску 2.

⁷ См.: Bolzano, B. Les paradoxes de l'infini. Paris: Seuil, 1993; Sebestik, J. Logique et mathématique chez Bernard Bolzano. Paris: Vrin, 1992.

приходу этой новой математики из могущественной соседней страны. Шарль Эрмит (1822–1901) и Поль Эмиль Аппель (1855–1930), например, вначале противились самому намерению перевести работы Кантора на французский язык и согласились лишь под давлением, предложив в качестве переводчика аббата Жозефа Даржана, иезуита, священника церкви Сен-Сюльпис; Эрмит отмечал: «Философский склад ума Кантора не станет препятствием для переводчика, знающего Канта»⁸. Очевидно, Эрмит и Аппель считали, что работа Кантора относилась скорее к немецкой метафизике, чем к математике. Фактически первыми, кто заинтересовался во Франции идеями Кантора, были французские философы – Луи Кутюра (1868–1914), некогда студент Анри Пуанкаре, обратившийся к философии, и Поль Таннери (1843–1904). Лишь позднее и с неохотой на них обратил внимание математик Жюль Таннери, брат Поля.

Однако не все французские математики относились к теории Кантора с одинаковой степенью враждебности, некоторые (их было совсем немного) были заинтригованы определенными ее выводами, даже несмотря на то, что они не хотели принять ее полностью. Постепенно отдельные идеи теории множеств стали просачиваться в работы французских математиков, таких как Эмиль Борель (1871–1956), поначалу скорее в части касающейся точечных множеств (совокупности точек на действительной прямой), чем абстрактной теории множеств самой по себе. Камиль Жордан (1838–1922) включил некоторые сведения из теории множеств во второе издание своего «Курса» в Политехнической школе где-то около 1885 г.⁹

Можно было ожидать, что патриарх французской математики Анри Пуанкаре (1854–1912) окажется несколько более восприимчивым к теории Кантора, так как он находился под сильным влиянием Канта и был очень образованным философом науки. Влияние Кантора можно обнаружить, например, в его знаменитой статье 1890 г.¹⁰ Тем не менее Пуанкаре больше полагался на интуицию и противостоял, порой весьма агрессивно, «логицизму» (Рассел, Кутюра, Пеано), сторонники которого хотели свести математику к логике. Кутюра даже обвинял Пуанкаре в возрождении номинализма (одного из философских направлений средневековой схоластики, косвенно связанного с проблемой «именования», к которой обратились русские математики, о чем пойдет речь ниже). Пуанкаре отказывался признать трансфинитные числа, хотя принимал принцип исключенного третьего¹¹. Его отторжение актуальной бесконечности, твердая оппозиция и возраст вывели его за пределы основной дискуссии о теории множеств.

Между тем Рене Бэр (1874–1932), строгий математик, работавший в традиции Коши, Бореля и итальянских математиков, как Вольтерра и Дини, гото-

⁸ «...Leur tournure philosophique ne sera pas un obstacle pour le traducteur qui connaît Kant» (*Hermite, C. Lettres à G. Mittag-Leffler publiées et annotées par Pierre Dugac // Cah. Sém. Hist. Math.* 1980. № 5. P. 49–285).

⁹ *Jordan, C. Cours d'analyse de l'École polytechnique. 2^e éd. Paris: Gauthier-Villars, 1893–1896.*

¹⁰ *Poincaré, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // Acta Math.* 1890. № XIII. P. 1–270. См. диссертацию, над которой работает А. Робадей (A. Robadey).

¹¹ Закон исключенного третьего (*tertium non datur* – по латыни) гласит, что для каждого высказывания Р либо Р, либо (не Р) является истинным. Этот закон, восходящий к Аристотелевой логике, был отвергнут приверженцами интуиционизма.

вил важный поворот в судьбе теории функций, основываясь на некоторых концепциях новой теории множеств, которые он находил приемлемыми. До работы Бэра функции понимались в эйлеровском смысле ¹².

Бэр посмел заняться разрывными функциями и начал классифицировать их таинственное поведение. Но старый французский математический истеблишмент энергично сопротивлялся. Эмиль Пикар (1856–1941), например, несмотря на свой несомненный математический талант и ясный ум, обнаруживший себя во многих других областях, много лет отвергал разрывные функции. В 1898 г. Пикар следующим образом прокомментировал выступление Бэра: «Кажется, что по складу ума автор предпочитает вопросы, которые находятся на границе между математикой и философией» ¹³. Сближая позицию Бэра скорее с философией, чем с математикой, Пикар использовал ключевое слово, употреблявшееся для пренебрежительной критики теории множеств. Философия была нестрогой и рыхлой по природе и не казалась математикам достойным занятием. Позднее, в 1902 г., Пикар с похожим неодобрением отзывался о диссертации Лебега: «От результатов, которые получают, когда отказываются от обычных гипотез, порой становится просто дурно» ¹⁴. И даже в 1905 г. Пикар все еще отказывался признать разрывные функции, замечая: «Природа не делает скачков; у нас есть чувство, можно даже сказать – вера в то, что в природе нет места разрывности» ¹⁵.

С другой стороны, Эмиль Борель изначально был более восприимчив к теории множеств. Борель – сначала студентом, затем профессором и наконец директором Высшей нормальной школы, – более 50 лет оставался центральной фигурой в интеллектуальной и политической жизни Франции. Приехав из сельской провинции Руэрг на юго-западе, он очень быстро занял высокое положение как в математическом, так и в административном кругах и со временем даже занял место в Палате депутатов и в правительстве Франции ¹⁶.

Когда он был еще молодым математиком, работы Кантора покорили его. В 1895 г. в своей диссертации, используя результат о предельных точках ¹⁷, он

¹² Это значит, что они представлялись в виде непрерывной линии с касательной в каждой точке за исключением, быть может, конечного числа точек. Графики разрывных функций делали скачки в точках разрыва. Об истории теории функции см. работу самого Лузина, который является одним из главных героев нашей статьи: *Лузин Н. Н. Функция* // Большая Советская Энциклопедия. 1-е изд. Т. 59. М., 1935. С. 314–334 (перепечатано в: *Лузин Н. Н. Собрание сочинений*: В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1953–1959. Т. 3. С. 318–341) или более современную работу: *Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного*. М.: Наука, 1975.

¹³ «L’auteur nous paraît avoir une tournure d’esprit favorable à l’étude de ces questions qui sont à la frontière de la mathématique et de la philosophie» (цит. по: *La France mathématique; la Société mathématique de France (1872–1914)* / Ed. par H. Gispert. Paris: Société Française d’Histoire des Sciences et des Techniques/Société Mathématique de France, 1991).

¹⁴ «On est parfois saisi de vertige en voyant à quels résultats on arrive quand on abandonne les hypothèses usuelles» (Ibid., p. 284).

¹⁵ «Natura non facit saltus, nous avons le sentiment, on pourrait dire la croyance, que dans la nature il n’y a pas de place pour la discontinuité» (цит. по: *Sciences mathématiques et astronomie // La science moderne et son état actuel*. Paris: Flammarion, 1905.).

¹⁶ См.: *Guiraldeng, P. Emile Borel, 1871–1956: L’espace et le temps d’une vie sur deux siècles*. St-Affrique: l’Imprimerie du Progrès, 1999.

¹⁷ Предельные точки получаются как пределы последовательности точек; например, 0 является пределом последовательности точек $(1/n)$; по мере того, как n становится больше и больше, точки, представляющие $1/n$, всё ближе приближаются к началу координат.

решил проблему теории функций (позднее ее назовут теоремой Гейне-Бореля), и он же первым начал читать курс по теории множеств в Эколь Нормаль (Лебег был среди его слушателей). В тот же год Борель встретил Кантора и поначалу отнесся к нему с восторгом. Позже Борель признавался: «В двадцать лет, читая работы Кантора, я был совершенно очарован ими [...] Георг Кантор привнес в изучение математики тот романтический дух, который является одной из наиболее привлекательных черт немецкой души»¹⁸.

Однако по мере того как Борель продолжал свои исследования, он начал мало-помалу испытывать все растущее отторжение к идеям Кантора. Отчасти его недовольство могло возникнуть из общения с французскими коллегами, скептически настроенными по отношению к философскому направлению идей Кантора. Вдобавок к этому у Бореля был весьма приземленный подход к математике, возможно, объяснимый воспитанием, полученным в сельской Франции. Трансфинитные «алеф числа» Кантора вовсе не были приземленными (что можно было бы сказать, например о нормальных числах; см. сноску 49)!

