

# Историко-научные исследования за рубежом

## ОПЫТ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ НОВОГО ВРЕМЕНИ

проф. И. Г. БАШМАКОВА, акад. А. Н. КОЛМОГОРОВ,  
акад. АПН СССР А. И. МАРКУШЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук  
А. Н. ПАРШИН, проф. А. П. ЮШКЕВИЧ

Коллектив ученых, выступающий под именем Н. Бурбаки, с давних пор уделяет внимание истории математики. Многие тома «Элементов математики» Бурбаки, издающихся с 1939 г., содержат более или менее подробные очерки развития соответствующих дисциплин. Эти очерки, подвергнутые незначительной обработке, составили вышедшие в 1960 г. «*Éléments d'histoire des mathématiques*»<sup>1</sup>, переизданные в 1974 г. Не секрет, что большая часть этого сочинения была написана А. Вайлем и Ж. Дьедонне. Недавно под редакцией и при авторском участии Ж. Дьедонне вышла двухтомная книга о математике XVIII—XIX вв.<sup>2</sup>

В предисловии к рецензируемому труду говорится: «Современное преподавание математики часто упрекают за его преждевременно абстрактный характер: существует тенденция вводить основные понятия сразу в их общем виде, который представляется лишенным точек соприкосновения с предметами традиционной математики. Если такой прием оправдан необходимостью быстро прийти к теоремам, обладающим достаточной общностью, чтобы их можно было применять в различных обстоятельствах, все же эти общие понятия могут быть лучше поняты, если осознаны их происхождение и ход эволюции, начинающейся с более частных, но более близких к интуиции представлений.

Данный труд предназначен облегчить такое понимание, рассматривая наиболее элементарные понятия современной математики в их историческом контексте, как в аспекте их внутренней эволюции, так и в отношениях с задачами, которые ставили приложения математики к естественным наукам. В нем излагается развитие главных понятий и результатов различных областей математики за период примерно с 1700 по 1900 г.

Выбор как основного периода 1700—1900 гг. объясняется прежде всего тем фактом, что только в конце семнадцатого века были введены основные средства, сделавшиеся с тех пор господствующими во всей математической технике: исчисление бесконечно малых и метод декартовых координат, которые содержали в зародыше слияние Алгебры, Геометрии и Анализа, характеризующее математику нашей эпохи» (т. I, с. IX).

Впрочем, границы 1700 и 1900 гг. не являются жесткими. Книга предназначена для читателя, знакомого с математикой в объеме первых 2—3 лет университетского курса. Это повлекло за собой отказ от рассмотрения истории ряда вопросов—алгебраической

<sup>1</sup> См. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер. с франц. И. Г. Башмаковой под ред. К. А. Рыбникова. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

<sup>2</sup> См. Краткая история математики. 1700—1900. I. Алгебра, классический анализ, теория чисел. II. Эллиптические функции, функциональный анализ, дифференциальная геометрия, алгебраическая топология, вероятности, математическая логика. Под редакцией Ж. Дьедонне, члена Института, в сотрудничестве с П. Дюгаком, У. Дж. и Э. Эллисонами, Ж. Герендоном, М. Гийомом, Г. Хиршем, К. Узелем, П. Либерман, М. Лоевом, Ж.-Л. Верлеем. Париж, Изд-во Эрман, 1978, с. X+385, VII+472. (*Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700—1900. I. Algèbre, analyse classique, théorie des nombres. II. Fonctions elliptiques, analyse fonctionnelle, géométrie différentielle, topologie algébrique; probabilités, logique mathématique. Sous la direction de J. Dieudonné, de l'Institut. Avec la collaboration de P. Dugac, W. J. et F. Ellison, J. Guérindon, M. Guillaume, G. Hirsch, C. Houzel, P. Libermann, M. Loève, J.-L. Verley. Hermann. Paris, 1978. X+385, VII+472*).

геометрии, спектральной теории операторов, эргодической теории, теории групп Ли, приложений обобщенных функций в теории уравнений с частными производными, значительных разделов топологии и т. д. С другой стороны, там, где не требуется введение новых тонких понятий, предполагаемая квалификация читателя позволила авторам в ряде случаев далеко выходить за пределы XIX в. и доводить изложение почти до наших дней. Заметим все же, что многие параграфы книги вряд ли доступны каждому студенту 3-го курса и даже математику, окончившему университет. Но то обстоятельство, что книга выводит читателя за пределы университетского курса, является скорее ее достоинством, чем недостатком.

