ностные ее характеристики (Л. Мэмфорд, Ж. Элюль, М. Хайдеггер, Г. Маркузе), марксизм связывает развитие науки со всем развитием общественного производства, с социально-экономическими условиями этого развития. Признание зависимости потенций науки от социально-экономической структуры общества подводит к выводу о том, что критерии общественной и нравственной значимости науки не следует искать в самой науке, они определяются социальными условиями ее функционирования. Следовательно, чтобы исключить возможность «обесчеловечивания» естествознанием «человеческих отношений», необходимо сделать человечными сами условия его развития. Коммунистическое общество и представляет собой тот единственный «оптимальный вариант» социальных условий, при которых не только исчезнет противопоставление науки и нравственности, но и восторжествует идеал гуманистической науки, в который верили прогрессивно мыслящие естествоиспытатели второй половины XIX — начала XX вв.

THE PROBLEM OF THE CORRESPONDENCE BETWEEN SCIENCE AND ETHICS IN THE VIEWS OF THE NATURAL SCIENTISTS OF THE SECOND HALF OF THE XIXth — THE BEGINNING OF THE XXth CENT.

K. G. ZALIEV

Problems tied up with the social role of science and therefore with the socio-ethical meaning of the professional activities of scientists came to be of great importance for the world-outlook late in the XIXth century and in the beginning of the XXth century. In this period, the natural scientists' frame of mind began developing along new lines. The new trends were connected with the entering of capitalism into its new stage, that of the monopolistic capitalism.

Научные сообщения

ПИСЬМО Г. А. ШВАРЦА С. В. КОВАЛЕВСКОЙ

Академик П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

От редакции.

Вниманию читателей предлагается публикация одного из писем к выдающемуся русскому математику Софье Васильевне Ковалевской (1850—1891) известного немецкого математика Германа Амандуса Шварца (1843—1921), подготовленная акад. П. Я. Полубариновой-Кочиной [1].

Математическое дарование С. В. Ковалевской развивалось под определяющим влиянием ее учителя, великого немецкого математика К. Вейерштрасса (1815—1897), много сделавшего для прогресса математического анализа в самых различных его направлениях и сыгравшего важную роль в реформе его основ. «В основном это заслуга научной деятельности Вейерштрасса, что теперь в анализе существует полное согласие и уверенность относительно таких способов рассуждения, которые основаны на понятии иррационального числа и предела вообще,— писал Д. Гильберт [2],— и ему мы обязаны тем, что существует единодушие относительно всех результатов, даже в наиболее сложных вопросах, касающихся теории дифференциальных и интегральных уравнений,— несмотря на самые дерзновенные и разнообразные сочетания при применении наложения, комбинации и перестановки пределов».

Выдвигаемые Вейерштрассом повышенные требования к уровню строгости рассуждений в математическом анализе служили причиной его исключительного внимания к доказательству существования объектов математического анализа.

Его известная критика в связи с так называемым «принципом Дирихле» (1869), выявившая существенный пробел в предложенном Дирихле доказательстве существования решения краевой задачи для уравнения Лапласа, известной впоследствии под названием задачи Дирихле, и сводившая в глазах современников к нулю ценность этого принципа, породила целую литературу [3].

Исследованием вопроса о существовании решения задачи Дирихле для областей достаточно сложной конфигурации занимался и один из талантливейших учеников К. Вейерштрасса — Г. Шварц, создатель знаменитого «альтернирующего метода», носящего ныне его имя.

Задачу доказательства важной теоремы существования — существование решения задачи Коши для нормальной системы уравнений с частными производными — К. Вейерштрасс поставил перед своей молодой ученицей С. В. Ковалевской. Развивая методы его теории функций, она блестяще ее решила и получила искомое доказательство, более того, построила поразивший самого Вейерштрасса пример, показывающий, что фигурирующее в условии теоремы требование «нормальности» является необходимым. Этот результат, опубликованный в 1875 г. и известный сегодня как теорема Ковалевской [4], является одним из важнейших предложений общей теории дифференциальных

---

[1] О жизненном пути и творчестве С. В. Ковалевской имеется обширная литература. См., например: *Полубаринова-Кочина П. Я.* Жизнь и научная деятельность С. В. Ковалевской.— В сб.: Памяти Ковалевской. М., Изд-во АН СССР, 1951; *Юшкевич А. П.* История математики в России. М., «Наука», 1968, с. 438—445.

[2] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.— Л., Гостехиздат, 1948. Добавление VIII, О бесконечном, с. 338, 339.