Тревога французских математиков по отношению к теории множеств усугублялась тем, что, по их наблюдениям, изучение канторовских «алефов» могло вызывать умственные расстройства. Первый серьезный приступ депрессии случился у Кантора в 1884 г.; Бэр, у которого и раньше были некоторые проблемы с пищеварением, тяжело заболел в 1898 г., словно в наказание за шалости с новыми идеями. Борель, рассказав о болезнях Кантора и Бэра, жаловался своему другу Полю Валери в 1924 г., что ему пришлось отказаться от занятий теорией множеств «из-за переутомления, которое на него навалилось и заставило опасаться серьезных заболеваний, в том случае если бы он продолжил свою работу»¹⁹. Бэр прекратил работу в 1900 г., заболел неврастенией и в итоге в 1932 г. покончил с собой²⁰.

На II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г. немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) сформулировал ряд проблем, остающихся отчасти не решенными до настоящего времени²¹. Сущность первой проблемы, поставленной Гильбертом, – тайна континуума. Гипотеза континуума сводится к вопросу: верно ли, что любое несчетное

¹⁸ «J'ai été extrêmement séduit, dès l'âge de 20 ans, par la lecture des travaux de Cantor [...] Georg Cantor a apporté dans l'étude des mathématiques cet esprit romantique qui est l'un des côtés les plus séduisants de l'âme allemande» (*Borel, E. Œuvres: In 4 vols. Paris: Éditions du CNRS, 1972. Vol. IV. P. 2101*).

¹⁹ «...À cause de la fatigue qu'elle lui imposait et qui lui faisait craindre des troubles sérieux s'il s'obstinait à ce travail», – Valéry «Cahiers» (Цит. по: *Dugac, P. Histoire de l'analyse. Paris: Vuibert, 2003; Valéry, P. Cahiers. Vol. I. Paris: Gallimard, 1973. P. 797*).

²⁰ См. письмо, полученное его братом: *Dugac, P. Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire // Arch. Hist. Ex. Sc. 1976. № 15. P. 313*.

²¹ *Hilbert, D. Sur les problèmes futurs des Mathématiques / Transl. by L. Laugel // Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens. Paris: CIM, 1900. P. 58–114; английская версия: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems / Ed. by F. Browder. Providence: American Mathematical Society, 1976; [русская версия: Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969; Математические проблемы // Гильберт Д. Избранные труды / Под ред. А. Н. Паршина. Т. 2. М.: Факториал, 1998. С. 401–436]. Незадолго до математического конгресса проводился международный философский конгресс, в нем математики Адамар, Борель и Пуанкаре принимали участие.*

подмножество действительной прямой (т. е. континуума) имеет мощность (кардинал) континуума ²². Этот вопрос занимал Кантора с 1880-х гг. В то время он разрабатывал стратегические подходы к нему, что выражалось в тщательном рассмотрении все более и более сложных подмножеств прямой, — подход, который должен был привести к дескриптивной теории множеств. Проблема имела сильный геометрический уклон, несмотря на то, что в предыдущем столетии предпринимались усилия (например, Вейерштрассом и Дедекиндом ²³) «арифметизировать континуум» (конструируя вещественные числа, не полагаясь на какую-либо геометрическую интуицию).

Анри Лебег (1875–1941) развивал геометрический подход ко всей математике; он заинтересовался функциями, увидев их глубокие связи с геометрией: «Я чувствую, что должны существовать очень тесные связи между общей теорией функций действительного переменного и чистой геометрией, но они остаются для меня немного загадочными» ²⁴. С 1894 по 1897 гг. Лебег провел в Эколе Нормаль, где его наставником и другом стал Борель. Бесстрашно подхватив изучение функций действительной переменной в то самое время, когда Борель терял самообладание, Лебег перешел в оппозицию к старой школе (Жордан, Дарбу), сопротивлявшейся изучению появившихся на сцене «монстров». Плодотворный подход, избранный Лебегом, заключался в сравнении классификации функций, созданной Бэром ²⁵, со вновь выведенной теорией меры Бореля ²⁶.

Аксиома выбора и «Пять писем о теории множеств»

26 сентября 1904 г. немецкий математик Эрнст Цермело (1871–1953) сообщил Давиду Гильберту о своем успехе в поиске «доказательства того, что любое множество может быть вполне упорядоченным» ²⁷. Для этого он использовал

²² В 1874 г. Кантор показал, что множество всех вещественных чисел (представленное бесконечностью множества точек действительной линии) не счетно. Другими словами, не может существовать взаимно однозначного соответствия между всеми целыми числами и всеми вещественными числами. Этот вывод привел его к гипотезе континуума, в которой он задался вопросом, возможно ли установить взаимно однозначное соответствие произвольной части континуума либо с множеством целых чисел, либо с целой линией.

²³ *Dedekind, R. Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg, 1872. [Русский перевод: *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. 4-е изд. Одесса: Mathesis. 1923.]

²⁴ «Il y a entre la théorie générale des fonctions de variables réelles et la géométrie pure des liens que je sens étroits, encore qu'ils restent un peu mystérieux pour moi» (Цит. по: Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue de 1922 // *Lebesgue, H. Œuvres scientifiques*: In 5 vols. Genève: L'Enseignement mathématique, 1972–1973. Vol. 1. P. 90).

²⁵ *Baire, R. Œuvres scientifiques* / Publ. sous la dir. de P. Lelong avec la collab. de P. Dugac. Paris: Gauthiers-Villars, 1990.

²⁶ См. детальный анализ работ Бореля и Лебега по теории меры (которая изучает вопрос о том, как распространить понятие длины числовых интервалов на очень сложные части континуума) в: *Moore, G. H. Lebesgue's measure problem and Zermelo's axiom of choice: the mathematical effects of a philosophical dispute* // *History and philosophy of science: Selected Papers* / Ed. by J. W. Dauben, V. Staudt Sexton. New York: New York Academy of Sciences, 1983.

²⁷ «Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann», задав порядок с теми же свойствами, что и у множества натуральных чисел. Упорядоченное множество — это такое множество, в котором любые два элемента могут быть сопоставлены по «отношению упорядоченности»; «вполне упорядоченное множество» — это упорядоченное множество сходное по свойствам множеств натуральных чисел. См.: *Zermelo, E. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe) // *Mathematische*

утверждение, получившее впоследствии название аксиомы выбора (АВ): «Для любого семейства непустых множеств существует отображение, ставящее в соответствие каждому из этих множеств один его элемент». Заявление Цермело было как удар грома среди ясного неба, частично благодаря его простоте. Как заметил Лебег: «Появился Цермело, и началась драка!»²⁸ Утверждение Цермело вызвало большую дискуссию, продолжавшуюся более десяти лет. Полемика началась с пяти писем, которыми обменялись между собой четверо французских математиков в 1905 г.²⁹

Только Жак Адамар (1865–1963), единственный из четверых, не стал огульно объявлять аксиому Цермело неприемлемой. Он занял исключительно индивидуальную позицию, заявив: «Понятие отображения, допускающего описание, находится за пределами математики; это вопрос психологии, он относится к свойствам нашего разума»³⁰. Излишне говорить, что такой подход только усилил недоверчивость критиков аксиомы выбора.

Лебег был категорически против ее использования. Он утверждал, что «рассуждать о множестве означает рассуждать об объектах в мешке C ; мы знаем только, что эти объекты обладают общим свойством B , которого другие объекты в C не имеют. Следовательно, мы не знаем ничего, что позволило бы нам определять какой бы то ни было порядок среди них. Нам неизвестно даже, как их различать»³¹.

Стало понятно, что использование аксиомы выбора вело к новым математическим парадоксам, вскоре названным антиномиями, чтобы подчеркнуть их философскую значимость. Математики уже сражались с парадоксом Бурали-Форти 1897 г.³² и парадоксами Рассела 1902–1903 гг.³³ Теперь же, с появлением аксиомы выбора, они оказались перед необходимостью иметь дело с парадоксом Ришара об определении числа, которое не может быть определено (!)³⁴ и даже с геометрическими парадоксами. Желание избегать подобных сложностей привело Бореля и Лебега к неприятию аксиомы выбора; впо-

Annalen. 1904. Bd. 59. S. 514–516. См. также: Moore, G. H. Zermelo's Axiom of Choice: Its origin, development and influence. Berlin: Springer, 1990.

²⁸ «Zermelo arriva, et ce fut la bagarre» (Lebesgue, H. Œuvres scientifiques. Genève: L'enseignement mathématique, 1972. P. 294).

²⁹ Hadamard, J., Baire, R., Lebesgue, H., Borel, E. Cinq lettres sur la théorie des ensembles // Bulletin de la Société mathématique de France. 1905. № 23. P. 261–273.

³⁰ «...La notion de correspondance qui peut être décrite est en dehors des mathématiques, relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit» (Cinq lettres... Письмо I).