В предисловии и во введении, написанных редактором книги (т. I, с. 1—17), высказаны некоторые принципы изложения, а также различные соображения о математике вообще и рассматриваемого периода в частности. Специальный параграф отведен сжатой характеристике математического сообщества — университетскому образованию, средствам, формам контактов, а также появлению в XIX в. математических школ в Париже, Берлине, Геттингене и несколько позднее в Петербурге и некоторых итальянских городах. Говоря о XX в., автор отмечает урон, понесенный математикой во Франции в результате первой мировой войны, а через полтора — два десятка лет — Германией, где деятельность в математической науке была почти полностью подавлена нацистским режимом (отчего весьма выиграла математика США, куда иммигрировали многие немецкие ученые). Особенно примечательным явлением этой эпохи автор считает возникновение очень сильных школ в странах, располагавших ранее сравнительно меньшим числом ученых международного класса. «Имея в виду время после конца первой мировой войны, — пишет он, — нужно прежде всего назвать СССР и Польшу, где вдруг появляется целая плеяда первоклассных математиков (в СССР Лузин, Суслин, затем Урысон, П. Александров, Колмогоров, Виноградов, Понтрягин, Петровский, Гельфанд; в Польше Серпинский, Янишевский, Куратовский, Банах, затем Гуревич, Эйленберг, Зигмунд, Шаудер), — их усилиям мы особенно обязаны развитием оснований современной топологии и функционального анализа. В СССР такой порыв не прекращается и продолжает давать весьма многочисленных крупных математиков; что касается Польши, половину математиков которой истребили нацисты, она лишь в последние десятилетия могла восполнить свои кадры и возобновить движение вперед» (т. I, с. 8). Позволим себе два замечания. В списке советских ученых недостает некоторых имен, равноправных названным. И затем в нескольких случаях, хотя бы коротко, указаны общественные условия роста или упадка научных школ, в других же — эти общественные условия оставлены в стороне. Так обстоит дело с государственным возрождением Италии во второй половине прошлого века и Польши после первой мировой войны — эти события стали предпосылкой быстрого последующего подъема науки в этих странах. Ничего не сказано и о тех глубочайших общественных и культурных преобразованиях, которые произошли в бывшей Российской империи в результате Великой Октябрьской социалистической революции и которые обусловили, в частности, расцвет советской математической школы.

Обрисовав затем развитие математических традиций в США и усиление американской школы, начало которой положили Мур, Диксон, Осгуд, затем Дж. Биркгоф, Веблен, Александер, Лефшец (приехавший в детстве из России) и Морсе и которая расцвела особенно после 1933 г. в результате притока ученых из Европы, Ж. Дьедонне отмечает усиление японской математической школы со времени конца второй мировой войны, сдерживаемое отъездом в другие страны ряда японских математиков из-за трудностей, испытываемых университетами этой страны. В настоящее время, говорится во введении, только советская, американская и японская школы достаточно многочисленны, чтобы в них могли быть представлены все области математики. Другие страны должны в большей или меньшей мере ограничиваться разработкой отдельных — и со временем изменяющихся — направлений (т. I, с. 8, 9).

Свое мнение о движущих силах развития математики Ж. Дьедонне высказывал неоднократно. Два тесно связанные между собой утверждения отчетливо выражают его концепцию, которая отразилась на содержании и изложении всего труда. Приведя примеры связей математики с задачами механики, астрономии, физики и т. д., Ж. Дьедонне пишет: «При всем том области математики, находящиеся в постоянном и плодотворном сотрудничестве с приложениями в естествознании, несмотря на свою важность, далеки от того, чтобы составить большинство ветвей современной математики» — и далее: «Глав-

ный двигатель развития математики — *внутреннего* происхождения, это углубленное размышление над природой подлежащих решению задач, причем происхождение последних не оказывает особого влияния (т. I, с. 9—11). В рамках настоящего обзора полемика с этой концепцией, которую мы считаем крайне односторонней и потому ошибочной, невозможна, да и не требуется. Свою точку зрения на движущие силы развития математики авторы настоящего обзора неоднократно выражали в печати (см., например, статью «Математика» в трех последовательных изданиях Большой Советской Энциклопедии и предисловие к книге «Математика XIX века». М., «Наука», 1978).