[3] См.: *Петрова С. С.* О принципе Дирихле.— В сб.: История и методология естественных наук. М., МГУ, 1966, с. 200—218; ее же. *Петрова С. С.* Принцип Дирихле в работах Римана.— В сб.: Историко-мат. иссл., вып. XVI, М., «Наука», 1965, с. 295—310.

[4] Его изложение можно найти, например, в книге: *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.

уравнений с частными производными и изучается всеми студентами, специализирующимися в области математики.

Хотя Г. Шварц и С. В. Ковалевская относятся к разным поколениям учеников Вейерштрасса, в своем математическом творчестве они имеют много общего, идущего от их учителя. Их роднит, в частности, интерес к теоремам существования граничных задач теории дифференциальных уравнений (впоследствии вошедшим «в плоть и кровь» теории дифференциальных уравнений), широкое использование и свободное владение методами теории функций комплексного переменного.

Первая встреча двух математиков состоялась летом 1873 г. С. В. Ковалевская в это время была в состоянии творческого подъема, она работала над вопросами, составившими содержание ее первых трех работ, за которые она была удостоена докторской степени (в частности, над доказательством теоремы, носящей ее имя). Публикуемое письмо Шварца относится к концу 1884 г., которому предшествовал мрачный период жизни С. В. Ковалевской, закончившийся (весной 1883 г.) трагической гибелью ее супруга, известного русского палеонтолога В. О. Ковалевского. Возвращаясь вновь к занятиям математикой, которые она за два года до этого почти совершенно оставила, она, естественно, оказалась перед выбором — какими задачами ей теперь заняться. Вероятно, желая увлечь своей тематикой, Г. Шварц и предложил ей ряд вопросов из развиваемой им в эти годы теории минимальных поверхностей.

Как известно, С. В. Ковалевская избрала другое направление своих исследований — теорию вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. На этом пути она добилась выдающихся результатов, отмеченных премиями Парижской (1888) и Шведской (1889) академий наук.

Теория минимальных поверхностей, о которой идет речь в письме Г. Шварца, начинается с работы Ж. Лагранжа, опубликованной во 2-м томе «Философско-математических сборников Королевского туринского общества» за 1760—1761 гг. Лагранж записывает дифференциальное уравнение минимальной поверхности, являющееся (как сказали бы мы сейчас), лагранжевым уравнением соответствующей вариационной задачи. Впоследствии Г. Монж и А. Лежандр получили выражение общего решения дифференциального уравнения минимальных поверхностей, включающее мнимые числа. Смысл такого решения был понят только в работах К. Вейерштрасса, рассмотревшего теорию минимальных поверхностей в связи с построенной им теорией функций комплексного переменного.

Очутившись на перекрестке путей развития таких важнейших математических дисциплин, как дифференциальная геометрия, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление и теория функций комплексного переменного, теория минимальных поверхностей попала тем самым в сферу особого внимания математиков последней четверти XIX — начала XX в. и, следует сказать, не удалилась на периферию области исследований вплоть до сегодняшнего дня. Этому в немалой степени способствует ее практическая значимость: достаточно сказать, что минимальные поверхности можно практически реализовать посредством мыльных пленок (с их изучением связаны известные работы бельгийского физика Ж. А. Ф. Плато, выполненные в 60—70-х гг. прошлого века, в честь которого задачу нахождения решения дифференциального уравнения минимальных поверхностей, проходящих через заданный замкнутый контур, часто называют «задачей Плато»).

Приступив вслед за своим учителем к изучению теории минимальных поверхностей, Шварц внес в исследование этой области анализа дух «вейерштрассовской строгости» [5].

Исследования Г. Шварца по теории минимальных поверхностей, один из эпизодов в изучении которых отражен в публикуемом письме, принадлежат к числу наиболее крупных его достижений.

Кто знает, быть может, Софья Васильевна Ковалевская, проживи она дольше (она скончалась на 42-м году жизни), вновь вернулась бы к проблемам теории дифференциальных уравнений с частными производными (с которой связано наиболее крупное ее достижение), в том числе и к проблемам, волновавшим Г. Шварца, тем более что

---

[5] О значимости его работ по теории минимальных поверхностей для теории дифференциальных уравнений с частными производными см. *Сологуб В. С.* Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII—XIX столетиях. Киев, «Наукова думка», 1975.

исследования регулярных вариационных задач и тесно связанных с ними эллиптических дифференциальных уравнений оказались в дальнейшем одним из магистральных направлений в развитии отечественной математики, отмеченным выдающимися достижениями В. А. Стеклова, А. М. Ляпунова, С. Н. Бернштейна, Н. М. Гюнтера, И. Г. Петровского и др.