³¹ «Raisonnement sur un ensemble c'est raisonner sur des objets pris dans un sac C sur lesquels on sait seulement qu'ils ont une propriété B en commun n'appartenant pas aux autres objets de C . On ne sait par conséquent rien qui permette d'aborder la définition de l'ordre des éléments; on ne sait même pas les distinguer» (Письмо Лебега – Борелю, февраль 1905 г. Цит. по: Lebesgue, H. Les lendemains de l'intégrale: Lettres à Emile Borel. Paris: Vuibert, 2004).

³² Burali-Forti, C. Una questione sui numeri transfiniti // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1897. № 11. P. 154–164.

³³ Russell, B. On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types // London Mathematical Society. 1906. № 4. P. 29–53.

³⁴ Richard, J. Lettre à Monsieur le rédacteur // Revue générale des sciences. 1905. № 12. June. P. 12. Для всех трех предыдущих ссылок см. также: Ferreiros, J. Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics. Boston: Birkhäuser, 1999.

следствии представители интуиционистской школы голландского математика Л. Э. Дж. Брауэра (1881–1966) стали называть их «французскими прединтуиционистами»³⁵.

Дискуссии между Бэром, Лебегом, Борелем и Адамаром становились все более изощренными, привлекая то философские, то лингвистические, то психологические аргументы. Споры продолжались в течение многих лет, не приводя ни к какому согласию, они порождали многочисленные статьи в весьма популярных журналах. В 1912 г. Адамар в переписке с Борелем даже связал достоверность аксиомы выбора с существованием броуновского движения!³⁶

Центральная проблема спора была ясно выражена в письме Лебега 1905 г. Он показал, что аксиома выбора эквивалентна принципу полного упорядочения, и далее спросил: «Можем ли мы убедить себя в наличии математической сущности, не определяя ее? Определить всегда означает назвать характерные свойства того, что подлежит определению»³⁷. Следовательно, было ясно, что онтологический статус математических объектов был поставлен на карту.

Эмиль Пикар, последовательный противник теории множеств, был ироничен, но точен, характеризуя сложившуюся ситуацию:

Эти рассуждения о бесконечности образуют совершенно новую главу в истории математики последних лет. Однако следует признать, что эта глава не свободна от парадоксов. Например, оказалось возможным таким образом определять свойства числа, что оно должно было бы в одно и то же время и принадлежать и не принадлежать некому определенному множеству. Все трудности подобного рода вызваны отсутствием согласия в том, что означает слово «существует». Некоторые из тех, кто верит в теорию множеств, — схоласты, которые с удовольствием обсуждали бы доказательства существования Бога со святым Ансельмом и его оппонентом [Гаунилоном], монахом из Нуармутье³⁸.

(Здесь Пикар поминает религию для того, чтобы дискредитировать теорию множеств; в противоположность ему русские математики, о которых речь пойдет ниже, приводили ее в пример для того, чтобы усилить позиции теории множеств.)

³⁵ Например, см.: Heyting, A. *Les Fondements des mathématiques, Intuitionnisme, Théorie de la démonstration*. Paris: Gauthier-Villars, 1955. Тщательное философское обсуждение вопроса см. у Ж. Бувересса: *Bouveresse, J. Sur les sens du mot platonisme dans l'expression 'platonisme mathématique'* // Conférence du 19 novembre 1998 à l'Université de Genève, Société romande de philosophie, groupe genevois (см.: un2sg4.unige.ch/athena/bouveresse/bou_plat.html).

³⁶ Прочитано Э. Борелем в: *L'infini mathématique et la réalité* // *Revue du mois*. 1914. № 18. P 71–84. См.: *Borel E. Philosophie et homme d'action*, Pages choisies et présentées par M. Fréchet. Paris: Gauthier-Villars, 1967. P. 183.

³⁷ «Peut-on s'assurer de l'existence d'un être mathématique sans le définir? Définir veut toujours dire nommer une propriété du défini».

³⁸ «Ces spéculations sur l'infini forment un chapitre tout nouveau dans la science mathématique de ces dernières années, mais il faut reconnaître que ce chapitre n'est pas exempt de paradoxes. C'est ainsi que l'on a pu définir certains nombres appartenant et n'appartenant pas tout à la fois à des ensembles déterminés. Toutes les difficultés de ce genre résultent de ce qu'on ne s'entend pas sur le mot existence. Certains adeptes de la théorie des ensembles sont des scolastiques, qui auraient aimé à discuter les preuves de l'existence de Dieu, avec Saint-Anselme et son contradicteur, le moine de Noirmoutiers» (*Picard, E. La science moderne et son état*. Paris: Flammarion, 1909; фрагмент главы II). Ср.: «Прослогион» Ансельма Кентерберийского и его опровержение Гаунилоном (фр. издание: *Anselme de Cantorbéry. Proslogion. Allocution sur l'existence de Dieu suivi de sa réfutation par Gaunilon et de la réponse d'Anselme*. Paris: Flammarion, 1993).

Вызывает недоумение то странное обстоятельство, что Бэр и Борель, только что продемонстрировавшие в своих работах научное мужество, используя трансфинитные числа теории множеств, теперь, в публичной дискуссии (или «драке», как выражался Лебег), вступали в противоречие с тем, что в этих работах неявно подразумевалось. Это противоречие отмечал в цитированном выше сочинении также Грегори Мур, ограничивший свой анализ исследованиями по теории меры множеств и работами Лебега и Бореля, и затем Серпинского; в последующие годы противоречие прогрессировало до такой степени, что Бэр и Борель стали отрицать не только аксиому выбора ³⁹, но и использование трансфинитных чисел вообще. В 1908 г. Борель продолжал противиться использованию несчетной бесконечности ⁴⁰.

Это явное противоречие требует объяснений. Почему выдающиеся французские математики, и не только те, кто, подобно Пикару, никогда не колебались в своем неприятии теории множеств, но и те, кто, подобно Бэру и Борелю, поначалу благосклонно восприняли некоторые ее аспекты, со временем проявляли все большую и большую враждебность по отношению к ней?

По нашему мнению, на французских математиков действовало то, насколько отрицательно восприняли их теории в философских и культурных кругах в их стране. Такое объяснение подтверждается и различиями в реакции общества на теорию множества во Франции и реакцией в других странах ⁴¹. Отрицательное отношение к теории множеств во Франции формировалось, как нам видится, под влиянием трех различных, в чем-то даже противоположных, традиций и передавалось математикам через их тесные, можно даже сказать родственные, связи с философами, а также благодаря их существованию внутри закрытой централизованной системы образования, особенно внутри Эколь Нормаль и Высшей политехнической школы. Эти три традиции, которые будут сжато охарактеризованы ниже, мы обозначим так: Декарт, позитивизм и Паскаль.

Прежде всего, Декарт для Франции – это покровитель мыслителей и ученых. В исследуемый нами период в среде ультралевых, к которой принадлежал Борель, было принято смотреть на себя как на истинных последователей Декарта ⁴². В соответствии с максимой последнего, человек должен «делить каждую из рассматриваемых [...] трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить [...] руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу» ⁴³.

³⁹ Borel, E. Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici. Roma, 6–11 April 1908.

⁴⁰ То же самое отрицание сохраняется в текстах преамбул ко всем более поздним изданиям его знаменитых *Leçons sur la théorie des fonctions* (*Éléments et principes de la théorie des ensembles: applications à la théorie des fonctions.*) 3^e éd. Paris: Gauthier-Villars, 1950. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.)

⁴¹ О более позитивной реакции в Англии, Германии, Италии и Соединенных Штатах см.: Moore. Zermelo's axiom of choice...

⁴² Демократические традиции и сознание важности образования были возрождены во время полемики по делу Дрейфуса, в которой участвовали многие друзья Бореля.

⁴³ «...Diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. À conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusque la connaissance des plus composés; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne

Каждую проблему следовало разложить на простые составляющие, а мышление подразумевало ясность. Этот принцип совмещения анализа с ясностью выражения внушался каждому школьнику во Франции. Именно его подразумевал литературный критик XVII в. Буало, утверждая: «Все, что понято правильно, может быть выражено ясно, в этом случае слова приходят легко» ⁴⁴.

Насколько идеи Декарта были влиятельны в течение исследуемого нами периода, можно понять хотя бы по бесчисленным посвященным ему статьям и речам, дошедшим до наших дней. Так, на собрании по случаю трехсотлетия со дня смерти Декарта, Эмиль Пикар, убежденный противник теории множеств, восклицал: «Я всегда испытывал безграничное уважение к Декарту, подобающее ему. О нем следует судить по тому совершенно новому направлению, которое он придал науке благодаря своей гениальной интуиции и своему методу» ⁴⁵.