Обратимся же к конкретному содержанию книги, написанной коллективом из 11 человек, среди которых только один (П. Дюгак) профессиональный историк науки, остальные же по основной специальности — математики. Последующий разбор дается по отдельным главам, авторы которых указаны в скобках. Он неравномерен по объему, что соответствует неравномерности освещения различных вопросов, характерной для рассматриваемого сочинения.

Глава I «Математический анализ в XVIII в.» (Ж. Дьедонне) не претендует на систематическое изложение истории вопроса. Это разбитый на несколько параграфов очерк развития нескольких характерных областей анализа в XVIII в., главным образом с 1725 г.; важные дополнения, относящиеся к функциям комплексного переменного и эллиптическим интегралам, имеются далее, в главах IV и VII. Предварительно в разделе «Строгость и формализм» автор вполне справедливо реабилитирует аналитиков того времени, которым хорошая и ясная интуиция нередко возмещала отсутствие более точного определения основных понятий. Это положение иллюстрируется примерами обращения аналитиков XVIII в. с бесконечными рядами. Сходная точка зрения развита в известной книге Г. Харди о расходящихся рядах. Кроме того, рассмотрены функции больших чисел, формула Эйлера — Маклорена, первые исследования по тригонометрическим рядам, бесконечные непрерывные дроби, важные специальные функции, приемы решения дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), вариационное исчисление, численные методы. На 34 страницах автор сумел мастерски осветить большое число вопросов. Все же здесь многое пропущено. Так обстоит дело, например, с проблемами обоснования анализа в XVIII в.

Отметим одну неточность: неверно, что до Эйлера не было известно соотношение между показательной и тригонометрической функциями в комплексной области (т. I, с. 32); оно было сформулировано в «Гармонии мер» Коутса, изданной посмертно, в 1722 г. Подобных мелких неточностей в книге очень мало, на общем высоком уровне изложения они не отражаются.

Две следующие главы — «Алгебра и геометрия до 1840 г.» и «Алгебра после 1840 г.» (Ж. Герендон и Ж. Дьедонне), общим объемом 73 страницы, написаны в стиле «Очерков по истории математики» Н. Бурбаки и представляют развитие и обобщение соответствующих разделов этой книги. Сильной их стороной является безупречно строгое и прозрачное изложение, свойственное французской математической школе. Стиль книги как бы перенесен авторами из математики в историю науки. Сказанное относится не только к этим двум главам.

Возражения вызывает предложенная авторами периодизация истории алгебры: 1) с 1700 по 1840 г. и 2) после 1840 г., которую авторы мотивируют тем, что до 1840 г. алгебра воспринималась в основном как наука о решении уравнений, тогда как в 40-х годах прошлого века благодаря работам Гамильтона, Кели, Грассмана и Буля в нее вошли новые объекты и идеи, которые и привели к представлению об алгебре как о «науке об операциях над абстрактными объектами» (т. I, с. 93). Но важнейший из новых объектов — группа появилась уже в работах Лагранжа 1770—1771 гг., а затем изучалась Руффини, Гауссом, Абелем, Коши и Галуа. Поэтому если за основу периодизации брать не задачи, а идеи и методы, то следовало бы начать новый период не с 1840, а с 1770 г., так как именно этот год был поворотным в развитии алгебры.

Особенно богатым содержанием являются отделы, посвященные линейной и полилинейной алгебре, где рассматривается введение понятий вектора, матрицы, кватерниона, гиперкомплексного числа и создание новых исчислений. Здесь же дано прекрасное изложение теории инвариантов. Правда, авторы почему-то не привели вторую основную теорему Гильберта, что может создать неправильное представление о вкладе Гильберта в эту теорию.

В целом обе главы содержат много нового интересного материала; они полезны как математикам, так и историкам науки.