* *
*

Софья Васильевна Ковалевская познакомилась с Германом Амандусом Шварцем (1843—1921) в 1873 г. В тот период (1870—1874) она усиленно занималась у Вейерштрасса, вела очень замкнутый образ жизни и не общалась ни с кем из математиков, кроме своего учителя. Летом 1873 г. она решила навестить свою сестру Анну Васильевну Жаклар, бывшую деятельницу Парижской Коммуны, после разгрома Коммуны бежавшую в Швейцарию вместе со своим мужем, коммунаром Виктором Жакларом. Анна Васильевна жила в Цюрихе, и там Софья Васильевна и познакомилась с профессором местного университета Г. А. Шварцем, который работал в Цюрихе с 1869 г. (в 1885 г. он переехал в Геттинген, а затем, в 1892 г.,— в Берлин).

Цюрихский период жизни был для Шварца очень плодотворным. Ученик Вейерштрасса, он, подобно своему учителю, много занимался вариационным исчислением. Первый том его собрания сочинений целиком посвящен одному из выпусков вопросов этого раздела анализа теории минимальных поверхностей [6].

До Шварца уже дошли слухи о талантливом молодом математике Соне Ковалевской, и он встретил ее очень приветливо, пригласил на свою лекцию и представил своим студентам. У Ковалевской и Шварца нашлось много общих математических интересов, и у Софьи Васильевны даже появилась мысль остаться в Цюрихе для работы с Шварцем. Е. Ф. Литвинова (1845—1923), обучавшаяся математике в Цюрихском университете, передает интересный разговор с С. В. Ковалевской. На вопрос, неужели Софья Васильевна ставит Шварца выше Вейерштрасса, та ответила, что нет, но что ее привлекает прелесть новизны. Однако, понимая «свой долг или, точнее, свое предназначение», она вернется к Вейерштрассу, чтобы закончить начатые работы. На вопрос Литвиновой, в чем Ковалевская видит свое предназначение, она ответила: «Я чувствую, что предназначена служить истине-науке и прокладывать новый путь женщинам, потому что это значит — служить справедливости» [7].

Во второй период ее научной жизни, после 1879 г., круг иностранных математиков, с которыми общалась С. В. Ковалевская, расширился. Бывая в Берлине, она встречалась со многими немецкими математиками, в том числе и с приезжавшим в Берлин Г. А. Шварцем. В разговорах с другими математиками Шварц с восторгом отзывался о русской ученой.

В архиве Г. Миттаг-Леффлера, хранящемся в Институте Миттаг-Леффлера в Дьюрсхольме, в группе писем Ковалевской от иностранных математиков [8] имеется письмо от Г. А. Шварца, в котором он делится с Софьей Васильевной своими соображениями по поводу вспомогательного дифференциального уравнения, возникшего при изучении минимальных поверхностей.

Исходная задача, которой занимается Шварц, такова: среди поверхностей, ограниченных данной кривой, найти такую, площадь которой

---

[6] *Schwarz H. A.* Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd I. Berlin, 1890.
[7] *Ель Е.* [*Е. Ф. Литвинова*]. Из времени моего студенчества. Знакомство с С. В. Ковалевской.— «Женское дело», 1899, № 4, с. 34.
[8] Фотокопии этих писем имеются в Архиве АН СССР, ф. 603, оп. 1, ед. хр. 50.

наименьшая. Речь идет об отыскании минимума функционала

$$s = \iint \sqrt{1 + p^2 q^2}\, dx\, dy,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности.

Уравнение Эйлера для этой вариационной задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{1 + p^2 + q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) = 0. \qquad (*)$$

Оно выражает геометрическое свойство искомой поверхности: в каждой точке поверхности средняя кривизна должна равняться нулю, или, иначе, радиусы кривизны главных нормальных сечений равны по величине и противоположно направлены. Поверхности, обладающие таким геометрическим свойством, называются **минимальными поверхностями,** хотя они могут и не давать минимума площади поверхности. Примером является минимальная поверхность вращения.

Пусть имеем поверхность вращения вокруг оси x, образованную линией, проходящей через две заданные точки плоскости (x, y). Рассматривается некоторый угол, образованный прямыми, проходящими через начало координат. Различают три случая: данные точки находятся на указанных прямых, тогда единственным решением будет проходящая через них цепная линия (поверхность называется катеноидом [9]); эти точки лежат внутри угла, тогда через них проходят две цепных линии, но решение задачи дает нижняя; точки расположены вне угла, тогда решением задачи о наименьшей площади поверхности является двусвязная область, состоящая из двух кругов, плоскости которых перпендикулярны оси x, и ограниченных окружностями, образованными вращением заданных точек около оси x.

