Зная, что осьмина $= \frac{1}{8}$, третник $= \frac{1}{12}$, четверик $= \frac{1}{32}$ можно записать соотношения между дробями в этих таблицах в виде

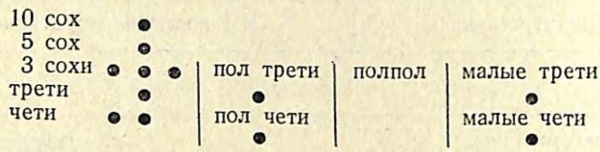
$$\frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{12} = 6 \cdot \frac{1}{2 \cdot 12} = 12 \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 12} = 24 \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 12} \text{ и т.п.}$$

По-видимому, эти таблицы давали возможность производить арифметические действия с дробями.

«Сошная кладь» и «счет на линиях» из рукописей, посвященных арифметическим вопросам вычислений, полностью перешли и в общеарифметические руководства, распространенные на Руси в XVI—XVII вв.

Так, например, в «цифирных счетных мудростях» есть статья «Указ как класть костьми сошную кладь», в которой рекомендуется начертить «... мелом или чем ни будет $\widetilde{\text{Е}}$ (5) черт вдоль. И клади меж чертами трети и полутрети, и половину полутрети, и малые трети, и четверти, и получетверти, и половину получетверти как какая смета прилучится» [14].

Далее следует чертеж



На этом чертеже выполняется сложение следующих чисел:

$$18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32}.$$

Ответ записан словами: «Ино станет всего 19 с полу третью и малая четь сохи» [14].

В рукописях есть упоминания, говорящие о том, что на Руси умели выполнять действия с дробями на инструменте «счет костьми».

«Ино тебе тут надобе свести трети и четверти и малые доли в один перечень, как и трети с полутретью. Станет пол сохи» [14].

Вероятно, для этой цели и служили таблицы соотношений между «четью» и «полполчетью», «четью» и «третником» и его долями.

Известный исследователь истории русских счетов И. Г. Спасский писал: «Удельный вес „Книги сошному письму“ в „Счетной мудрости“ очень велик, а перешедший из нее материал относится к числу ее древнейших составных частей...» [3].

Это предварительное изучение таблиц «книг сошного письма» позволяет утверждать, что на Руси для дробей имелись обозначения с помощью славянской нумерации, а действия с дробями производили при помощи счета «костьми на линиях».

Литература

1. История отечественной математики. Киев, 1966, т. 1.
2. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968.
3. *Спасский И. Г.* Происхождение и история русских счетов.— Историко-математические исследования, М., 1952, вып. 5.
4. *Карамзин Н. М.* История Государства Российского. М., 1903, т. 1.
5. *Татищев В. Н.* История Российская. М.— Л., 1965, т. 5.
6. Акты, собранные в библиотеках и архивах Российской империи археографической экспедицией. СПб., 1836, т. 1.
7. Полное собрание русских летописей. СПб., 1901, т. 12.
8. Рукопись Государственной библиотеки СССР им. В. И. Ленина (в дальнейшем ГБЛ), ф. 310, № 1335.
9. Рукопись ГБЛ, ф. 29, № 64, л. 4 об.
10. Рукопись ГБЛ, л. 5, 6.
11. Рукопись ГБ, л. 6.
12. *Штаден Г.* О Москве Ивана Грозного. Записки немца-опричника. Л., 1925.
13. Рукопись Государственного Эрмитажа. «Книга сошному и вытному письму...», л. 103.
14. Рукопись ГБЛ СССР, ф. 178, № 982, л. 176.