Главу IV мы рассмотрим вместе с главой VII, тесно к ней примыкающей. Глава V «Теория чисел» (У. Дж. и Ф. Эллисон) самая большая в книге (почти 170 стр.), охватывает время с 1700 г. до 60-х годов нашего века. Ее предмет составляют алгебраическая и аналитическая теория чисел, геометрия чисел, диофантов анализ и диофантовы приближения. Глава написана с большим педагогическим искусством. Авторы по мере необходимости вводят те понятия и объекты, которые могут помочь понять текст читателю, имеющему математическую подготовку в объеме высшей технической школы. Общие положения и определения иллюстрируются хорошо подобранными числовыми примерами. Излагая результаты математиков XVIII—начала XIX в., авторы стараются пользоваться их языком, не применяя более поздней математической терминологии.

Однако глава V страдает и значительными недостатками. В ней имеются лакуны, неточности, необоснованные оценки. Авторы освещают в основном открытия французской математической школы, игнорируя не менее сильные работы немецких и русских математиков, что приводит к искажению исторической перспективы.

Так, авторы явно недооценивают роль Гаусса: его первое доказательство квадратичного закона взаимности они квалифицируют как «по меньшей мере нечитательное» (т. I, с. 176); его основные результаты, относящиеся к уравнению деления круга, приписывают Вандермонду; называют доказательства Гаусса, относящиеся к теореме квадратичных форм, «ужасными» (т. I, с. 222), поскольку Гильберт 100 лет спустя изложил их, пользуясь языком квадратичных полей, в 10 раз короче. Между тем *первое* доказательство квадратичного закона взаимности имеет особенно глубокий смысл: именно оно позволило недавно Дж. Тэйту решить одну из самых животрепещущих задач гомологической алгебры—вычисление группы  $K_2(Q)$ . Что касается теории уравнения деления круга, то правильная историческая оценка исследований Гаусса и Вандермонда содержится в главе II (см. т. I, с. 73, 74). Последний упрек, основанный на сопоставлении длин доказательств Гаусса и Гильберта, совершенно антиисторичен (сколь же «ужасны», с современной точки зрения, были доказательства, например, Архимеда!).

Заметим еще, что критерий Эйлера для определения квадратичных вычетов авторы приписывают Лежандру (т. I, с. 170).

В главе имеется большой пробел: из всей знаменитой русской школы теории чисел XIX в. авторы рассказывают только о П. Л. Чебышеве. Имена Е. И. Золотарева (о котором, кстати, говорится во введении, с. 7), А. А. Маркова и Г. Ф. Вороного вообще не упоминаются. Такой пробел при современном уровне историко-математической литературы совершенно недопустим.

Хотя авторы несколько лучше осведомлены о современных советских математиках, однако и здесь сведения их весьма отрывочны. Так, например, не указано, что 9-я проблема Гильберта, о которой авторы много говорят, была решена в 1950 г. советским математиком И. Р. Шафаревичем. В главе имеются и другие неточности и ошибки.

В целом глава по теории чисел, несмотря на свою односторонность, весьма интересна и может служить ценным пособием для изучения теории чисел прошлого века.

Глава VI «Основания анализа», последняя в I томе (П. Дюгак), не выходит за границы XIX в. Имея исторические сведения, вполне достаточные для университетского образования, эта глава с большой пользой может быть прочитана не только студентом-математиком, но и студентом высшей технической школы, прошедшим первые два курса.

При сравнительно небольшом (58 стр.) размере автор сумел рассмотреть практически все основные вопросы истории (ограничиваясь функциями одного переменного) от Гаусса, Больцано и Коши до Г. Кантора и Пеано. При изложении истории теории множеств подчеркивается важность идей Дедекинда, причем отмечено различие проблем, от которых отправлялись Дедекинд (алгебра, теория чисел) и Г. Кантор (тригонометрические ряды). Этот вопрос был ранее подробно изучен Ф. А. Медведевым, ссылка на которого была бы на с. 373 вполне уместной (так же, как упоминание его книги, вышедшей в 1965 г., в библиографии, где она, к сожалению, отсутствует).

Последний раздел главы VI—о теории целого числа—включен в нее искусственно. Если учесть структуру главы XIII, о которой говорится далее, этому разделу следовало бы отвести место в ней (т. II, с. 332, 333).