Декарт олицетворял собой убеждение в том, что математика является универсальной и наименее предвзятой формой знания. Борель защищал эту точку зрения, когда во время дискуссий по поводу теории множеств замечал: «С тех пор как мы имеем дело с математикой, а не философией, разногласия могут происходить только из непонимания» ⁴⁶. Борель и другие французские математики хотели вывести философские вопросы за рамки математики настолько, насколько это окажется возможно. Русские математики, о которых мы будем говорить ниже, стремились объединить философские, а на самом деле религиозные, вопросы с математикой.

Вторым философским течением, оказавшим важное влияние на французских математиков, был позитивизм. На конец XIX в. приходится триумф позитивизма Огюста Конта не только в Сорбонне, но и во всем французском образовании, чему способствовала реформа образовательной системы 1902 г. ⁴⁷ По Конту, как только наука освобождает себя от всех метафизических влияний и вступает на «позитивную платформу», ее целью больше не является метафизический поиск истины или рациональной теории, претендующей на то, чтобы представлять действительность. Вместо этого наука представляется собранием законов (корреляций поддающихся наблюдению фактов), используемых ученым без претензий на выяснение природы действительности.

Влияние Паскаля, хотя оно оказалось меньшим, чем влияние картезианства или позитивизма, которым его идеи нередко противоречили, нашло свое

se précédent point naturellement les uns les autres to...» (*Descartes, R. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Paris: chez Michel Bobin et Nicolas Le gras, 1668*). [Цит. по: *Декарт Р. Рассуждение о методе с приложениями: диоптрика, метео-ры, геометрия. М.; Л., 1953. С. 22.*]

⁴⁴ «Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément» (*Boileau-Despréaux, N. Les quatre poétiques: d'Aristote, d'Horace, de Vida, de Despréaux. Paris: Saillant et Nyon-Desaint, 1771*).

⁴⁵ «J'ai toujours eu, comme il convient, un respect infini pour Descartes [...] Il faut juger Descartes savant sur l'orientation toute nouvelle donnée à la science par ses intuitions géniales et par une méthode» (*Picard, E. Une édition nouvelle du discours de la méthode de Descartes. Paris: Gauthier-Villars, 1934*).

⁴⁶ «Dès lors qu'il s'agit de mathématiques et non de philosophie, le désaccord ne peut provenir que d'un malentendu».

⁴⁷ См.: *Belhoste, B. L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XX^e siècle: La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes // Rev. Hist. Sci. 1990. № XLIII/4. P. 371–400.*

отражение, например, в различении «*définition de noms et définition de choses*» («определения имен и определения вещей»). К тому же Паскаль сражался с верой Декарта в «конечные причины». В соответствии с Паскалем не существует абсолютной истины, только геометрическая четкость (он понимал геометрию в очень широком смысле; например, он называл созданную им теорию вероятностей «*Géométrie du hazard*», *aleae geometria*). Именно признание важности геометрии придаст силы Лебегу и Борелю для борьбы против правил, не имеющих геометрических оснований, например, высказанных логичистами – Расселом или Кутюра ⁴⁸.

Эти философские течения, иногда противоречащие друг другу, предохранили французских математиков от смешения философии (не говоря уже о религии!) с математикой и, наоборот, способствовали попыткам ограничить математические понятия теми, для которых можно было найти точное определение так же, как и точный «образ в сознании». Борель покинул теорию множеств и сосредоточился на конкретных проблемах, а именно – на существовании нормальных чисел ⁴⁹. Лебег ограничил себя «эффективными множествами», строго определяемыми явным способом. Однако Лебег все еще был очарован геометрической тайной континуума. Интересно посмотреть, как это противоречие привело его к ошибке, которой он мог бы избежать, если бы использовал трансфинитные индексы ⁵⁰. Эта ошибка оставила брешь для русских математиков Суслина и Лузина, приветствовавших теорию множеств, что и позволило им исправить ошибку через двенадцать лет.

Русский мистицизм и математика

Основателями московской школы теории функций были Дмитрий Федорович Егоров (1869–1931) и Николай Николаевич Лузин (1883–1950) ⁵¹. В первые годы XX в. Лузин изучал математику в Московском университете под руководством Егорова вместе с Павлом Александровичем Флоренским (1882–1937), еще одним человеком, оказавшим влияние на формирование идей московской математической школы. В свои зрелые и профессионально активные годы все трое – Егоров, Флоренский и Лузин – были глубоко

⁴⁸ Тщательный анализ различий во взглядах Паскаля и Декарта на природу математики см.: *Chevalley, C. Contingence et probabilités. Paris: P.U.F., 1995.*

⁴⁹ Нормальные числа – это числа, например, от 0 до 1, записанные в виде разложения на десятичные дроби, они представляют каждую последовательность n символов с частотой, соответствующей случайным числам. Они были введены Борелем (*Leçons sur la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars, 1914. P. 197*). Абсолютно нормальные числа – это числа, которые обладают аналогичным свойством при произвольном основании (не только десятичном). Хотя абсолютно нормальные числа имеют единичную меру, совсем не просто дать их явное (в то время использовалось слово «эффективное») построение. Ссылки и новейшие достижения см.: *Becher, V., Figueira, S. An example of a computable absolutely normal number // Theoretical computer science. 2002. № 270. P. 948–958.*

⁵⁰ См.: *Kantor, J.-M. Dans le gouffre du continu (в печати).*

⁵¹ См.: *Shields, A. Years ago: Luzin and Egorov // The mathematical intelligencer. 1987. № 9. P. 24–27; Golden years of Moscow mathematics // Ed. by S. Zdravkovska, P. L. Duren. Providence: American Mathematical Society, 1993; Vucinich, A. Mathematics and Dialectics in the Soviet Union: The Pre-Stalin period // Historia mathematica. 1999. № 26. P. 107–124; Александров П. С. Математика в СССР за 15 лет. М.: Гостехиздат, 1932.*

религиозными людьми⁵². Флоренский оставил математику ради религиозного образования, разочаровав своих учителей, и стал священником. Егоров и Лузин продолжали работу и стали выдающимися математиками, способствовавшими бурному росту математических исследований в Москве в 20-е – начале 30-х гг. XX в. В конце концов Флоренский и Егоров были арестованы коммунистическими властями по обвинению в смешении математики и религии и закончили жизнь в неволе⁵³. (Одна из жестоких шуток истории заключается в том, что обвинение Флоренского и Егорова в смешении математики и религии было справедливым, и, несмотря на противоположное предположение коммунистов, смешение это оказалось удивительно плодотворным для математики.) Третий из них – Лузин едва избежал заключения, хотя и подвергся «суду» за идеологические отклонения⁵⁴. Из всех троих именно священнику Павлу Флоренскому предстояло придать новому синтезу математики и религии наиболее яркую форму, сыгравшую огромную роль в исследовательских математических работах Егорова, Лузина и их учеников.

⁵² Священнику Флоренскому едва ли требовались доказательства значимости религии; наиболее известное его опубликованное высказывание о вере может быть найдено в работе «Столп и утверждение истины» (М.: Путь, 1914), по-английски она опубликована как: «The pillar and ground of the truth» (перевод Бориса Якимя (Jakim), предисловие Ричарда Ф. Густафсона (gustafson) (Princeton: Princeton University Press, 1997)). Глубокая религиозность Егорова показана в статье: Демидов С. С. Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имяславие в России в первой трети XX столетия // Историко-математические исследования. 1999. Вып. 39. Сер. 2. № 4. С. 137 и др. Приобщение Флоренским Лузина к религиозным взглядам описывается в различных источниках, включая: Ford, C. The Influence of P. A. Florensky on N. N. Luzin // *Historia Mathematica*. 1998. № 25. P. 332–339. См. также: Ford, C. Dmitrii Egorov: Mathematics and Religion in Moscow // *The Mathematical Intelligencer*. 1991. № 13. P. 24–30. Форд проделал очень ценную работу, и мы благодарны за его помощь, но мы не можем согласиться с ним в том, что глубокая религиозность Егорова и его математические концепции не были взаимосвязаны.

⁵³ Флоренский впервые арестован в 1928 г.; затем освобожден и вновь арестован в 1933 г. На этот раз его приговорили к десяти годам в трудовых лагерях в Сибири. Он был казнен 8 августа 1937 г. В 1956 г. его реабилитировали, и с тех пор он постепенно стал привлекать к себе внимание как философ языка и культуры, теолог и, преимущественно в новейшее время, как человек, оказывавший влияние на русскую математику. См.: Gustafson, R. Introduction // *Florensky, P. The pillar and ground of the truth*. Princeton: Princeton University Press, 1997. P. IX–XXIII. Егоров подвергся критике со стороны коммунистической партии в 1929 г., был арестован в 1930 г. и заключен в тюрьму. Он решился на голодную забастовку. Перед самой смертью его под охраной отправили в госпиталь в Казани; он умер 10 сентября 1931 г. Нам передали, что он умер на руках жены математика Н. Г. Чеботарева, работавшей врачом. Сын Чеботарева, Г. Н. Чеботарев, писал: «Он умер на маминых руках...» (Чеботарев Г. Н. Из воспоминаний об отце // Николай Григорьевич Чеботарев / Ред. Ю. Б. Ермолаев. Казань: Изд-во Казанского университета, 1994. С. 56).