ГАЛИЛЕЙ И ЕГО СРЕДНЕВЕКОВЫЕ ПРЕДШЕСТВЕННИКИ

(К вопросу о формировании научных принципов Галилея)

В. С. ШИРОКОВ (г. Горький)

Вопрос о научных предшественниках Галилея, тесно связанный с проблемами научной революции XVI—XVII вв., привлекал внимание многих исследователей [1—5]. Хотя сходство между выводом свойств униформно-дифформного (т. е. равномерно-неравномерного) изменения, данным средневековыми учеными (мертонцы *, Орем и др.), и выводом законов падения тел, данным Галилеем, очевидно, сам Галилей нигде не ссылается на средневековых авторов. В. П. Зубов справедливо писал о том, что Галилей оперирует такими понятиями, как «бесконечное множество градусов скорости», «бесконечное множество точек», «бесконечное множество линий», «совокупность и сумма la massa e la somma всей скорости», «совокупность и агрегат стольких же градусов скорости» и т. д., т. е. понятиями, которые, если рассматривать их в узкоматематическом смысле, близки к использованным [2, с. 145]. К такому же выводу приходит и М. Клагет: «Определения мгновенной скорости, униформного ускорения и др., данные Галилеем, являются почти точными копиями мертонских» [4, с. 252].

Как известно, в основе вывода Галилеем законов падения тел лежат следующие положения: 1. Изображение равноускоренного движения, начинающегося с нуля, треугольником, а равномерного — параллелограммом (фактически — прямоугольником), причем время соответствует вертикальному отрезку. 2. Рассмотрение бесконечного множества градусов скорости, «приобретенных за бесконечное множество мгновений, заключенных в промежутке времени... и соответствующих бесконечному множеству точек, содержащихся в линии» [2, с. 144]. 3. Приравнивание бесконечного множества градусов скорости площади треугольника. «Чтобы представить бесконечное множество градусов скорости... нужно мысленно провести бесконечное множество все меньших и меньших линий... такое бесконечное множество линий дает нам в конце концов (in ultimo) площадь треугольника» [2, с. 144]. 4. Сравнение площадей геометрических фигур, представляемых всегда состоящими из бесконечного множества отрезков. 5. Предположение, что одно бесконечное множество в два раза больше другого: параллели параллелограмма, «поскольку их бесконечно много, будет вдвое больше бесконечного множества параллелей треугольника» [2, с. 147].

Все эти положения имеются в трактатах средневековых ученых, однако нет ни одного известного нам средневекового доказательства, «мертонского правила», основанного одновременно на всех этих принципах. Прав В. П. Зубов, утверждая, что геометрическая суть доказательства у Галилея остается той же, что у Орема. Однако «костяк» логической аргументации обнажен: Галилей пытается глубже вникнуть в исходные принципы аргументации, раскрыть то, что у его предшественников лишь предполагалось [2, с. 144].

Все сказанное относится к итоговым сочинениям Галилея: «Диалогу о двух главнейших системах мира» (1632 г.), «Беседам и математическим доказательствам, касающимся двух новых отраслей науки» (1638 г.). Однако для того, чтобы решить вопрос о связи Галилея со средневековой наукой, следует обратиться к его ранним трактатам.

Охарактеризуем кратко основные результаты средневековой математики и механики. Поскольку в эту эпоху исследования были связаны с понятием переменной величины и функциональной зависимости (которая понималась мертонцами как градус или интенсивность качества, а Буриданом и Оремом и их последователями — как связь между геометрическими величинами), то эти исследования необходимо включали в себя инфинитезимальные представления. Были отмечены некоторые свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин (Суисет, Орем) **. Понятие бесконечности подверглось более тонкому логическому анализу, чем ранее; было сделано четкое разграничение между понятиями потенциальной и актуальной бесконечности (Хейтесбери, Суисет, Буридан, Григорий из Римини). Были сформулированы определения мгновен-

* Т. е. представители Мертон-колледжа Оксфордского университета.

** О названных ученых, а также о средневековых теориях см. следующую литературу [3—6, 8, 9].

ной скорости изменения (Хейтесбери, Суисет, Орем), понятия ускорения (Суисет, Орем), решалась задача определения средней скорости изменения, и в частности движения. Чрезвычайно плодотворным оказался принцип представления величины в виде бесконечной совокупности величин меньшего измерения (например, площадь рассматривалась как совокупность линий, а пройденный путь — как совокупность скоростей или тотальная скорость) и сравнение величин на основе этого принципа (что имеет определенное сходство с принципом Кавальери). Были просуммированы некоторые ряды (Хейтесбери, Суисет, Орем, А. Томас), и достаточно четко сформулировано, что для бесконечных множеств понятие «часть», отношения «равно», «больше», «меньше» отличаются от конечных (Григорий из Римини, Суисет и др.). Была сделана попытка формализации движения, во многом имеющая аналогии в дальнейшем (Буридан). Широко обсуждались вопросы обоснования этих теорий (Брадвардин, Григорий из Римини, Буридан и др.). Все эти идеи и методы оформились в весьма целостную в теоретическом отношении систему, имеющую во многом специфически средневековую форму. Справедливо будет рассматривать весь этот комплекс идей и методов средневековой математики как предвосхищающий и во многом аналогичный идеям и методам дифференциального и интегрального исчислений, как подготавливающий их развитие. И одним из ключевых пунктов на этом пути было научное творчество Галилея.

