НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РОЛЬ В РАЗВИТИИ АЛГЕБРЫ

И. Г. БАШМАКОВА

Современная алгебра может быть определена «как наука о системах объектов той или иной природы, в которых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции называются алгебраическими» [1]. Однако такой взгляд на предмет алгебры возник сравнительно недавно. В своем развитии алгебра прошла различные этапы, на протяжении которых менялись ее основные проблемы и методы, а также язык, с помощью которого эти проблемы выражались и подвергались исследованию. Менялись точки зрения на сущность и предмет алгебры. Быть может, ни одна из математических дисциплин не претерпела в своем развитии такого числа различных метаморфоз.

Под влиянием каких же факторов развивалась эта наука? В современной историко-математической литературе утвердилось мнение, что основной пружиной, определившей развитие алгебры с первых ее шагов и до середины прошлого века, была проблема решения определенных уравнений, особенно решения их в радикалах, что именно она и породила все те удивительные превращения, которые выпали на долю алгебры. Это обстоятельство объясняется, по-видимому, тем, что в середине прошлого века алгебру определяли как науку об исследовании и решении определенных уравнений [2]. Благодаря этому до сих пор оставалась в стороне вторая основная проблема — исследование и решение неопределенных уравнений. Последние по традиции связывались в основном с развитием теории чисел и отчасти с алгебраической геометрией, но никогда — с развитием алгебры.

Мы постараемся показать, что эта точка зрения ошибочна, что освещение пути развития алгебры при этом получается односторонним, поэтому и вся перспектива искажается. Для обоснования нашей точки зрения мы рассмотрим последовательно основные этапы развития алгебры и постараемся определить, какие проблемы стояли в центре внимания и какие методы они вызывали к жизни.

Но сначала несколько слов о неопределенных уравнениях. Алгебраическое уравнение или система алгебраических уравнений называется неопределенной, если число уравнений меньше числа неизвестных. Например, уравнения

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1) \quad x^2 + y^2 = 3, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (3) \quad x^3 + y^3 = 1 \tag{4}$$

будут неопределенными. Неопределенной будет и система

$$\begin{cases} xy + x = u^2, \\ xy + y = v^2. \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать (если не оговорено противное), что все коэффициенты рассматриваемых уравнений рациональны.

Поскольку неизвестных больше, чем уравнений, то возникает некоторый произвол в выборе решений, поэтому очень важно указать, в какой числовой области ищутся неизвестные. Например, если такой областью является кольцо целых чисел Z, то уравнение (1) имеет только четыре решения:

$$x_1=1, \quad y_1=0; \quad x_2=-1, \quad y_1=0; \quad x_3=0, \quad y_3=1; \quad x_4=0, \quad y_4=-1.$$

Если же мы ищем решения в поле рациональных чисел Q, то решений будет бесконечно много, причем все они могут быть выражены в виде

$$x_k=\frac{2k}{1+k^2}, \quad y_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}, \quad k\in Q. \tag{5}$$

Уравнение (2), как нетрудно доказать, не имеет ни одного решения ни в кольце целых чисел Z, ни в поле Q.

Итак, решение уравнения $x^2+y^2=N$ зависит от того, какими теоретико-числовыми свойствами будет обладать число N. Например, для $N=1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13$ в Q будет решений бесконечно много, а для $N=3, 7, 11$ — ни одного. Уже отсюда видна связь неопределенных уравнений с теорией чисел.

Наконец, возможен случай, когда неопределенное уравнение имеет конечное число решений. Примером может служить уравнение (4), которое имеет только два решения: $x_1=0$, $y_1=1$ и $x_2=1$, $y_2=0$ (эти решения обычно называют тривиальными). Покажем, что никаких других решений, кроме выписанных выше, у уравнения (4) нет. Действительно, если бы существовали другие решения $x=\frac{p}{q}$, $y=\frac{r}{q}$ (мы предполагаем, что дроби, которыми выражаются x и y, уже приведены к общему знаменателю), то, подставляя их в уравнение (4), мы бы получили

$$p^3+r^3=q^3,$$

но, как доказано, «никакой куб нельзя представить в виде суммы двух кубов». Это Великая теорема Ферма для $n=3$.

Если задано неопределенное уравнение (или неопределенная система), то задача состоит в исследовании существования решения и, если решение существует, в нахождении всех решений. В алгебраической геометрии ставится вопрос об изучении структуры множества всех решений неопределенного уравнения. Однако такая постановка вопроса возникла только в прошлом веке. Первоначально математики довольствовались нахождением одного рационального решения и, если это удавалось, бесконечного множества таких решений.