Теперь мы возвратимся к главе IV «Аналитические функции» (Ж. Л. Верлей). После очерка предыстории теории аналитических функций в XVIII в. автор бегло характеризует вклад Коши, Римана и Вейерштрасса. В общем он не выходит за пределы тех исторических сведений, которые — иногда с большими деталями — можно найти в известных курсах теории аналитических функций, например в книге А. Дингаса (A. Dinghas. *Vorlesungen über Functionentheorie*. Springer Verlag. 1961). Изложение доведено до 70-х годов прошлого века. Внесем только одно уточнение, относящееся к этой части главы. Говоря о первом издании «Теории эллиптических функций» Брио и Буке (*Théorie des fonctions doublement périodiques...*, 1859), автор утверждает, что там находится «некорректная формулировка того, что станет теоремой Пикара» (т. I, с. 149). Это, конечно, недоразумение: речь должна идти лишь о «некорректной формулировке» теоремы Вейерштрасса. Дело в том, что Брио и Буке, как и их современники, не различают понятий «значение функции в точке» и «предельное ее значение в точке» (особой). Но пикаровская постановка проблемы, т. е. вопрос о распределении значений функции, становится возможной только тогда, когда это различие полностью осознано.

На теореме Миттаг — Леффлера (1877) о разложении мероморфной функции в ряд по ее главным частям историческая последовательность изложения обрывается. Далее до конца главы автор характеризует предмет теории аналитических функций многих комплексных переменных. Не упоминая совсем классический труд Осгуда (*Lehrbuch der Funktionentheorie*, B. II, I. 1924), в котором был подведен итог полувекового периода развития теории, отмеченного именами Вейерштрасса, Пуанкаре, Кузена, Гартогса, Леви и самого Осгуда, автор сразу называет в качестве первой монографию Г. Бенке — П. Тулена (H. Benke — P. Thullen. *Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen*. Berlin, 1934). Далее формулируются некоторые характерные для этой теории проблемы, например об области голоморфности, проблемы Кузена, о конформном отображении, и приводятся важнейшие относящиеся к ним результаты, полученные в основном до 50-х годов XX в.

Однако в целом рецензируемое сочинение богаче материалами по развитию идей и методов теории аналитических функций, чем можно судить по небольшой (33 стр.) главе IV. Такие материалы содержатся в обширной главе VII, занимающей 113 стр. — «Эллиптические функции и абелевы интегралы» (К. Узель). Эта глава более чем втрое превосходит по объему главу IV. Автору ее удалось соединить всесторонний охват области, нелегко достижимый в отношении предмета, имеющего более чем 200-летнюю литературу. С нашей точки зрения, раскрытие реального процесса формирования идей и методов теории аналитических функций могло бы быть произведено с большей рельефностью, если бы в самом его построении не был заложен известный отрыв общей теории от тех областей анализа, где использовались и совершенствовались уже выработанные методы теории функций и зарождались новые области, среди которых в XIX в. первое место занимали теория эллиптических функций и абелевых интегралов. Внешним проявлением этих связей, признаваемых современниками, служит тот факт, что в университетских курсах и монографиях второй половины прошлого века изложение теории эллиптических функций или абелевых интегралов почти неизменно объединялось с основами общей теории аналитических функций. Впрочем, наш упрек, или, пожалуй, сожаление, нельзя адресовать автору главы VII, который в ее пределах сделал все, что мог, для выявления направляющих идей.

Глава VII разделяется на две части: эллиптические функции и абелевы интегралы. В кратком введении обозначены следующие исторические вехи: прочтение Эйлером мемуаров Фаньяно в 1751 г. и последующее открытие теоремы сложения для эллиптических интегралов, появление в 1827 г. первых публикаций Абеля и Якоби, мемуар Римана 1857 г. и работы Пуанкаре о фуксовых функциях. Но материалы главы располагаются независимо от этих рубежей по отдельным темам, имеющим самостоятельное значение. В первой части изложена история эллиптических интегралов, эллиптических функций и тета-функций одного переменного. Сюда же включен и очерк истории модулярных и автоморфных функций. Рассмотрены приложения к решению уравнений (модулярное уравнение), к изучению алгебраических кривых рода I, к механике, к дифференциальной геометрии и теории чисел. Во второй части рассматриваются теорема Абеля, проблема обращения Якоби и результаты Розенхайна и Гёпеля, соответствующая проблема деления, работы Вейерштрасса о гиперэллиптических интегралах, Римана и Вейерштрасса

об абелевых интегралах. Главу завершают параграфы о применении римановой теории абелевых интегралов к алгебраическим кривым (от Клебша и Гордана до Пуанкаре) и — совсем коротко — о теории абелевых функций и многообразий (до середины XX в.).