⁵⁴ См.: Демидов С. С., Есаков В. Д. «Дело академика Н. Н. Лузина» в свете сталинской реформы советской науки // Историко-математические исследования. 1999. Сер. 2. Вып. 4 (39). С. 156–170; Дело академика Николая Николаевича Лузина / Под ред. С. С. Демидова, Б. В. Левшина. СПб.: Русский христианский гуманитарный институт. 1999; Юшкевич А. П. Дело академика Н. Н. Лузина // Вестник АН СССР. 1989. № 4. С. 102–113; Levin A. Anatomy of a public campaign: «Academician Luzin's case» in Soviet political history // *Slavic Review*. 1990. № 49. P. 211–252; Боголюбов А. Н., Роженов Н. М. Опыт «внедрения» диалектики в математику в конце 20-х – начале 30-х годов // Вопросы философии. 1991. № 9. С. 32–43.

С 1905 по 1908 гг. Лузин переживал психологический кризис, настолько сильный, что несколько раз думал о самоубийстве⁵⁵. Одним из негативно повлиявших на него факторов была неудачная российская революция 1905 г.: событие, которое отрезвило многих левых представителей интеллигенции, таких как Лузин, привыкших романтически рассуждать о своих надеждах на «революцию», не понимая опасности, которую обычно она несет с собой. 1905 год – стал моментом истины. Лузина потрясла не только пролитая кровь, но и свидетельства бедности, виденные им лично. Он был чрезвычайно шокирован видом бедных женщин, занимающихся проституцией, чтобы иметь возможность приобретать еду⁵⁶.

Лузин был чувствительной, в чем-то наивной личностью, и он оказался не готов к боли, которую увидел вокруг себя сразу после неудачной революции. Пытаясь вызволить Лузина из духовного кризиса, его учитель Егоров в декабре 1905 г. отправил его за границу, но путешествие не решило духовных и интеллектуальных проблем Лузина. Его вера в науку и математику разрушилась. Он остался совершенно без цели в жизни. В отчаянии он писал Флоренскому из Парижа 1 мая 1906 г.:

Вы застали меня в университете ребенком, не знающим многого. Не знаю, как это случилось, – но я не могу удовлетворяться более теперь аналитическими функциями и рядом Тейлора [...] Видеть горе людей, видеть муку жизни... – это зрелище невыносимо... Но одной наукой жить не могу... У меня ничего нет, ни мирозерцания, ни образования⁵⁷.

В длительной переписке и бесчисленных встречах в Сергиевом Посаде глубоко верующий Флоренский привел Лузина к новому мировоззрению. Это мировоззрение включало в себя одновременно и религию, и математику и, как мы увидим, дало пребывавшему в отчаянии Лузину причину верить, что он может возобновить свои математические исследования, служа в то же время моральным и религиозным целям.

Флоренский был убежден, что с точки зрения философии, религии и этики большая часть XIX в. была катастрофической и что особый тип математики, господствовавший в течение этого века, оказался одной из главнейших причин этого несчастья. Именно идею непрерывности, веру в то, что все явления природы протекают плавно, что одно состояние сменяется другим, лишь проходя через все промежуточные, то есть руководящую математическую идею XIX в., Флоренский считал ответственным за этическое падение. На место этого «фальшивого» принципа Флоренский предлагал поставить его противоположность – принцип скачкообразного изменения, который он считал морально и религиозно превосходящим.

Флоренский превосходно знал, что дискуссии об антиномии непрерывного–дискретного длились уже тысячелетия, восходя еще ко временам древних гре-

⁵⁵ 15 июля 1908 г. Лузин писал Флоренскому: «Два раза я был очень близок к самоубийству – я тогда приезжал сюда, в Троицу, ища беседы с Вами, и оба раза я чувствовал, что опираюсь как на “столп” [...] я Вам обязан интересом к жизни» (цит. по: Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 32. С. 148).

⁵⁶ Там же.

⁵⁷ Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским... С. 135–136.

ков, где наиболее ярким их выражением стали парадоксы Зенона. Однако он верил, что этот вопрос получил новую актуальность, поскольку, по его мнению, XIX в. достиг несчастливого апогея в вере в непрерывность. Действительно, Флоренский писал, что в XIX в. «цементирующая идея непрерывности соединила все материалы в один исполинский монолит»⁵⁸.

Этот монолит, продолжал Флоренский, возник благодаря новому математическому подходу — анализу бесконечно малых. Этот метод стал всемогущим, потому что анализ бесконечно малых лежал в самом сердце ньютоновской механики, а отсюда и всей физики. Обманутые этим кажущимся всемогуществом математики сосредоточили все свое внимание на непрерывных функциях, поскольку все дифференцируемые функции являются непрерывными. Флоренский был убежден, что математики и философы в результате стали игнорировать проблемы, не решаемые методами математического анализа, связанные с дискретными феноменами.

Так как непрерывные функции описывают «детерминированные процессы»⁵⁹, то экспансию философии детерминизма в психологию, социологию и религию Флоренский рассматривал как разрушительный итог временного увлечения такими функциями в математике. Таким образом он считал математику XIX в. ответственной за разрушение прежней веры в свободу воли, религиозную автономию и искупление.

Флоренский полагал, что наука, «виновная» в вопиющей переоценке непрерывности, т. е. математика, должна была вывести мыслителей из тупика, в который она сама их и завела. В 1880-е гг. Георг Кантор приступил к созданию теории множеств и проанализировал «континуум» просто как одно из возможных множеств, ничем не лучшее среди всех прочих, и тем самым лишил понятие непрерывности его метафизической догматической силы⁶⁰. (Основы теории множеств были введены в курсы Московского университета в 1900/01 учебном году, в тот самый год, когда Флоренский приступил там к изучению математики; соответственно Флоренский быстро узнал об этом событии⁶¹.) Теперь дорога была проторена, Флоренский получил поддержку в своем намерении восстановить дискретность на ее законном месте в мировоззрении. Флоренский воззвал к «зарю нового, прерывного мирозерцания»⁶² и призвал своих коллег, таких как Лузин и Егоров, развить этот новый подход, который, как он думал, совместит математику, религию и философию.

Хотя Флоренский стал священником Русской православной церкви, его теологические взгляды были нетрадиционными. Действительно, он разделял

⁵⁸ Флоренский П. А. Введение к диссертации «Идея непрерывности как элемент мирозерцания» // Историко-математические исследования. 1986. Вып. 30. С. 160. О философской дискуссии по проблеме разрывности, особенно в русском контексте, см.: Ахундов М. Д. Проблема прерывности и непрерывности пространства и времени. М.: Наука, 1974. Также см.: Bouveresse, J. Weyl, Wittgenstein, et le problème du continu // Le Labyrinthe du continu / Ed. by J.-M. Slangs, H. Sinaceur. Paris; Berlin; New York: Springer-Verlag, 1992.

⁵⁹ Флоренский. Введение к диссертации... С. 170.

⁶⁰ О Канторе см.: Dauben, J. W. Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite. Cambridge: Harvard University Press, 1979.

⁶¹ Медведев Ф. А. О курсе лекций Б. К. Млодзевского по теории функций действительного переменного, прочитанных осенью 1902 г. в Московском университете // Историко-математические исследования. 1986. Вып. 30. С. 130–147.

⁶² Флоренский. Введение к диссертации... С. 159–176.

взгляды, осужденные церковью как еретические. Нам необходимо окинуть взглядом историю этого конфликта внутри Русской православной церкви, для того чтобы понять, каким образом он оказался связан с математикой.

В 1907–1917 гг. мир русского православия, государственной религии, потрясла теологическая борьба. Полемика разгорелась между двумя группами верующих, имяславцами («поклонниками имени» или «номиналистами») и имяборцами («антиноминалистами») ⁶³.

Спор коренился в старом как мир вопросе – каким образом человек может поклоняться непознаваемому божеству. Если Бог в принципе вне пределов понимания смертных (и Священное Писание содержит много подобных утверждений ⁶⁴), то как, совершенно не понимая Его природы, люди могут Ему поклоняться? Как следует поклоняться? Наиболее осмысленным ответом, данным на эту дилемму на протяжении всей истории религии, было обращение к символам: иконы, имена, ритуалы, музыка, мощи, ощущения, запахи, искусство, архитектура, литература. Символизм – это использование постижимого объекта или деятельности для того, чтобы представить разуму облик чего-то, что невидимо, но осознается благодаря ассоциации с ним ⁶⁵.