Вернемся теперь к развитию алгебры. Элементы алгебры мы находим впервые в древнем Вавилоне за 2 тысячи лет до н. э. Многочисленные глиняные таблицы, расшифрованные в 20-х годах нашего века, свидетельствуют о высокой математической культуре вавилонян. Крупнейшим достижением этого времени было решение квадратных уравнений в радикалах; иначе говоря, было найдено выражение для корней квадратного уравнения через его коэффициенты при помощи четырех действий арифметики и операции извлечения квадратного корня.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, у вавилонян не было символики для обозначения неизвестных и параметров, поэтому «формула решения» не записывалась в общем виде (как это делается у нас), а демонстрировалась на многочисленных однотипных числовых примерах. Во-вторых, более точно говорить не о «формуле решения», а об эквивалентном ей *алгоритме*, состоящем в перечислении последовательных операций, которые надо произвести над коэффициентами, чтобы получить значение корня уравнения.

Естественно предположить, что для получения этого алгоритма вавилоняне должны были преобразовывать уравнения $x^2\pm ax=b$ или ча-

сто встречающиеся в таблицах системы $\left.\begin{matrix} x \pm y = a \\ xy = b \end{matrix}\right\}$ к виду $u^2=B$. Для этого они должны были знать некоторые общие свойства операций сложения и умножения, а также уметь делать подстановки. Другие примеры, имеющиеся в таблицах, подтверждают эту гипотезу. Можно считать установленным, что вавилоняне знали свойства и правила, которые мы выражаем сейчас с помощью формул:

$$(a \pm b)\, c = ac \pm bc, \tag{6}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab, \tag{7}$$

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2. \tag{8}$$

Итак, за 2 тысячи лет до н. э. вавилоняне знали уже некоторые законы алгебраических операций (формула (6) есть не что иное, как закон дистрибутивности умножения по отношению к сложению), осуществляли подстановки и решали с помощью алгебраических методов квадратные уравнения и эквивалентные им системы. Все это позволяет говорить о наличии у них *элементов алгебры*. Этот первый этап в развитии алгебры будем условно называть *числовой алгеброй*.

Однако и в этот наиболее древний период возникновение и развитие алгебраических методов были связаны не только с решением квадратных уравнений. В самых древних текстах наряду с определенными уравнениями рассматриваются и неопределенные. Во многих текстах речь идет о решении уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{9}$$

в рациональных числах. Вавилоняне умели находить его решения (x, y, z), которые впоследствии получили название «пифагоровых троек». Правда, не совсем ясно, знали ли они общие формулы решения этого уравнения, но достоверно, что вавилоняне связывали «пифагоровы тройки» с решением другого неопределенного уравнения:

$$u^2 + v^2 = 2w^2. \tag{10}$$

А именно было установлено, что если (x, y, z) — решение уравнения (9), то решение уравнения (10) получается так:

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = z.$$

Но самое удивительное, что, зная одно решение уравнения (10) u_0, v_0, z_0, они умели находить бесконечно много других его решений вида u_n, v_n, z_0. Для этого вавилоняне пользовались формулой

$$(p^2 + q^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha p - \beta q)^2 + (\alpha q + \beta p)^2 = (\alpha p + \beta q)^2 + (\alpha q - \beta p)^2, \tag{11}$$

которую теперь обычно называют формулой композиции форм x^2+y^2, так как из нее следует, что произведение двух форм вида x^2+y^2 снова можно представить в виде суммы двух квадратов (и притом двумя различными способами!). Эта формула, как мы увидим, сыграла выдающуюся роль в математике народов средневекового Востока и Европы.

Пусть теперь u_0, v_0, w_0 — решение уравнения (10); чтобы получить новое решение, вавилоняне применяли формулу (11), взяв $\alpha^2+\beta^2=1$ (например, $\alpha=3/5$, $\beta=4/5$), $p=u_0$, $q=v_0$.

Тогда

$$2z_0 = 2z_0(\alpha^2 + \beta^2) = (u_0^2 + v_0^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha u_0 - \beta v_0)^2 + (\alpha v_0 + \beta u_0)^2 =$$
$$= (\alpha u_0 + \beta v_0)^2 + (\alpha v_0 - \beta u_0)^2,$$

т. е. получим еще два решения:

$$u_1 = \alpha u_0 - \beta v_0, \quad v_1 = \alpha v_0 + \beta u_0, \quad z_0,$$
$$u_2 = \alpha u_0 + \beta v_0, \quad v_2 = \alpha v_0 - \beta u_0, \quad z_0.$$

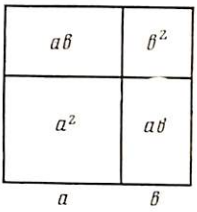
Беря теперь эти новые значения в качестве p и q, получим новые решения и т. д. Можно также брать другие значения для α и β. Их можно получить из любой пифагоровой тройки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, разделив все члены на $\bar{z}$.

Итак, уже на первом этапе развития алгебры на нее оказывали влияние как проблема решения определенных уравнений, так и исследование и решение неопределенных уравнений.