Глава VIII «Функциональный анализ» (Ж. Дьедонне) содержит весьма широкий очерк развития тех дисциплин и идей анализа, теории функций, алгебры и т. д., синтез которых привел к оформлению на рубеже XIX и XX вв. функционального анализа. Автор начинает с суммарной характеристики истоков функционального анализа, затем последовательно переходит от локальных теорем существования дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, от Коши до Ковалевской (с некоторыми дополнениями Леви, 1956), к системам Пфаффа, аналитической теории линейных дифференциальных уравнений от Римана и Фукса до Пуанкаре и Биркгофа, к нелинейным уравнениям в комплексной области до Пенлеве и Гамбье. Далее речь идет о качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре и теории устойчивости Ляпунова. Замечания, сделанные об этой последней, заслуживали бы, на наш взгляд, некоторого развития с учетом успехов советской школы теории устойчивости. Особый параграф посвящен гамильтоновым системам. Здесь вновь идет речь об исследованиях Пуанкаре, теперь по задаче трех тел, переплетавшихся с работами Хилла и продолженных Биркгофом. Этот параграф заканчивается описанием нового метода изучения гамильтоновых систем, предложенного А. Н. Колмогоровым, открытия которого развили далее В. И. Арнольд и Дж. Мозер. Следует пожалеть, что при этом не освещено происхождение работ последних трех авторов из давних усилий астрономов преодолеть трудности, возникающие в связи с так называемыми малыми знаменателями в асимптотических разложениях небесной механики.

Вслед за тем говорится об огромном комплексе работ, посвященных решению трех основных типов линейных краевых задач математической физики, работах Фурье по теории теплоты, задаче Штурма—Лиувилля, методах Пуанкаре, К. Неймана и Шварца. Автор особо упоминает, что интегральное неравенство, носящее имя Шварца, ранее опубликовал Буняковский (т. II, с. 148). Все же некоторые важные работы русских математиков остались вне поля зрения автора. Мы имеем в виду принципиальные уточнения, внесенные Ляпуновым в классические методы решения краевых задач, и «теорию замкнутости» Стеклова, результаты которого по проблеме разложения какой-либо функции в ряд по собственным функциям линейного оператора, определяемого данным уравнением, были наиболее общими, пока не достигла высокой степени теория интегральных уравнений (которой сам Стеклов не пользовался). Затем прослежено зарождение в конце XIX в. функционального анализа, которое подготовляли работы Вольтерра по вариационному исчислению, его же и Фредгольма по интегральным уравнениям, а вслед за тем исследования Гильберта, Э. Шмидта и Фреше, знаменовавшие переход от «алгебры бесконечного» к «геометрии бесконечного». Заглавия последующих параграфов — «Метрические пространства», «Нормированные пространства и спектральная теория» — говорят сами за себя. В заключение намечены несколько направлений, получивших развитие в последние 50 лет, например теория обобщенных функций, начало которой положил в 1937 г. С. Л. Соболев, и теория нормированных алгебр, которую развивает с 1941 г. И. М. Гельфанд.

В главе VIII опущены некоторые вопросы, например почти полностью история вариационного исчисления в XIX в., и отсутствуют имена многих ученых, активно участвовавших в создании функционального анализа. Интерес этой главы, четкость изложения которой соперничает с его сжатостью (в ней всего 63 стр.), побудит не одного читателя расширить свои знания путем обращения к указанной в ее конце литературе.

Глава IX «Дифференциальная геометрия» (Полетта Либерман) кратко, на 24 страницах рисует историю этой дисциплины от внутренней геометрии поверхностей Гаусса и разработки теории наложимости поверхностей и исследования поверхностей постоянной кривизны (что дает повод остановиться на интерпретации гиперболической геометрии, об открытии которой говорится далее, в главе XIII), создания Риманом  $n$ -мерной геометрии и Риччи, а затем Леви — Чивита, тензорного исчисления до теории внешних дифференциальных форм Э. Картана. К сожалению, отсутствуют сведения о работах К. М. Петерсона по теории изгибания поверхностей, положивших начало большой московской геометрической школе.