Начальный этап становления Галилея как ученого нашел достаточное выражение в его ранних трактатах (1584—1586 гг.), написанных им в возрасте 20—22 лет в то время, когда он учился в Пизанском университете и слушал лекции Франческо Бонамико [5, с. 24—27]. Эти работы под заголовком «Juvenilia», т. е. «Юношеское», издал в 1890 г. А. Фаварро [10, с. 15—177]. Сюда же примыкает трактат «О движении» (De motu) *, посвященный критике аристотелевской концепции движения. Оба этих сочинения представляют собой весьма цельные сочинения (даже с учетом лакун в первом из них) [10, с. 115, 131, 136], отражающие взгляды Галилея на предшествующую ему средневековую математику. С этой точки зрения наиболее интересны трактаты из «Juvenilia»: «Об интенсии и ремиссии» (De intensione et remissione), «О частях или градусах качества» (De partibus sive gradibus qualitatis) и четвертая часть трактата «Об элементах», озаглавленная «Может ли форма элементов усиливаться и ослабляться» (An forma elementorum intenditur et remittitur) [10, с. 111—122, 133—157]. Галилей ссылается на Суисета, Брадвардина, Хейтесбери, Оккама, Григория из Римини, Уолтера Берли (Вальтер Бурлей), Альберта Саксонского, Марсилия Ингена и др. Ссылок на Буридана и Орема нет. Галилей также упоминает или цитирует ученых XV—XVI вв.: Гаэтана Тиенского, Марлиани, Блазия из Пармы (Бьяджо Пелакини), Помпонацци, Павла Венецианского, Ачиллини и др. Бонамико и Бенедетти не упомянуты ни разу.

Основное внимание в названных трактатах из «Juvenilia» уделено теории интенсии и ремиссии форм и частично учению об униформности и дифформности качеств. «Если рассматривать одно и то же качество, то оно изменяется, становясь больше или меньше, о чем говорит и Аристотель в V кн. «Физики». Из этого проистекает понятие об интенсии и ремиссии качеств, о которых пойдет речь... это обнаруживается почти при любом качественном изменении, так что нельзя представить, как происходит это изменение, не представляя себе интенсию и ремиссию; также и почти с любым взаимодействием (actio) связаны интенсия и ремиссия» [10, с. 111],— пишет Галилей. Из авторов, которые писали на эту тему, Галилей отмечает Эгидия Романского, Уолтера Берли (он называет его трактат «Об интенсии и ремиссии»), Григория из Римини, Оккама и др.

Галилей приводит определение интенсии и ремиссии, которое характерно для понимания этих понятий в XVI в. «Интенсию и ремиссию можно рассматривать двояко. Во-первых, формально, во-вторых, как меру того, что обозначается. Относительно первого: так же как экстенсивность качества может быть большей или меньшей, а любое свойство — совершеннее или несовершеннее, так и то, что имеет вид формы или качества, может быть больше или меньше... Относительно второго: интенсия и ремиссия могут рассматриваться двояко. Во-первых, интенсия определяется по отношению к ремиссии, так что даже малое качество можно назвать интенсивным по сравнению с

* Трактат «О движении» написан в 1589—1590 гг. и представляет собой лекции, которые Галилей читал в Пизанском университете. Изданы все три редакции этого сочинения, причем последняя в форме диалога. Об этом трактате см. [2, 11].