Второй этап развития алгебры совпадает с расцветом классической греческой математики (V—II вв. до н. э.). В это время математические знания, накапливаемые веками, были преобразованы в абстрактную науку, основанную на системе доказательств,— математику. Если для вавилонян (которые, несомненно, тоже применяли отдельные выводы) центр тяжести лежал *не в методе получения результата*, а в самом *результате*, то теперь центр тяжести переносится на *метод и доказательство*. При этом доказательство служит не только для установления истины того или иного предложения, но и для выяснения его *сущности*, которая раскрывается путем установления его связи с другими предложениями, теми, на которые оно опирается, и теми, которые из него следуют. Эту сторону доказательств подчеркивал уже Аристотель во «Второй аналитике».

Такое глубокое преобразование нашей науки сказалось на всех частях ее, в том числе на арифметике и алгебре. К концу V в. до н. э. были построены основы элементарной теории чисел и теория положительных рациональных чисел, которые рассматривались как отношения целых (мы бы теперь сказали — как пары целых), однако в классическую эпоху эти отношения числами не считались. Первоначально основой математики служила арифметика; с ее помощью строилась теория музыки (гармония), астрономия и частично геометрия (учение о подобии). Это была первая попытка арифметизации математики и математического естествознания, которая нашла свое выражение в крылатом афоризме ранних пифагорейцев «все есть число». Открытие несоизмеримых отрезков (отношение которых не выражается отношением целых чисел) привело к кризису арифметической концепции. Вскоре более общей наукой стала считаться геометрия, которая сделалась основой и языком античной математики. Не позднее конца V в. до н. э. в геометрические доспехи облеклась и алгебра. Греки перевели все арифметические операции на геометрический язык и начали непосредственно оперировать с геометрическими объектами: отрезками, площадями и объемами, не прибегая к числам. Этот этап развития алгебры обычно называют, следуя Г. Г. Цейтену, *геометрической алгеброй*. Отрезки были первой областью объектов этой алгебры, их можно было складывать («приставлять один к другому») и вычитать из большего отрезка меньший. Произведением двух отрезков назывался прямоугольник, построенный на них: произведение трех отрезков представлялось построенной на них прямоугольной призмой. Произведение более трех отрезков было непредставимым, говорить о нем имело не больше смысла, чем о пространстве четырех или пяти измерений.

В геометрической алгебре можно было уже *доказывать* те свойства и тождества, которые были известны еще вавилонянам. И действительно, в «Началах» Евклида мы находим геометрическое доказательство формул (6)—(8). Так, формула $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ доказывалась геометрически путем рассмотрения квадрата, сторона которого равна сумме величин a и b (рис. 1). Задачи на квадратные уравнения также формулировались геометрически, например задача, эквивалентная уравнению $x^2=ab$, звучала так: «преобразовать данный прямоугольник (т. е. ab) в квадрат». Евклид в «Началах» решает квадратные уравнения самого общего вида $\alpha x(a-x)=S$ и $\alpha x(a+x)=S$ и для первого из них формулирует ограничение, которое надо наложить на S, чтобы корень



был действительным положительным. Все доказательства проводились общим образом и годились как для соизмеримых, так и для несоизмеримых величин.

В «Началах» рассматриваются также задачи, которые сводятся к последовательному решению нескольких квадратных уравнений. Так, для нахождения ребра правильного додекаэдра через диаметр D описанной сферы надо решить последовательно два квадратных уравнения:

$$y^2 - D^2 y + \frac{D^4}{9} = 0,$$

$$x^2 = y.$$

И вообще, средствами геометрической алгебры (иначе говоря, циркулем и линейкой) можно решить любое алгебраическое уравнение, корни которого выражаются через вещественные квадратные радикалы (или еще: которое может быть сведено к последовательному решению цепочки квадратных уравнений таких, что коэффициенты каждого последующего являются рациональными функциями от корней предыдущего). Таким образом, проблема решения определенных уравнений в радикалах выступает на втором этапе развития алгебры как проблема решения уравнений в квадратных радикалах. Например, уравнения $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ и $x^{16}+x^{15}+\cdots+1=0$ будут разрешимы средствами геометрической алгебры, а уравнение $x^6+x^5+\cdots+1=0$ — неразрешимо [1].

В V в. появились первые «неразрешимые» задачи, т. е. неразрешимые циркулем и линейкой; это знаменитая задача удвоения куба, которая сводится к уравнению $x^3=2a^3$, а также задача трисекции угла. Отдельные кубические уравнения решал и исследовал Архимед. Их корни, как и корни уравнения удвоения куба, были найдены с помощью пересечения гипербол и парабол. Таким образом, проблема решения уравнений в кубических радикалах в античности не ставилась, тем более в радикалах более высокой степени.

В теоретических сочинениях V—III вв. до н. э. встречается два вида неопределенных уравнений. Это пифагорово уравнение $x^2+y^2=z^2$ и уравнение $y^2=ax^2\pm1$ (12), где a — целое неквадратное число, получившее впоследствии название уравнения Пелля — Ферма. В обоих случаях речь шла об отыскании целых положительных решений.