Для нелинейного уравнения с частными производными второго порядка (*) найден ряд частных решений. Вейерштрасс предложил решение в параметрической форме, зависящее от произвольной аналитической функции F(s) комплексного переменного $s = \xi + i\eta$:

$$dx = \mathrm{Re}\,[(1 - s^2) F(s)\, ds], \quad dy = \mathrm{Re}\,[i(1 + s^2) F(s)\, ds], \quad dz = \mathrm{Re}\,[2sF(s)\, ds]$$

(Re — действительная часть).

Для каждой заданной функции F(s) получается некоторая минимальная поверхность. Однако вопрос о том, осуществляется ли при этом минимум площади какого-нибудь куска этой поверхности, оставался открытым.

Шварц рассматривает часть M минимальной поверхности, ограниченную контуром L, и затем исследует вариацию этой поверхности, принимая для сравнения бесконечно близкую минимальную поверхность M', ограниченную контуром L', близким к L. При этом каждая точка поверхности M считается сдвинутой по нормали на отрезок $\varepsilon w(s, s_1)$, где $w(s, s_1)$ — непрерывная дифференцируемая функция двух аргументов $s = \xi + i\eta$, $s_1 = \xi - i\eta$.

Если величину площади основной поверхности M, ограниченной контуром L, обозначить через s, а близкой к ней поверхности — через s', то, разлагая выражение последней в ряд по степеням ε, найдем

$$s' = I_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 I_2 + \varepsilon^3 I_3 + 0(\varepsilon^4),$$

[9] Это поверхность мыльной пленки, натянутой на дуги окружностей.

где

$$I_0 = \iint\limits_T (1+ss_1)^2 F(s) F_1(s_1) d\xi\, d\eta,$$

$$I_2 = \iint\limits_T \left(4 \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s_1} - \frac{8 w^2}{(1+ss_1)}\right) d\xi\, d\eta,$$

T — область интегрирования для поверхности М. I_2 можно представить в действительной форме:

$$I_2 = \iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{8 w^2}{(1+\xi^2+\eta^2)}\right] d\xi\, d\eta. \qquad (**)$$

От свойств этого интеграла зависит ответ на основной вопрос: если $I_2 > 0$, то площадь s поверхности М, действительно, минимальна, если $I_2 < 0$, то решения не существует, если $I_2 = 0$, то требуется исследование следующего члена ряда для s, т. е. интеграла I_3 (который уже зависит от F(s) в противоположность I_2).

Для исследования знака I_2 привлекается уравнение Эйлера, соответствующее функционалу I_2:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{8\psi}{(1+\xi^2+\eta^2)} = 0. \qquad \binom{**}{*}$$

Если из него выразить $\frac{8\psi}{(1+\xi^2+\eta^2)}$ через ψ и ее вторые производные, то подынтегральное выражение в (**) можно переписать так:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2 - \frac{8 w^2}{(1+\xi^2+\eta^2)} = \left(\frac{\partial w}{\partial\xi} - \frac{w}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2 + $$
$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial\eta} - \frac{w}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{w^2}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{w}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right).$$

Если положить $w = c\psi$, где c — постоянная, и принять во внимание, что интеграл от двух последних членов приводится к криволинейному, то получим для I_2

$$I_2 = \int\limits_L \frac{w^2}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial n} dl = -c\int\limits_L \psi\frac{\partial\psi}{\partial n} dl,$$

где n — внутренняя нормаль.

Шварц в письме к Ковалевской и в работе [10] рассматривает более общее уравнение, чем (* . *):

$$\Delta u + pu = 0$$

и изучает его свойства. В конце статьи он возвращается к уравнению (* . *) и дает ряд примеров.

Приведем письмо Г. А. Шварца.

Геттинген, Веендершоссе 17 А
25 декабря 1884

Глубокоуважаемая г-жа Ковалевская,

с тех пор как я имел счастье провести с Вами несколько часов, прошло уже много месяцев. К сожалению, у меня не было возможности посетить Вас во время Вашего пребывания в Берлине и пожать Вам

---

[10] Расширенное содержание письма Г. А. Шварца к С. В. Ковалевской см.: *Schwarz H. A.* Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung — Zeitschrift zum siebzigsten Geburtstage des Herrn Karl Weierstrass. «Acta societatis scientiarum Fennicae», t. XV, p. 315—362. См. также книгу, указанную в сноске 1: Полубаринова-Кочина П. Я., с. 223—269.

руку в знак моего искреннего участия в постигшей Вас утрате[11]. Но как Вы все же счастливы, что стоите на собственных ногах и что благодаря Вашим научным знаниям завоевали себе такое положение, которому могут позавидовать многие мужчины.