Несколько особое место в книге занимает глава X «Топология» (Г. Хирш)<sup>3</sup>. После сжатого обзора развития топологии от Эйлера до конца XIX в. автор приводит ряд интересных фактов и соображений, относящихся к развитию комбинаторной и алгебраической топологии преимущественно в текущем столетии. Наиболее интересны параграфы, посвященные работам Хопфа и некоторым еще более новым исследованиям. Вся теоретико-множественная топология практически отсутствует.

Из понятия общей топологии читателю сообщается одна лишь паракомпактность, но и то в полном отрыве от больших проблем общей топологии, прежде всего от проблемы метризации, с которыми и связан в первую очередь интерес, представляемый паракомпактностью. Сколько-нибудь ценные результаты, связанные с паракомпактностью, такие, как, действительно, глубокие результаты А. Стоуна, Е. Майкла или В. И. Пономарева, не упоминаются совсем, как и вся топология континуумов. Из статьи нельзя узнать не только, что такое псевдодуга и что она топологически единственна (теорема Бинга), но даже что такое локально-связные континуумы и почему они называются континуумами Жордана, а также Пеано.

Вся геометрическая топология также полностью отсутствует. Нет ни ретрактов, ни шейпов. Имя К. Борсука не упоминается, как и ни одно имя польского математика. Уже это достаточно красноречиво свидетельствует о неполноте описания даже в пределах алгебраической топологии, которую сам автор считает основным предметом данной главы.

Глава XI «Интегрирование и мера» (Ж. Дьедонне), самая маленькая в книге (11 стр.), посвящена интегралу Лебега, интегралу Стильтьеса и теории меры. Этот текст служит только введением к следующей главе.

Глава XII—«Исчисление вероятностей» (М. Лоев). К сожалению, истории теории вероятностей в XVII и XIX столетиях здесь отведено лишь 6 страниц, неизбежным образом в силу краткости малосодержательных. Правильно охарактеризован «классический период» в становлении теории вероятностей от Бернулли до Чебышева. Естественным завершением классического периода являются работы, относящиеся уже к началу XX в. В этом контексте заслуживал бы специального упоминания С. Н. Бернштейн.

Дальнейшие 28 страниц посвящены новому периоду развития теории вероятностей, характеризующемуся широким обращением к теории меры и доминирующим положением в качестве конкретных объектов изучения случайных процессов и случайных полей. Этот очерк современной проблематики теории вероятностей написан компетентно и интересно. Его можно рекомендовать для чтения любому молодому математику, желающему разобраться в проблематике современной теории вероятностей. Отметим, впрочем, что у автора главы, авторитетного пробабилиста, доминирует интерес к марковским процессам, тематика спектральной теории стационарных процессов едва намечена, а о проблематике, связанной с случайными полями, узнать ничего нельзя, не говоря уже о ее связях с современной статистической физикой.

Заметим еще, что в XIX в. математическая статистика была просто собранием применений теории вероятностей к отдельным частным задачам. Но в XX в. она развилась в большую науку со своей глубокой математической проблематикой, умолчание о которой досадно.

Глава XIII «Аксиоматика и логика» (М. Гийом) состоит из I краткого введения и четырех более обширных разделов: II. Становление аксиоматического метода в XIX в.; III. Прогресс формализации и понимание ее роли в конце XIX в.; IV. Математическая логика в XIX в.; V. Большие идеи XX в.

Своеобразно построенная и по объему большая (116 стр.) глава читается с интересом, хотя и здесь стремление поскорее расправиться с XVIII—XIX вв. и перейти к XX в. несколько досадно. Раздел II посвящен в основном аксиоматике геометрии, что исторически оправдано; он начинается краткими сведениями о теории параллельных и открытии неевклидовых геометрий<sup>4</sup>. Вообще помещение перед разделами, посвященными в собственном смысле слова логике, разделов II и III создает широкую перспективу и может считаться удавшимся. Разделы IV и V содержат некоторые краткие указания об истоках математической логики до XX в.

<sup>3</sup> Этот раздел обзора написан акад. П. С. Александровым.

<sup>4</sup> Следует все же заметить, что неевклидова геометрия имеет свою конкретную проблематику, и жаль, что для ее связной истории не нашлось места во всей книге.