Изучение пифагорова уравнения проходит красной нитью через всю античную математику. Формулы для его решения предлагали ранние пифагорейцы (VI—V вв. до н. э.), Платон (IV в. до н. э.), наконец, самое общее его решение содержится в «Началах» Евклида, где доказано, что все решения можно представить в виде:

$$x=p^2-q^2, \quad y=2pq, \quad z=p^2+q^2.$$

Уравнение (12) для $a=2$ также рассмотрено в «Началах», где доказывается, что если x_{n-1}, y_{n-1} — решение уравнения (12) при $a=2$, то новое решение x_n, y_n можно получить по формулам

---

[1] Это было доказано К. Ф. Гауссом в его «Disquisitiones arithmeticae» (1801 г.).

$$y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1},$$

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Архимед в письме к александрийским ученым поставил свою знаменитую «задачу о быках», которая может быть сведена к уравнению (12) при $a = 4\,729\,494$. Наименьшее решение этого уравнения записывается в десятичной позиционной системе с помощью 206 545 цифр, т. е. практически выписать его невозможно. По-видимому, Архимеда интересовал не «ответ», он хотел выяснить, владеют ли александрийцы общим алгоритмом для нахождения наименьшего решения уравнения (12).

Последующая история неопределенных уравнений свидетельствует о том, что на рассматриваемом этапе решались и многочисленные другие виды неопределенных уравнений, но их исследование оставалось за рамками теоретической науки и на развитие геометрической алгебры влияния не оказывало.

Третий, очень важный этап развития алгебры начинается в первые века нашей эры и заканчивается в конце XVI — начале XVII в. Это было время, когда алгебра обрела собственный, присущий ей язык — буквенное исчисление.

Геометрический язык стеснял развитие алгебры, он был для нее неестествен: во-первых, он не давал возможности рассматривать произведения более трех величин, а значит, и алгебраические уравнения выше третьей степени, во-вторых, геометрическое облачение делало алгебру громоздкой и малооперативной. Поэтому, когда в I в. до н. э. наступил упадок классической греческой математики и — что очень важно — традиция была прервана, ученые отказались от геометрической алгебры. Правда, еще долгое время сохранялись геометрические доказательства алгебраических правил и формул (такие доказательства можно найти еще в XVI в.), но сама алгебра уже не была скована геометрическим панцирем. Она приобрела новую форму.

Возврат к числовой алгебре мы находим уже у Герона Александрийского (I в. н. э.), в сочинениях которого решаются численные квадратные уравнения, а также новые интересные задачи на неопределенные уравнения. Заметим, что в «формуле Герона» для вычисления площади треугольника по трем его сторонам подкоренное выражение содержит произведение четырех величин, что в классическую эпоху было бы невозможно. Но особенно ярко новые тенденции нашли свое выражение в творчестве Диофанта Александрийского (III в. н. э.), который и положил начало буквенной алгебре.

До нас дошло два произведения Диофанта (оба не полностью) — «Арифметика» (шесть книг из тринадцати) и отрывки из трактата «О многоугольных числах». Для нас наибольший интерес представляет первое из них [2].

«Арифметика» начинается с введения, которое является, по существу, первым изложением основ алгебры. В нем строится *поле рациональных чисел* и *вводится буквенная символика*. Здесь же формулируются правила действий с многочленами и уравнениями.

Уже у Герона положительные рациональные числа получили права гражданства (в классической античной математике числами назывались множества единиц, т. е. натуральные числа). Диофант делает следующий решительный шаг — он вводит отрицательные числа. Только после этого он получает *область, замкнутую относительно четырех действий арифметики*, т. е. *поле*. Без этого развитие буквенной алгебры было бы невозможно. Но как же Диофант вводит эти новые объекты? Каким путем вообще это можно сделать? Для этого Диофант выбирает ме-

[2] См. подробнее в [3].

тод, который мы бы теперь назвали аксиоматическим: он определяет новый объект, который он называет «недостатком» (λεῖψις), формулируя *правила действий с ним*, а именно: если охарактеризовать новые объекты символом (−), а произвольное рациональное положительное число знаком (+), то Диофант постулирует:

$$(-)\cdot(-)=(+),$$
$$(-)\cdot(+)=(-).$$

Правил сложения и вычитания для новых чисел он не формулирует, но в своих книгах свободно их применяет. Возможно, эти операции применялись и до него.