В 1907 г. православный монах Иларион, ранее проведший годы в русском монастыре на горе Афон в Греции, опубликовал книгу, озаглавленную «На горах Кавказа». Он взял за основу имеющуюся символическую традицию православной литургии, особенно «Иисусову молитву» и поднял ее на новую высоту ⁶⁶. Читая «Иисусову молитву», верующий произносит имена Христа

⁶³ См.: Имяславие (антология) / Под ред. Е. С. Полищука. М.: Факториал-пресс, 2002; также см.: Соломина О. Л., Хитров А. М. Забытые страницы русского имяславия. Сборник документов и публикаций по афонским событиям 1910–1913 гг. М.: Паломник, 2001; Рассказов Ю. Секреты имен: от имяславия до философии языка. М.: Лабиринт, 2000; о. Иларион. Священная тайна церкви: введение в историю и проблематику имяславских споров. СПб.: Алетейя, 2002. Florovsky, G. Ways of Russian theology. Part 2 / Trans. by R. L. Nichols // *Id.* The Collected Works of Georges Florovsky: in 7 vols. / Ed. by R. S. Haugh. Vol. 6. Vaduz: Büchervertriebsanstalt, 1987. P. 376; Dykstra, T. Heresy on Mt. Athos: Conflict over the Name of God Among Russian Monks and Hierarchs, 1912–1914. Master's essay, St. Vladimir's Seminary. New York, 1988; Niviere, A. Les moines onomatodoxes et l'intelligentsia Russe // *Cahiers du Monde russe et soviétique*. 1988. № 29 (2). P. 181–194; Kenworthy, S. M. Church, State, and Society in Late-Imperial Russia: The Imiaslavie Controversy: Paper given at American Association for the Advancement of Slavic Studies National Convention. Pittsburgh, November 2002. Хотя дебаты об имяславии приобрели чрезвычайно интенсивный характер в первую треть XX в., корни противостояния уходят далеко вглубь истории Восточного православия и могут быть обнаружены в некоторых писаниях и высказываниях Василия Великого, Иоанна Златоуста и других деятелей церкви (см.: Florovsky. Ways of Russian theology...).

⁶⁴ Например, в «Послании к Филиппийцам» 4 : 7: «И мир Божий, который превыше всякого ума, соблюдает сердца ваши и помышления ваши во Христе Иисусе».

⁶⁵ И математика, и религия нашли трудные, но очень разные применения символам. И в общих случаях встает вопрос об автономии символов. Хотя Флориан Кэджори прямо не упоминает об этом предмете, см. его полезную книгу: Cajori, F. A history of mathematical notations. Chicago, 1929; также см.: Avis, P. D. L. God and the creative imagination: metaphor, symbol, and myth in religion and theology. Routledge; New York, 1999.

⁶⁶ Полное название книги звучит следующим образом: «На горах Кавказа, беседа двух старцев подвижников о внутреннем единении с Господом наших сердец чрез молитву Иисуса Христа, или Духовная деятельность современных пустынножителей Кавказских гор схимонах Иларион»; первое издание – Баталпащинск, 1907; второе, исправленное и дополненное, – 1910 г.; третье издание – Киево-Печерская Лавра, 1912.

и Бога-Отца снова и снова, сотни раз, до тех пор, пока все его тело не достигает состояния религиозного экстаза, в котором даже биение его сердца, в добавление к дыхательному циклу, предположительно попадает в тон с произносимыми словами «Христос» и «Бог» (состояние, ярко описанное Дж. Д. Сэлинджером в повести «Фрэнни») ⁶⁷. По Илариону, поклоняющийся достигает состояния единения с Богом посредством ритмического произношения Его имени. И это демонстрирует, утверждал Иларион, что имя Бога свято само по себе, что имя Бога есть Бог («Имя Божие есть сам Бог») ⁶⁸.

Вначале книгу хорошо приняли многие русские, интересовавшиеся религиозной мыслью. Взгляды Илариона стали также очень популярны среди сотен русских монахов на горе Афон, постепенно распространивших их далее. Но руководство Русской православной церкви в Санкт-Петербурге и Москве вскоре начало рассматривать книгу не просто как описание смысла молитвы, но как теологическое притязание. Для многих из них сторонники веры Илариона казались еретиками и даже языческими пантеистами, поскольку они якобы смешивали символы Бога с самим Богом. 18 мая 1913 г. Святейший синод в Санкт-Петербурге осудил имяславцев; вскоре после этого русский флот, с одобрения царя Николая II и патриарха Константинопольского (под юрисдикцией которого находились афонские монастыри), послал несколько военных кораблей к горе Афон, дабы привести мятежных монахов к повиновению силой. Около 600 нераскаявшихся монахов выгнали из их келий с помощью пожарных шлангов и доставили под охраной в Одессу. Впоследствии число арестованных выросло почти до 1000 человек ⁶⁹. Отступники решительно протестовали против подобного обращения с ними и добивались нового расследования и пересмотра своего дела. У имяславцев было несколько высокопоставленных защитников (включая Флоренского, в то время профессора

Корни «Иисусовой молитвы» уходят в глубь веков; начало традиции обычно ведут от послания апостола Павла к верующим «Непрестанно молитесь» (Первое послание к фессалоникийцам св. апостола Павла. 5.17). Традиция существует и в католической, и в православной литургии, о ней создана пространная литература. В России «Иисусова молитва» приобрела особую известность, сразу после публикации в 1884 г. в Казани сочинения «Путь странника» (The way of the pilgrim), ставшего фольклорной классикой. Книга сделала эту молитву популярной и была переведена на многие языки.

⁶⁷ Сэлинджер описывает Фрэнни, просвещающую своего невнимательного друга Лейни: «И тут этот старец первым делом рассказал ему про молитву Христову [...], если станешь повторять молитву снова и снова – сначала хотя бы одними губами, – то в конце концов само собой выходит, что молитва сама начинает действовать. Что-то потом случается. Сам не знаю что, но что-то случается, и слова попадают в такт твоему сердцебиению, и ты уже молишься непрестанно. И это как-то мистически влияет на все твои мысли, мировоззрение. Понимаешь, вся суть более или менее именно в этом. Ты молишься – и мысли очищаются, и ты совершенно по-новому воспринимаешь и понимаешь все на свете» (Salinger, J. D. *Franny and Zooey*. Boston, 1961. P. 36–37 [цит. по: Сэлинджер Дж. Д. Фрэнни. М., 1983. С. 16]).

⁶⁸ Losev A. F. «Imiaslavie» // www.ccel.org/contrib/ru/Other/Losev/ONOMATOD.HTM. P. 3; Имяславие (антология)... С. 490.

⁶⁹ Имяславие (антология)... С. 479–518.

Московской духовной академии); сам царь, кажется, не имел однозначного мнения по этому поводу ⁷⁰.

С началом Первой мировой войны вопрос отодвинулся на второй план, но вплоть до падения царского режима приверженцам «ереси» запрещалось возвращаться на Афон или проживать в больших городах, таких как Петербург и Москва. Наиболее пылкие из них уединились в монастырях, в том числе хорошо знакомых Флоренскому, и там продолжали практиковать и распространять свой вариант христианской веры.

После большевистской революции октября/ноября 1917 г. имяславцы, теперь расселившиеся по всей сельской России, оказались в лучшем положении, чем большинство других верующих, поскольку имели возможность продолжить практиковать свою веру вне поля зрения политических властей, стремившихся подавить религию. В конце концов имяславцы уже были однажды определены как еретики. К богословской квалификации имяславия должен был вернуться Собор Русской православной церкви. Однако Собор, собравшийся в 1918 г., был разогнан большевиками и вопроса об имяславии решить не успел ⁷¹. Но имяславцы продолжали следовать своей вере, и поскольку они не были на виду, то не скомпрометировали себя сотрудничеством с большевиками, как это вскоре случилось с некоторыми признанными церковными лидерами. Отступники заявили, что именно они являются представителями подпольной «истинной веры», увеличивая свою популярность одновременно с некоторыми религиозными противниками нового коммунистического режима. (Поразительно, но еще в 1983 г. распространялись слухи о тайном существовании в Советском Союзе последователей отступнической веры имяславцев ⁷², и находились люди, утверждавшие, что потомки членов секты все еще практикуют свою веру на Кавказе даже в настоящее время, пережив своих советских притеснителей ⁷³. В Москве же последние публикации показывают, что некоторые идеи имяславцев все еще привлекательны для интеллектуалов ⁷⁴.)