еще меньшим и наоборот. Во-вторых, можно определить их абсолютно и самих по себе. Тогда интенсия и ремиссия занимают некоторую широту, в которой существуют границы. Если в этом качестве вообразить среднюю точку, тогда то, что будет больше, называется интенсией, меньше — ремиссией. И в этом видят различие между интенсией и ремиссией, как между количеством большим и меньшим или как между совершенным и несовершенным» [10, с. 112]. Галилей уточняет, что этот «высший градус» равен восьми [10, с. 115]. Этот отрывок напоминает прежде всего о «Калькуляторе» Суисета. Именно подобное разграничение сделано в первом трактате «Калькулятора»— «Об интенсии и ремиссии» [12, 13]. Суисет также считал, что интенсия и ремиссия отличаются формально и как количество большее и меньшее. «Калькулятор» Суисета был широко распространен в Италии в XV—XVI вв., три раза печатался, в итальянских библиотеках имеются его многочисленные рукописные копии [4, с. 202]. Возможно, что Галилей был знаком с «Калькулятором». Сочинения ученых XIV в. породили многочисленную литературу или в форме комментариев, или в виде сокращенных изложений трактатов XIV в. Не исключено, что Галилей читал подобные сочинения, в частности трактат Пьетро Помпонацци, где критикуется концепция Суисета и защищается теория Галена — ал Кинди [14, с. 355—362; 13, с. 132—135; 15, с. 283—314]. В теории Галена, развитой ал Кинди, Константином Африканским, Роджером Беконом и другими, считалось, что сумма градусов интенсии и ремиссии (например, градусов тепла и холода в смеси) постоянна и равна восьми. Интенсия измерялась расстоянием от нуля (не градуса), ремиссия — расстоянием от высшего градуса (восемь). У Суисета интенсия и ремиссия связаны обратно пропорциональной зависимостью, что дало ему возможность рассмотреть некоторые инфинитеземальные свойства переменной величины. Теория Галена — ал Кинди, известная на Западе с середины XIV в. по сочинениям Вальтера из Одингтона, Арнольда из Виллановы и др., широко обсуждалась в кругах итальянских ученых XVI в. как более удобная для приложений.

Геометрический вариант теории интенсии и ремиссии форм, т. е. теория широт форм Николая Орема, также был известен Галилею. В трактате «О частях или градусах качеств» кратко изложены основные идеи учения об униформности и дифформности качеств. Здесь мы читаем: «В-третьих, следует отметить, что поскольку качество всегда существует в предмете количественно, то оно посредством собственных градусов образует широту качества и может делиться на количественные части (partes quantitatis). Если сравнивать между собой эти градусы или качественные части (partes qualitatis) с частями количественными и если для любой части величины будут равными и градусы качества, тогда качество называется униформным. Если эти градусы не равны, то оно называется дифформным. Если же разности (excessus) этих градусов будут равные, таким образом, например, что в первой части будет два градуса, во второй — четыре, в третьей — шесть и т. д., т. е. так, что эта разность постоянна и равна двум, то качество называется униформно-дифформным; если же разности градусов не равны, то дифформно-дифформным. Опять, если эти неравные разности будут такими, что в первой части, например, будет четыре градуса, во второй — шесть, в третьей — девять и т. д., то качество называется униформно-дифформно-дифформным; если же разности градусов не будут пропорциональными, тогда называется дифформно-дифформно-дифформным» [10, с. 120].

Приведенный отрывок из «Juvenilia» Галилея является точной цитатой из трактата «О широтах форм» (De latitudinibus formarum), написанного примерно в 1390 г. Яковом де Санкто Мартино [17, с. 367]. Этот трактат получил широчайшее распространение: четыре печатных издания и многочисленные рукописные копии. Трактат «О широтах форм» стал образцом для составления подобного рода сочинений, положенных в основу университетского преподавания. Галилей мог познакомиться с теорией широт форм не только по трактату «О широтах форм», но и по трактатам Дж. Казале или Блазия из Пармы: все эти сочинения изданы в 1505 г. в одном сборнике [18, с. 106]. К тому же у Галилея было много возможностей: почти все основные средневековые трактаты к тому времени были изданы. Главное же то, что Галилей, несомненно, читал трактат «О широтах форм». Следовательно, и учение о дифформностях и основные идеи теории широт форм Оремы были ему известны. Других упоминаний об этих теориях в «Juvenilia» нет. С другой стороны, Галилей совершенно не обращает внимания на весьма несуразное определение в цитированном выше отрывке двух последних видов качества. Одновременно у него нет неверного утверждения автора трактата «О широтах форм», о том что униформно-дифформно-дифформное качество изображается полукругом [19, с. 88—103]. Галилей не считал необходимым слишком вдаваться в тонкости теории интенсии и ремиссии.