Далее, Диофант вводит неизвестное число, которое он обозначает специальным символом (ς), а также шесть его первых положительных и шесть отрицательных степеней. Этим он окончательно порывает с геометрической алгеброй, в которой все степени выше третьей непредставимы. Замечательно, что он вводит также обозначение для нулевой степени неизвестного и специально выделяет два правила, которые отвечают двум из аксиом, определяющих группу:

$$x^m 1 = x^m, \tag{1}$$
$$x^m x^{-m} = 1. \tag{2}$$

Для произведений остальных степеней неизвестного Диофант составляет «таблицу умножения», которую мы теперь можем коротко записать в виде

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad -6 \leqslant m+n \leqslant 6.$$

Наконец, он вводит обозначения для знака минус и для знака равенства.

Все это дает возможность Диофанту записывать условия задачи в виде уравнения или системы уравнений. Собственно говоря, никаких уравнений, ни определенных, ни неопределенных, до Диофанта не было. Были только задачи, которые можно свести к уравнениям. Не более того.

Во введении Диофант формулирует два основных правила оперирования с уравнениями: 1) правило переноса члена уравнения из одной части в другую (с обратным знаком) и 2) правило приведения подобных членов. Это те самые правила, которые впоследствии получили широкую известность под арабскими названиями «аль джебр» и «альму-кабала». Кроме того Диофант весьма искусно применяет правило подстановки, не формулируя его.

Итак, в книгах Диофанта мы находим уже четко записанные уравнения и чисто алгебраические преобразования их. Но чему же посвящены эти книги? Для исследования и решения каких проблем Диофант ввел символику и расширил числовую область? Иначе говоря, с какими проблемами было связано рождение буквенной символики? Основное содержание «Арифметики» — это решение неопределенных уравнений и систем в рациональных числах, причем в ней действительно встречаются уравнения шестой степени. Что касается определенных уравнений, то Диофант решает линейные и квадратные уравнения, и притом такие, корни которых рациональны. Для их записи и решения вовсе не нужны были обозначения для степеней неизвестного выше второй. Очевидно, вовсе не проблема решения определенных уравнений побудила Диофанта к нововведениям в алгебре!

Рассмотрим вопрос о границах и возможностях символики Диофанта. Неопределенные уравнения обычно содержат несколько неизвестных, во всяком случае не меньше двух, между тем Диофант ввел символы только для одного неизвестного и его степеней. Как же он обходился при решении задач?

Задача всегда формулировалась общим образом, например: «Заданный квадрат разложить на сумму двух квадратов» (задача 8 книги II). После этого всем параметрам придавались конкретные числовые значения, в данном примере берется квадрат, равный 16. Затем выбиралось основное неизвестное, которое обозначалось введенным символом, другие же неизвестные Диофант выражал в виде линейных, квадратичных или более сложных рациональных функций через это основное и параметры. В приведенном выше примере второе неизвестное выражается через первое (t) в виде $kt+a$. При этом a принимается равным 4 (корню из 16), а в качестве коэффициента при t берется произвольное рациональное число; Диофант выбирает его равным 2, но оговаривает, что можно было бы взять и любое другое. Описанная нами схема является наиболее простой. Иногда оказывается, что на выбор параметров необходимо наложить некоторые ограничения, например надо выбрать такое целое число, которое представимо в виде суммы двух или трех квадратов. Тогда Диофант проводит анализ задачи и определяет, из какого множества чисел M может быть выбран тот или иной параметр.

Итак, конкретные числа несут в «Арифметике» двойную нагрузку: они выступают, во-первых, в роли обычных чисел, а во-вторых, в роли знаков для произвольных параметров. Эту вторую функцию числа будут выполнять в алгебре вплоть до конца XVI в.

Наконец, Диофант в процессе решения задачи может обозначать одним и тем же символом последовательно различные неизвестные (иногда такое «переименование» он применяет три-четыре раза). Таким образом, в рассматриваемый период развития алгебры само обозначение неизвестных требовало большого искусства.

Подведем итог. Диофант первый систематически сводил неопределенные и определенные задачи к уравнениям. Можно сказать, что для обширного круга задач арифметики и алгебры он сделал то же, что впоследствии сделал Декарт для обширного класса задач геометрии, а именно свел их к составлению и решению алгебраических уравнений. В самом деле, и Диофант, и Декарт для решения задачи — арифметической или геометрической — составляли алгебраическое уравнение, которое затем преобразовывали и исследовали по правилам алгебры. При этом производимые преобразования (исключение неизвестных, приведение подобных членов, различные подстановки) не имели непосредственного арифметического или геометрического смысла. Только окончательный результат этих формальных выкладок получал соответствующую интерпретацию и давал решение поставленной задачи. Этот важный шаг мы привыкли относить к созданию аналитической геометрии Декартом, однако задолго до того он был сделан Диофантом в его «Арифметике». Замечательно, что никому из европейских ученых XIII—XVI вв. до знакомства с «Арифметикой» не приходило в голову применить алгебру к решению теоретико-числовых задач.

Но основной проблемой для Диофанта было исследование и решение неопределенных уравнений. Именно с ними оказалось связанным рождение буквенной алгебры.