Во время большевистской революции Павел Флоренский жил в Сергиеве Посаде, городке неподалеку от Москвы, и религиозно и интеллектуально был близок к диссидентам из числа имяславцев. Он формулировал свои идеи на математическом языке и делился ими с Лузиным и Егоровым. В 1920-е гг. в Москве действовал «имяславческий кружок», в котором соединялись идеи ре-

⁷⁰ По мнению Владимира Губанова, Священный синод побуждал царя уничтожить ересь, прежде чем она расколет веру и нацию, однако близкий ко двору монах Григорий Распутин защищал имяславцев. Царь явно колебался, но в конце концов поддался убеждениям синода. (Губанов В. Царь Николай II и новые мученики: пророчества, чудеса, открытия и молитвы: документы. СПб.: Общество Св. Василия Великого, 2000). Том Дикстра также писал, что Распутин мог поддерживать имяславцев, см. его работу: *Dykstra, T. Heresy on Mt. Athos: Conflict over the name of God Among Russian monks and hierarchs, 1912–1914. Master's essay. New York: St. Vladimir's Seminary, 1988.*

⁷¹ Демидов С. С. Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имяславие в России в первой трети XX столетия // Историко-математические исследования. 1999. Вып. 39. С. 129–130.

⁷² Имяславие (антология)... С. 513.

⁷³ Еп. Иларион (Алфеев). Священная тайна церкви. Т. 2 (цит. по: st-jhouse.narod.ru/biblio/texts.htm).

⁷⁴ См. очерк известного математика А. Н. Паршина, ученика Игоря Шафаревича и члена-корреспондента по отделению математики Российской академии наук: *Паршин А. Н. Свет и слово (к философии имени) // Имяславие (антология)... С. 529–544.*

лигиозных диссидентов и математические концепции. Кружок состоял из пятнадцати или шестнадцати философов, математиков и религиозных мыслителей. Иногда они собирались на квартире Егорова, и на нескольких из этих встреч Флоренский представлял свои доклады ⁷⁵. Здесь он излагал идею о том, что «точка, в которой встречаются божественная и человеческая энергия, есть «символ», который больше чем он сам» ⁷⁶. По мнению Флоренского, религиозные и математические символы могли достигать полной автономии.

Флоренский понимал, что благодаря имяславцам вопрос «именования» получил совершенно новое звучание. Дать имя чему бы то ни было значило породить новую сущность. Флоренский был убежден, что математика – продукт свободного творчества человеческих существ и что она имеет религиозный смысл. Люди могут использовать Свободную Волю и обратить ее в перспективную математику и философию. Знаменитое высказывание Георга Кантора (взятое эпиграфом к этой статье) о том, что «сущность математики заключается в ее свободе», несомненно имело большую привлекательность для Флоренского. Математики могли создавать сущности (множества) просто присваивая им имена.

Например, задание множества чисел таким образом, что их квадраты составляют менее 2, и называя его «А», и аналогично множества чисел, квадраты которых составляют более 2, и называя его «В», непосредственно давало жизнь (по существу – построение Евдокса-Коши) вещественному числу $\sqrt{2}$.

Развитие теории множеств стало для Флоренского драгоценным примером того, как наименование и классификация могут приводить к крупным научным открытиям. «Множество» являлось просто присваиванием названий в соответствии с произвольной ментальной системой, а не распознаванием типов онтологически сложившихся объектов. Когда математик создает «множество», давая ему название, он дает жизнь новой математической сущности. Наименование множеств является математическим актом, точно так же как, с точки зрения имяславцев, именование Бога – актом религиозным.

Флоренский утверждал, что приходит время нового вида математики, который освободит человечество от материалистических, детерминистических моделей анализа, столь распространенных в XIX в. Действительно, теория множеств, новое понимание феномена непрерывности и прерывности, точно так же, как развитие открытых в 1897 г. Гензелем *p*-адических чисел под названием «аритмология» (открытие, которое произвело сильное впечатление на Егорова, Лузина, Флоренского и их последователей), а также прерывные функции – стали отличительными признаками московской математической школы.

Мысль о том, что «именование» является актом творения, имеет очень глубокие религиозные и мифологические корни. Высказывалось предположение, что древнеегипетский бог Птах создал все, им задуманное, при помощи своего языка ⁷⁷. Книга Бытия сообщает нам, что Бог сказал: «...Да будет свет. И стал свет». Другими словами, сначала Он дал свету имя, а потом уже создал

⁷⁵ Имяславие (антология)... С. 513.

⁷⁶ См.: st-jhouse.narod.ru/biblio/texts.htm.

⁷⁷ Современный перевод Мемфисской теологии (Memphite Theology) см.: *Clagett, M. Ancient Egyptian Science. Vol. I. Philadelphia: American Philosophical Society, 1989. P. 305–312, 595–602. Мы благодарим Джона Мердока за это предположение.*

его. Имена – это слова, и первая строка Евангелия (св. Иоанна), гласит: «В начале было Слово, и Слово было у Бога, и Слово было Бог». В еврейской мистической традиции Каббалы (Книга Творения, Захария) существует вера в творение через эманацию, а имя Бога рассматривается как священное ⁷⁸.

Взаимосвязь между российскими религиозными диссидентами, подчеркивавшими важность имен Христа и Бога, и новыми тенденциями в московской математике выходит за пределы предположений и выводов, обсуждавшихся до настоящего времени. Существовала прямая лингвистическая связь. Московские математики Лузин и Егоров поддерживали контакты с французскими математиками, имевшими схожие интересы. Как отмечалось ранее, Анри Лебег представил в 1904 г. концепцию «называемых множеств», имея в виду множества, которые могут быть сконструированы без использования аксиомы выбора Цермело ⁷⁹. Он говорил о «назывании множества» («nommer un ensemble») ⁸⁰, и такое множество впоследствии обычно называлось «называемым множеством» («ensemble nommé»). Его русский эквивалент – «именное множество». Таким образом коренное слово «имя» присутствовало в русском языке одновременно в качестве математического термина, обозначавшего новые виды множеств, и в качестве религиозного термина «имяславия» («имяславцы»). Действительно, большая часть работы Лузина над теорией множеств включала изучение эффективных множеств («называемых множеств»). Для Флоренского это означало, что и религия, и математика двигались в одном и том же направлении.

Роджер Кук из университета Вермонта, изучавший личные записи Лузина в архивах Москвы, заметил:

[Лузин] неоднократно делал попытки исследовать концепцию «поддающегося наименованию» объекта и ее отношение к каталогу флоры и фауны анализа, найденному в классификации Бэра. Для Лузина гипотеза континуума была просто одним из аспектов общей проблемы наименования множества счетных порядковых чисел; кажется, он верил в то, что если возможно назвать это множество в том смысле, который вкладывал в это Лебег, то будет нетрудно решить вопрос о его кардинале. [...] Лузин очень усердно пытался именовать все счетные порядковые числа ⁸¹.

В заметках Лузина в одном месте мы читаем: «Все кажется сном наяву, игрой с символами, которая, однако, приносит чрезвычайно богатый урожай» ⁸². В другом месте Лузин небрежно замечает: «nommer, c'est avoir individu» ⁸³.

И французские, и русские математики пытались совладать с проблемой определения математического объекта, выяснить, что дозволено с ним делать и каким должно быть его описание. Как отмечалось ранее, в 1905 г. Лебег пи-

⁷⁸ Scholem, G. Major trends in Jewish mysticism. New York: Schocken Books, 1995.

⁷⁹ Позднее, после вмешательства Цермело, а также письма Ришара, например, Борель будет использовать термин «эффективный» (см.: Cinq lettres... P. 261–273).

⁸⁰ Lebesgue, H. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo // Bulletin de la Société mathématique de France. 1907. № 35. P. 227–237; особенно P. 228, 236.

⁸¹ Cooke, R. N. N. Luzin on the problems of set theory (неопубликованная рукопись). Январь, 1990. С. 1–2.

⁸² Ibid. С. 7.

⁸³ Ibid.; Архив РАН. Ф. 606. Оп. 1. Ед. хр. 34. Несколько неудачный французский оборот, смысл которого, однако, вполне понятен[: назвать – означает получить индивидуум].

сал Борелю: «Возможно ли убедиться в существовании математического объекта, не давая ему определения?»⁸⁴. Перед Флоренским стоял вопрос аналогичный: «Возможно ли убедить себя в существовании Бога, не давая Ему определения?» Ответ для Флоренского и, позднее, для Егорова и Лузина был следующим: акт именования сам по себе дает объекту жизнь. Таким образом «именование» стало ключом и для религии и для математики. Имяславцы давали определение Богу, поклоняясь Его имени, математики давали определение множествам, присваивая им имена.

Кружок учеников, сформировавшийся вокруг Лузина примерно в начале Первой мировой войны и продолжавший существовать в начале 20-х гг., был известен как «Лузитания». Непрямой намек на место, занимаемое религией в делах лузитанцев, дает рассказ одного из них – М. А. Лаврентьева (1900–1980)⁸⁵, впоследствии крупного математика и основателя Академгородка в Новосибирске. По его словам, лузитанцы признавали двух лидеров: «бога-отца» – Егорова и «бога-сына» – Лузина.