Галилей взял наиболее существенные идеи средневековых математических теорий, в первую очередь идею функциональной зависимости, причем для физических качеств (теплота, скорость и т. д.) эта зависимость полагалась непрерывной. Отсюда интерес Галилея к понятию непрерывности, к соотношению непрерывного и дискретного. Эти проблемы глубоко интересовали его и впоследствии. Существенны те инфинитеземальные соображения, которые имеются в этом раннем сочинении Галилея.

В средневековой литературе непрерывность величины вслед за Аристотелем понималась как бесконечная делимость [20, с. 40]. Из этого исходит и Галилей: «непрерывность понимается как бесконечная делимость, т. е., взяв какое-либо время, можно взять и меньшее, и так до бесконечности» [10, с. 118]. Сходным образом рассуждал Галилей и в трактате «О движении»: между любыми двумя неравными отрезками заключено бесконечное множество отрезков, поскольку разность между этими отрезками бесконечно делима» [10, с. 287].

С этим же связана одна из излюбленных тем средневековых комментаторов «Физики» Аристотеля — соотношение точки и континуума, например мгновения и времени: «мгновение не является само по себе непрерывным, но является границей времени (sed intercedit tempus — буквально: но рассекает время.— *В. Ш.*)» [10, с. 117] Этот вопрос (далеко не простой и для современных физических теорий) подробно изучался в рамках средневековых теорий строения континуума, в частности в учении о «максимуме и минимуме» переменной величины [6, с. 133—168]. Она разбирается в последнем из отмеченных нами трактатов из «Juvenilia».

Эта теория, получившая в трудах Хейтесбери и Суисета значительное развитие (по сравнению с Аристотелем), возникла из такого вопроса: как определить способность Сократа поднять определенный вес: по максимальному весу, который он способен поднять, или же по минимальному весу из тех, которые он не способен поднять? Этот пример приводит Хейтесбери [21]. Для Галилея эта проблема имеет теоретический интерес главным образом в связи с вопросом об определении границ переменной физической величины: силы, сопротивления, скорости и т. п. Один из основных вопросов этой теории таков: принадлежит ли максимум или минимум к множеству значений самой величины или нет, т. е. является он внутренним или внешним для этого множества. Соответственно этому возможны четыре вида границ. Определения этих границ, приведенные в «Juvenilia», текстуально совпадают со средневековыми (например, по указанному сочинению Хейтесбери). В только что приведенном примере с Сократом, это будут соответственно внутренний максимум и внешний минимум. Определения Галилея таковы. «Внутренний максимум (maximum quod sic) есть наибольшая величина, которой вещь может достичь или при которой она может существовать, а при большей не может. ...Внешний минимум (minimum quod non) есть такая величина, которой вещь вследствии великости не может достичь и при которой она не существует, но при любой меньшей, не превосходящей внутреннего максимума, существовать может» [10, с. 139].

В этой теории особое место для понимания эволюции воззрений Галилея занимает идея представления переменной величины множеством ее значений, что он позднее при выводе законов падения тел обозначал или латинским термином aggregatum (собрание, совокупность), или итальянским summo (совокупность, сумма). Мы имеем в виду также знаменитое место из «Бесед и математических доказательств», где приведены примеры взаимно-однозначного отображения бесконечного множества на его правильную часть [22, с. 140—141]. Парадоксы бесконечного широко обсуждались в средневековой научной литературе. Отражение этих споров есть и в «Juvenilia». Галилей, как и многие средневековые авторы, рассматривает их в главе «Может ли мир существовать извечно (An mundus potuerit esse ab aeterno)» [10, с. 32—37]. Там мы читаем: «Если принять, что мир существовал извечно, то следует допустить, что была бы пройдена актуальная бесконечность дней, месяцев, лет (infiniti dies, mensis, anni... fuissent pertransita)» [10, с. 34]. Отсюда получается противоречие: «одна бесконечность будет больше другой, поскольку если мир существует вечно, то была пройдена бесконечность лет (infiniti anni fuissent elapsi), но год содержит 365 дней, значит, число дней в бесконечности больше, чем лет» [10, с. 34]. Этот вывод повторяется затем неоднократно. Галилей в этом рассуждении ссылается на труды таких известных сторонников актуальной бесконечности в средние века, как Григорий из Римини, Уильям Оккам, Дурандо Порцнано, у которых действительно имеется подобное рассуждение.