Заметим, что Диофант нашел основные методы решения в рациональных числах уравнений второй степени от двух неизвестных $F_2(x, y) = 0$, если для него известно одно рациональное решение. Еще более тонкие и интересные методы он применил для нахождения рациональных решений неопределенных уравнений 3-й и 4-й степени от двух неизвестных. Историю этих методов можно проследить вплоть до работ Анри Пуанкаре, относящихся к началу нынешнего века, в которых на основе этих методов была построена арифметика алгебраических кривых.

Дальнейшие успехи алгебры вплоть до X—XI вв. были также связаны с неопределенными уравнениями. К началу X в. относится пере-

вод на арабский язык четырех книг арифметики, приписываемых Диофанту. Эти книги посвящены в основном решению неопределенных уравнений и, по-видимому, были составлены в Александрии в IV—V вв. В них содержатся как оригинальные задачи, которые можно приписать самому Диофанту, так и комментарии к ним. В этих книгах уже были введены 8-я и 9-я степени неизвестной.

Неопределенные уравнения занимали почетное место в алгебраических трактатах Абу Камила (начало X в.) и аль-Караджи (X—XI вв.). Методы исследования и решения они применяли те же, что и Диофант (за исключением решения неопределенных уравнений 3-й степени, метод решения которых остался им неизвестен). В книге «Аль-Фахри» аль-Караджи преобразует небольшое алгебраическое введение Диофанта в обширный трактат по алгебре. В нем он вводит бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных степеней неизвестного и определяет правила действия с ними. Для отрицательных чисел здесь формулируется не только правило умножения, как это было у Диофанта, но и правила их сложения и вычитания. В этом трактате аль-Караджи определяет по существу алгебру как науку о решении уравнений, не делая различий между определенными и неопределенными уравнениями. При решении задач он также чередует неопределенные задачи с определенными, причем последних у него больше, чем в «Арифметике» Диофанта.

Отметим, что ни у одного из арабских математиков IX—X вв. мы не находим попыток решить уравнение 3-й степени в радикалах. Впоследствии Омар Хайям (XI в.) находил корни таких уравнений как абсциссы точек пересечения конических сечений. Отметим также, что арабские математики по традиции наряду с «числовым» решением квадратного уравнения приводили и геометрическое обоснование этого решения. Однако у аль-Караджи имеется и чисто алгебраическое обоснование, основанное на выделении полного квадрата, которое он называет «решением по Диофанту».

Единственным, но весьма существенным отступлением арабских математиков от принципов Диофанта был отказ от алгебраической символики. Неизвестное и его степени они записывали с помощью специальных терминов.

Успехи алгебры в Европе относятся к XIII—XVI вв. Алгебраическая традиция передавалась двумя путями: из стран арабского Востока и из Византии. Первым крупным математиком был Леонардо Пизанский, или Фибоначчи (XIII в.), который оставил знаменитую «Книгу абака», в которой вводил десятичную позиционную систему счисления, решал линейные системы и квадратные уравнения. Ему же принадлежит очень глубокое исследование неопределенных уравнений, которое он изложил в «Книге квадратов» (1225 г.). Чтобы дать представление об этих исследованиях, достаточно упомянуть, что он первый и за четыре века до Ферма утверждал, что площадь прямоугольного треугольника с рациональными сторонами не может быть квадратом. Это предложение эквивалентно Великой теореме Ферма для случая $n=4$. Однако для трактовки неопределенных задач Леонардо не применял алгебраических методов, он решал их чисто арифметически. То же самое можно сказать и о книге Луки Пачоли «Сумма ⟨знаний⟩ по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциям» (опубликована в 1494 г. в Венеции), которая явилась энциклопедией математических знаний своего времени. В этой книге мы впервые встречаем постановку проблемы решения алгебраических уравнений 3-й степени и высших степеней в радикалах. Правда, Лука говорит о них как о задачах неразрешимых, таких же, как квадратура круга.

К моменту выхода «Суммы» европейские математики уже широко применяли символы для обозначения неизвестного и его положитель-

ных степеней, а также для операций сложения, вычитания, умножения и извлечения корня. Правда, они восприняли византийский метод обозначения степеней, который был гораздо менее удобен, чем способ Диофанта. В основе его лежал мультипликативный принцип: квадрато-куб обозначал не 5-ю степень, как у Диофанта, а 6-ю. 5-я степень обозначалась как p^0r^0 — primo relato (т. е. «первая невыразимая»), 7-я — как $2^0\ r^0$ — secundo relato («вторая невыразимая»). 9-я степень называлась кубо-кубом и т. д. Таблицу такого обозначения степеней неизвестного мы находим в «Сумме». Однако вплоть до конца XVI в. не были введены ни обозначения для второго неизвестного, ни тем более для параметров.

Особые успехи выпали на долю алгебры в XVI в. Важнейшими из них были: 1) решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени, 2) введение комплексных чисел и 3) создание первого буквенного исчисления.