Именно Лузин говорил молодым лузитанцам: «главный в нашем коллективе – Егоров» и «окончательная оценка работы, открытия принадлежат Егорову». Студентам, участвовавшим в обществе, были присвоены монашеские титулы «послушников». Комментируя лаврентьевское описание группы, Эстер Филлипс писала: «Там, несомненно, существовало сильное ощущение принадлежности к узкому кругу или тайному ордену»⁸⁶. Все «основные и новички» приходили к Егорову домой три раза в год: на Пасху, Рождество и его именины. Среди лузитанцев существовало крепкое товарищество, вдохновленное Лузиным, слывшим человеком общительным и склонным к театральности и пробуждавшим искреннюю преданность среди студентов и коллег. Егоров, с другой стороны, старший член кружка, был более сдержанным и официальным. По словам Лаврентьева, тремя главными помощниками Лузина по управлению «Лузитанией» были три студента, каждый из них имел свои обязанности: Павел Александров – «создатель», Павел Урысон – «хранитель» и Вячеслав Степанов – «глашатай» тайн «Лузитании».

Московская школа математики дала жизнь новой области – дескриптивной теории множеств⁸⁷. Дату ее рождения можно назвать точно. В этот день в 1917 г. один из студентов Лузина Михаил Суслин (1894–1919)⁸⁸ ворвался в кабинет своего научного руководителя (Лузина), чтобы показать ему ошибку, найденную им в оригинальной статье, опубликованной в 1905 г. великим французским математиком Анри Лебегом. К счастью, у этой сцены оказался

⁸⁴ «Peut-on s'assurer de l'existence d'un être mathématique sans le définir?» (Cinq lettres...).

⁸⁵ Лаврентьев М. А. Николай Николаевич Лузин // Успехи математических наук. 1974. № 29 (5). С. 177–182; то же: Russian Mathematical Surveys. 1974. № 29 (5). P. 173–178.

⁸⁶ Phillips, E.R. Nicolai Nicolaevich Luzin and the Moscow School of the theory of functions // Historia Mathematica. 1978. № 5. P. 293.

⁸⁷ Дескриптивная теория множеств, родившаяся в это время, стала средством для анализа «сложности» отношений вещественных чисел, при помощи сложности их описания. Главная цель дескриптивной теории множеств – описать все «природные» множества вещественных чисел, используя различные конструкции для построения строгой иерархии, начинающейся с простейших множеств, состоящих из открытых интервалов вещественных чисел.

⁸⁸ Подробнее о Суслине, трагически умершем совсем в молодом возрасте, см.: Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин. М.: Наука-Физматлит, 1996.

свидетель: молодой польский математик Вацлав Серпинский. Позднее Серпинский вспоминал: «Господин Лузин отнесся очень серьезно к этому молодому студенту, претендовавшему на то, что он нашел ошибку в статье столь выдающегося ученого»⁸⁹.

У Суслина и Лузина ушло несколько месяцев на то, чтобы понять глубинную структуру, стоящую за этой проблемой. Как продолжал Серпинский: «Суслин создал целый новый класс множеств и начал строить иерархию подмножеств действительной прямой»⁹⁰.

* * *

Мы уверены, что наше исследование французского и русского вариантов развития теории множеств и теории функций обратило внимание читателей на исключительную важность культурных факторов в создании и развитии математики; во французском случае – это Декарт, позитивизм и Паскаль; в русском – мистические религиозные верования, особенно верования имяславцев. Так что французы и русские руководствовались разными подходами.

Мы сознаем, что интеллектуальная каузальность такого типа, которую мы описали, возможно, никогда не будет доказана, а только сделана правдоподобной и убедительной. Тем не менее мы думаем, что наша интерпретация стала выглядеть более убедительно, когда были представлены свидетельства рационалистических сомнений французов и религиозного мистицизма русских. Мы уверены, что сравнительное изучение, которое мы предложили, служит более доказательным подтверждением влияния общества на развитие науки, чем это можно сделать на материале развития идей в рамках одной культуры. Сравнение французских и русских математиков, работавших над одними и теми же проблемами в одно и то же время, высвечивает различия в их взглядах. Русский случай особенно интересен, поскольку он показывает, что религия может сыграть, хотя бы временно, положительную роль в науке.

Влияние религии на математику не является новой темой, наоборот, оно прослеживается как минимум до Пифагора. Герман Вейль в своем анализе золотого века греческой математики отмечал:

Оставляя в стороне тот факт, что математика является необходимым инструментом естественных наук, чистое математическое исследование само по себе, в соответствии с убеждением многих великих мыслителей, своим специальным характером, своей достоверностью и строгостью, более приближает человеческий разум к божественному, чем это достижимо с помощью любого другого средства. Математика – это наука о бесконечности, ее цель – символическое постижение бесконечности человеческим, то есть конечным. Величайшим достижением греков является противопоставление конечного бесконечному, столь плодотворное для познания реальности. Придя с Востока, религиозная интуиция бесконечности, *ареион*, завладела греческой душой. Это напряжение между конечным и бесконечным и его примирение сегодня представляют собой движущую силу исследований древнегреческой цивилизации⁹¹.

⁸⁹ *Sierpiński, W.* Les ensembles projectifs et analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1950.

⁹⁰ Отправляясь от класса множеств, введенных Борелем для нужд его теории меры (так называемых борелевских множеств), он показал, что борелевский класс был неполным, и пошел дальше в создании новых ступеней в иерархии.

⁹¹ *Weyl, H.* God and the Universe: the open world. New Haven: Yale University Press, 1932. P. 8.

По нашему мнению, рационалистические взгляды французских математиков, описанные в настоящей статье, служили тормозящим фактором в процессе признания ими трансфинитных чисел, а религиозные интересы русских стали стимулирующим фактором, однако мы не считаем это взаимоотношение жизненно необходимым или неотъемлемым. Мы отстаиваем не положение о необходимости взаимосвязи между религией и наукой, а конкретную интерпретацию подобного взаимодействия, существовавшую в конкретном времени и месте.

Хотя Лузин был очень близок с некоторыми ведущими французскими математиками и неоднократно подчеркивал, насколько многим им обязан, по своему мировоззрению он сильно отличался от них. Изучая теорию множеств, французы хотели ясно идентифицировать ее философские, математические и психологические составляющие и сохранять их по отдельности. В противоположность этому, Лузин и некоторые его друзья верили в то, что математика связана с религией, но они не могли искренне говорить об этих связях в послереволюционный период из-за враждебного отношения к таким вопросам советского окружения. Они знали о проблемах с властями, которые возникнут немедленно, если взгляды, обсуждавшиеся на встречах «имяславского кружка», станут известны⁹². В итоге Лузин и его друзья были «разоблачены» и подверглись преследованиям, но только после того, как они совершили крупные математические открытия. В 20-е годы религиозные и философские подходы Лузина помогли усилить его глубокую математическую оригинальность. А его ученики создали новую область: дескриптивную теорию множеств.

Один из ведущих французских математиков, участвующий в этой истории, Анри Лебег, в конце концов признал, что именно «философия», которую он и его французские коллеги пытались избегать в математике, помогла Лузину совершить его инновации. Как писал Лебег в предисловии к книге Лузина, изданной в 1930 г. в Париже, «математические требования и философские требования у него постоянно соединены, даже можно сказать, что они сплавлены вместе»⁹³. Лебег признавал, что такой подход позволил его ученикам отыскать концепцию, которую сам Лебег не увидел. Но как только его глаза открылись, он был поражен плодотворностью подхода русских. Открыто изумляясь, он заявлял: «Господин Лузин исследует вопросы с философской точки зрения и приходит к математическим результатам: беспрецедентная оригинальность!»⁹⁴

⁹² Известно, что Егоров был главой этого кружка, но мы не можем с уверенностью утверждать, что и Лузин был его членом или хотя бы посещал его собрания. Нам известно, что Лузин был другом отца Павла Флоренского, что он был близок к имяславии (движению имяславцев) и что в своих математических исследованиях он делал акцент на «назывании». Лузин осторожнее Егорова и, возможно, старался тщательнее скрывать свои религиозные взгляды от советских властей.

⁹³ «...Exigences mathématiques et exigences philosophiques sont constamment associées, on peut même dire fondues» (*Lebesgue, H. Préface // Lusin, N. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris: Gauthier-Villars, 1930. P. XI* [русский перевод: *Лебег А. Предисловие к книге Н. Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их приложениях» // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3. С. 9–14*]).

⁹⁴ «M. Lusin examine les questions d'un point de vue philosophique et aboutit ainsi à des résultats mathématiques: originalité sans précédent!» (*Lebesgue. Préface... P. IX*).