Наш общий учитель написал мне, что Вы останетесь в Берлине до середины января, я очень хотел бы снова увидеться с Вами и очень надеюсь, что смогу это осуществить, приехав в начале будущего года на два-три дня в Берлин. Одна из целей, которые я при этом имею в виду, состоит в том, чтобы переговорить с Вами об одном научном вопросе, относительно которого я предполагаю, что Вы будете в состоянии преодолеть те затруднения, с которыми я еще не мог совладать.

Дело идет об одном вопросе из учения о специальных дифференциальных уравнениях с частными производными, с которым я встретился при исследовании второй вариации площади поверхности любой части минимальной поверхности. Ответу на этот вопрос я придаю некоторое значение, потому что этот ответ даст мне возможность **полностью** закончить то исследование, которое я имею в виду, а именно следующим образом. Некоторое количество положений я строго доказал, они имеют вкратце следующий вид:

Если мы имеем случай I, то часть минимальной поверхности имеет внутри своей границы, рассматриваемой как постоянная линия ограничения, действительно меньшую площадь поверхности, чем каждый другой непрерывный кусок поверхности, ограничены той же линией и достаточно близко от него отстоящий.

Если мы имеем случай II, то рассматриваемая минимальная часть поверхности вообще не обладает минимумом площади поверхности; но так как этот случай является пограничным, то он требует особого исследования.

Если мы имеем случай III, то рассматриваемый кусок минимальной поверхности никогда не составляет минимума площади поверхности.

Чего я до сих пор **не мог доказать**,— это то, что три упомянутых случая, которые я, правда, здесь точнее не охарактеризовал, действительно исчерпывают совокупность всех случаев, возможных при данном исследовании.

Исследование, о котором идет речь, можно представить различным образом; я выбрал тот вид представлений, который, по моему мнению, легче всего вводит в суть дела.

Пусть T будет ограниченная конечным количеством отрезков аналитических линий (одно- или многосвязных) область двух измерений, которая считается расположенной над плоскостью x, y системы прямоугольных координат.

Область значений обоих независимых переменных x, y, которые должны принимать лишь действительные значения, пусть будет областью T. Пусть $p(x, y) = P$ будет определенной заданной аналитической функцией обоих действительных переменных x, y, которая внутри и вдоль всей границы T должна принимать лишь положительные (отличные от нуля) конечные значения. Пусть $p(x, y)$ будет однозначной в области T. Пусть ω будет действительной в области T, однозначной непрерывной функцией x, y, которая вдоль границы T равна нулю и для которой интеграл $\iint\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$ по области T имеет определенный смысл, в то время как взятый по той же области интеграл $\iint p\omega^2 dxdy$ имеет величину 1.

Имеется ли при этих предположениях всегда функция, для которой интеграл $\iint\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$ **является минимумом?**

[11] Смерти В. О. Ковалевского в 1883 г.— прим. *П. К.*

Поставленный вопрос, на который обычно склоняются без дальнейших раздумий отвечать утвердительно, потребовал бы для того, чтобы на него ответить, точной теории дифференциального уравнения с частными производными $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda pu = 0$, в котором λ обозначает минимальное значение интеграла

$$\iint \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Такую теорию я уже в некоторой ее части разработал, но мне не удалось всюду дать строгие доказательства, и как раз эта причина заставляет меня обратиться к Вам с просьбой о помощи.

Собственно говоря, дело теперь идет о том, чтобы решить, является ли в рассматриваемой области при заданной функции ω величина λ большей 1, равной 1 или меньшей 1.

Упомянутая раньше вариация составляет ведь распространенный по области T двойной интеграл

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right)^2 - p\bar{\omega}^2\right] dx\, dy,$$

минимальное значение которого равно

$$(\lambda - 1) \iint_T p\bar{\omega}^2 dx\, dy.$$

Если, следовательно, в специальном случае $\lambda > 1$, то вторая вариация существенно положительна и лишь в том случае становится равной нулю, когда p постоянно равно нулю. Случай $\lambda = 1$ соответствует пограничному случаю, рассматриваемому выше под II, а в том случае, когда $\lambda < 1$, упомянутая вторая вариация может стать и отрицательной, поэтому о минимуме здесь не может быть речи. [Далее Шварц предлагает другую постановку того же вопроса]...

Мне очень было бы приятно, если бы мне удалось заинтересовать Вас теми вопросами, которые я не в состоянии был разрешить. Возможно, что мне придется так наметить свое путешествие в Берлин, что я уеду еще в этом году.

Желая Вам веселых праздников и счастливого Нового года, с глубоким уважением

А. Шварц»