Итак, проблема решения уравнений в радикалах появляется в XVI в. после перерыва более чем в 30 веков! За все это время побудительные импульсы шли в основном от неопределенных уравнений. Посмотрим, какое влияние они оказали на алгебру XVI в.

Мы не будем здесь касаться драматической истории, связанной с решением кубического уравнения. Об этом достаточно написано во всех руководствах по истории математики [3]. Приведем лишь оценку этого решения, данную Г. Г. Цейтеном: «Дело здесь идет, таким образом, вовсе не об изобретении метода, но об открытии — именно открытии — формы иррациональности, которую должны иметь корни упомянутых уравнений» [4, с. 89]. Какое же непосредственное влияние на развитие алгебры имело это открытие? Прежде всего следует отметить его большое психологическое значение. Оно показало, что «древние не все знали», укрепило веру европейских ученых в свои силы, придало им смелость, необходимую для дальнейших изысканий. Вскоре исследование уравнения

$$x^3=px+q; \quad p>0, \quad q>0, \tag{13}$$

решение которых дается формулой

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{14}$$

доставило случай применить эту смелость. Действительно, если $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$, то в формуле (14) под знаком квадратных корней будет стоять отрицательное выражение $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3$. С другой стороны, нельзя было наложить ограничение $\left(\frac{q}{2}\right)^2\geqslant\left(\frac{p}{3}\right)^3$, так как при $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$ уравнение (13) имеет действительные корни. Математики XVI в. обнаружили этот факт на примере уравнения $x^3=15x+4$, которое имеет корень $x=4$, причем и два других его корня действительны. Этот случай получил название «неприводимого». Ни Тарталья, ни Кардано, которым мы обязаны решением кубического уравнения, не смогли разрешить загадку «неприводимого» случая. Разгадку его смог дать только Рафаэль Бомбелли — один из величайших алгебраистов Нового времени. Однако он смог это сделать лишь после того, как основательно изучил «Арифметику» Диофанта.

Мы подошли к величайшему событию в истории алгебры Нового времени, которое обычно недооценивается — к знакомству европейских математиков с «Арифметикой» Диофанта. Решительный поворот в раз-

[3] См., например [4, 5].

витии алгебры произошел именно в результате изучения этого замечательного произведения и освоения методов Диофанта. Впервые 143 задачи из «Арифметики» (всего она содержала 189 задач) появились в «Алгебре» Р. Бомбелли (1572 г.). Но дело было не только в этом «включении» задач. Итальянский историк науки Э. Бортолотти, изучавший рукописное наследие Бомбелли, заметил, что после знакомства с «Арифметикой» весь стиль книги Бомбелли изменился: задачи с «условием» в виде красочного рассказа псевдопрактического характера были заменены на задачи с сухими математическими формулировками, изменены обозначения степеней неизвестного в духе Диофанта; наконец, новые объекты — отрицательные и мнимые числа — были введены с помощью метода Диофанта. А именно: для введения отрицательных чисел Бомбелли определил для них правила сложения, вычитания, умножения и деления. После этого он сделал следующий шаг, замечательный по своей смелости, — он ввел с помощью такого же приема и мнимые числа! Если мы, чтобы не утруждать читателя непривычной символикой, обозначим, как это теперь принято, мнимую единицу через i, то правила умножения, сформулированные Бомбелли, можно записать так:

$$i \times i = -1, \quad 1 \times i = i,$$
$$(-i) \times i = 1, \quad -1 \times i = -i.$$

Таким образом, Р. Бомбелли понял сущность метода введения новых математических объектов и блестяще применил этот метод.

Введя мнимую единицу i, Бомбелли начал рассматривать символы вида $a+bi$, которые можно складывать и вычитать «покоординатно», т. е.

$$(a+bi) \pm (c+di) = a \pm c + (b \pm d)\, i,$$

и умножать по правилу перемножения многочленов. По словам Н. Бурбаки, «это было первым появлением понятия линейной независимости». С помощью мнимых чисел Бомбелли сумел объяснить «неприводимый случай» кубического уравнения, который до этого ставил всех математиков в тупик. Книга Бомбелли, несомненно, является блестящим трактатом по алгебре.

Третья часть «Алгебры» посвящена неопределенным уравнениям. Здесь Бомбелли воспроизводит задачи Диофанта, иногда меняя числовые параметры: он довел до конца многие задачи, решение которых было только намечено Диофантом или вовсе отсутствовало. Из решений видно, что Бомбелли хорошо понял методы Диофанта, относящиеся к неопределенным уравнениям, однако он нигде не делает попытки обобщить эти методы. Так, он первый решил задачу Диофанта

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$$

при $a=4$, $b=3$, но не исследовал возможность ее решения при других значениях a и b.

Резюмируя, можно сказать, что хотя методы и даже обозначения Бомбелли сложились под влиянием «Арифметики» Диофанта, но интересы самого Бомбелли были связаны скорее с проблемой решения уравнений в радикалах.