Таким образом, многие основные понятия, необходимые для изучения движения — одного из главных интересов Галилея, были им достаточно четко сформулированы в самом начале его научной деятельности. Эти понятия и принципы Галилей продолжал уточнять и развивать на протяжении всей своей жизни.

Литература

1. *Maier A.* Die Vorläfer Galileis im 14. Jahrhundert. Roma, 1949.
2. *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. М., 1962.
3. *Duhem P.* Études sur Léonard de Vinci. v. 3. Paris, 1913.
4. *Clagett M.* The science of mechanics in the middle ages. Madison, 1959.
5. *Koyré A.* Études galiléennes. Paris, 1966.
6. *Зубов В. П.* Развитие атомистических представлений до начала XIX в. М., 1965.
7. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. I/Под ред. Юшкевича А. П. М., 1970.
8. *Wulf M.* Histoire de la philosophie médievale. v. 3. Louvain — Paris, 1947.
9. *Широков В. С.* Идеи и методы анализа бесконечно малых в западноевропейской средневековой математике: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: ИИЕТ, 1979.
10. *Galilei G.* Le Opere. Firenze. v. 1, 1929.
11. *Giacomelli.* Galileo Galilei giovanne e il suo «De motu». Pisa, 1949.
12. *Suisset.* Calculator. Venetiis, 2ra, 1520.
13. *Широков В. С.* О «Книге вычислений» Ричарда Суисета.— В кн.: Ист.-мат. исследования. Вып. XXI, 1976.
14. *Wilson C.* Pomponazzi's criticism of calculator.— Isis, 1953, v. 44, pt. 4, № 138.
15. *Зубов В. П.* Из истории средневековой атомистики.— В кн.: Труды Ин-та истории естествознания. Т. 1. М., 1947.
16. *Зубов В. П.* Калориметрическая формула Рихмана и ее предыстория.— Тр. Ин-та истории естествознания. Т. 5. М., 1955.
17. *Maier A.* An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft. Essen, 1943.
18. *Clagett M.* Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. Madison, 1968.
19. *Широков В. С.* Галилей и средневековая математика. В кн.: Ист.-мат. исследования. Вып. XXIII, 1979.
20. *Аристотель.* Физика (Пер. Карпова). М.: Соцэкгиз, 1936.
21. *Nentisberus.* Regule solvendi sophysmata. Venetiis, 1494.
22. *Галилей Г.* Избр. тр. в 2-х томах. Т. 2. М., 1964.

К ИСТОРИИ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ ПРИМЕНЕНИЙ КВАНТОВЫХ ПРИНЦИПОВ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

Г. А. СУЛЕЙМАНЯН

Классическая электронная теория металлов правильно предсказывала закономерности их изменения на качественном уровне, а для некоторых электрофизических характеристик металлов и на уровне количественных закономерностей. Однако основы электронной теории металлов содержали принципиальные противоречия. Эти противоречия привели к скептицизму по отношению к гипотезе свободного электронного газа, пошатнули ее основополагающие допущения. Хорошо известно, что так называемая «катастрофа теплоемкости» надолго подорвала доверие к гипотезе существования электронного газа проводимости в металлах, и не только к этой гипотезе, но и вообще ко всей классической электронной теории металлов в целом.

Когда наступил кризис электронной теории проводимости металлов, возникли разного рода полуклассические или полуквантовые теории электропроводности, в которых делались попытки сохранить общую гипотезу свободного электронного газа и объяс-