Подведем некоторые итоги. «Краткая история математики. 1700—1900» посвящена в основном развитию главных направлений математики XIX и во многих случаях XX вв., и уже в этом ее неоспоримая ценность. До ее выхода в свет существовала только одна книга, специально посвященная XIX в., — первый том замечательных «Лекций о развитии математики в XIX столетии» Ф. Клейна. Однако «Лекции» Клейна, составленные в 1914—1919 гг. и изданные в 1926 г. Р. Курантом и О. Нейгебауером, выражали точку зрения математика конца XIX в., а в то время многие тенденции в развитии алгебры, геометрии и теории функций, ныне господствующие, были далеко не ясны. Поэтому вновь пересмотреть развитие математики XIX в. (и частью XX) с уровня, достигнутого в 70-е годы нынешнего столетия, стало настоятельной необходимостью. Авторы рассматриваемой книги с большим искусством выделяют проблемы, идеи и методы, развитие которых привело к созданию современной математики. Однако они не стремятся проникнуть в мир мыслей математиков XIX в. и выяснить, что именно привлекало их при выборе тех или иных задач или методов исследования. Изучаемый ими процесс рассматривается здесь почти исключительно с позиций современной математики, притом с позиций коллектива Н. Бурбаки. Это придает всему труду некоторую субъективность и односторонность, проявляющуюся в отборе, распределении и освещении исторических фактов. Конечно, расхождения в трактовке многих вопросов неизбежны в исторических исследованиях. Мы не претендуем на владение объективной исторической истиной, но, как мы уже неоднократно отмечали, наше понимание процесса развития математики и наши оценки отдельных его сторон в ряде пунктов не совпадают с преобладающими в рассматриваемом труде.

Общая структура «Краткой истории математики. 1700—1900», как говорилось, была предопределена принципами, изложенными в предисловии и введении Ж. Дьедонне. Главное место отведено теориям, наименее связанным с приложениями.

Читателю не следует искать в книге историю математики в ее связях с естествознанием и другими сторонами человеческой активности; отдельные частные упоминания таких связей не меняют общей картины. В этом смысле высказанное в предисловии намерение авторов рассмотреть основные понятия современной математики не только в аспекте их внутренней эволюции, но и в связях с приложениями математики в естественных науках в книге не реализовано. За исключением немногих слов, сказанных во введении, в последующем тексте нет места ни вопросам преподавания, ни организации исследований, ни истории научных школ. И хотя имена многих ученых упоминаются, но они служат скорее для обозначения теорий, понятий и теорем. Люди, взаимоотношения между ними, конкретные условия их творчества в книге отсутствуют. Мы не узнаем, с какими общими воззрениями ученых были связаны их математические идеи, какую инерцию приходилось им иногда преодолевать, сколь острая борьба нередко велась между различными направлениями математической мысли. О таком изгнании человека можно только пожалеть, и в этом отношении книга невыгодно отличается от «Лекций» Клейна. Правда, в конце II тома, на с. 431—459, приложен краткий справочник о примерно 250 из упоминаемых в книге ученых (только покойных) с отсылкой, там, где возможно, к более подробным биографическим словарям. Крайне досадным является отсутствие именного указателя. Зато предметный указатель вместе с частыми перекрестными ссылками и развернутыми оглавлениями в начале каждой главы помогает ориентироваться в содержании книги, а приложенный в конце каждой главы список литературы позволит читателю углубить свои знания.

Единого целого рассматриваемая книга все же по существу не представляет. Она распадается на очерки развития отдельных математических наук, взаимно дополняющие друг друга, иногда перекрывающиеся, причем случается, что одним и тем же вопросам дается несколько различная историко-математическая трактовка. Нередко история развития тех или иных частей математики XVIII—XIX вв. заменяется панорамой XX столетия. Поскольку история математики в целом для последних полутора столетий еще отсутствует, такое разделение на очерки является, пожалуй, неизбежным. Но это уже существенное приближение к составлению истории математики в целом.

«Краткая история математики. 1700—1900» является значительным событием в историко-математической и математической литературе. Ее прочитают с большой пользой не только студенты, но и ученые различного возраста, и можно надеяться, что она многих побудит к исследованиям по истории математики новейшего времени.