Рассматриваемый период в развитии алгебры нашел завершение в творчестве Франсуа Виета (1540—1603) — величайшего алгебраиста Нового времени. Со времен Диофанта математики совершенствовали обозначения для неизвестного и его степеней. Бомбелли ввел символы для любых целых положительных степеней в виде однородной последовательности ^{1}, ^{2}, ^{3} ... Обозначения степеней ставились вверху справа при соответствующем коэффициенте, например x^3+5x записывалось как $1^3\tilde{p}5^1$. Симон Стевин ввел аналогичные обозначения для степеней вто-

рого, третьего неизвестного. Однако никому не приходило в голову ввести обозначения для произвольных параметров. Задумав построить «аналитическое искусство» (так Виет именовал алгебру, чтобы не вводить чуждых латыни слов), которое обладало бы строгостью и глубиной геометрии древних и одновременно эффективностью и оперативностью алгебры, с тем, чтобы не осталось нерешенных проблем (nullum non problema solvere), Виет построил первое буквенное исчисление. А именно: он предложил обозначать гласными буквами неизвестные, а согласными — известные произвольные величины (параметры). Приняв, кроме того, коссические знаки + и — для операций сложения и вычитания, а главное, приняв правило открытия скобок и правило подстановки вместо любой буквы выражения, полученного из букв при помощи правил операций, он получил возможность *записывать* и *выводить формулы*. Нам сейчас трудно представить, что до Виета *математика существовала без формул*, что все выкладки, которые мы сейчас проделываем чисто *механически*, нужно было делать в уме. Но это так. Только благодаря Виету мы можем теперь заменять некоторые рассуждения выкладками.

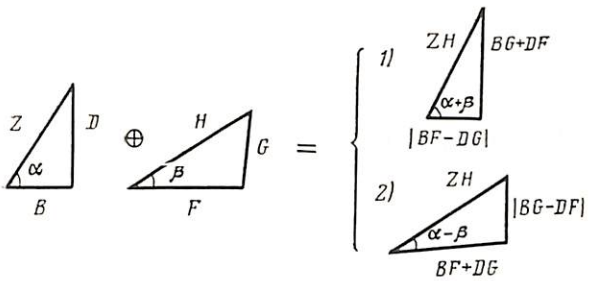
Первым по-настоящему оценил нововведение Виета Г. В. Лейбниц. Около 100 лет спустя он писал, что при удачном выборе символики «удивительным образом сокращается работа мысли» (из письма 1678 г. к Чирнгаузену). Сам Лейбниц тщательно продумывал все вводимые им обозначения. Он ввел символы для дифференциала и интеграла и построил первое после Виета исчисление, а именно дифференциальное и интегральное. Ему же принадлежит двойная индексация коэффициентов линейных уравнений. Лейбниц мечтал и о создании «анализа идей», во многом предвосхитив алгебру логики. Таким образом, Виет положил начало созданию различных исчислений, которые преобразовали весь облик математики и сделали возможным применение числовых машин. Можно утверждать, что широкое применение исчислений является одной из характерных черт современной математики в отличие от античной.

Исчисление Виета еще отличалось от принятого теперь в алгебре. Дело в том, что Виет, следуя принципам геометрической алгебры, учитывал размерность величин: складывать и вычитать можно было только величины одной размерности, при умножении размерности складывались, а при делении — вычитались. Современный вид буквенному исчислению был придан Рене Декартом (1596—1650).

Если мы теперь обратимся к сочинениям Виета, то увидим, что прежде всего он применил свое исчисление к трактовке неопределенных уравнений. В своей «Зететике» (особенно книги IV и V) он систематически алгебраизировал методы Диофанта и обобщил многие его задачи. Замечательно, что Виет, так же как Р. Бомбелли, ввел исчисление некоторых новых объектов, точнее, он построил исчисление треугольников, эквивалентное умножению комплексных чисел. Оно основывалось на формуле композиции (11) и носило название «Порождение треугольников» («Genesis triangulorum»). Пусть даны два прямоугольных треугольника со сторонами B, D, Z и F, G, H, причем первой буквой обозначено основание, а последней — гипотенуза (рис. 2). Результирующий треугольник должен был иметь гипотенузу, равную произведению гипотенуз ZH, а катеты его должны были рационально выражаться через катеты составляемых треугольников. Но по формуле (11):

$$Z^2H^2 = (B^2 + D^2)(F^2 + G^2) = (BF - DG)^2 + (BG + DF)^2 = \\ = (BF + DG)^2 + (BG - DF)^2.$$

Т. е. в результате композиции могут получиться два прямоугольных треугольника: первый — со сторонами $|BF-DG|$, $BG+DF$, ZH — и второй — со сторонами $BF+DG$, $|BG-DF|$, ZH. Виет замечает, что острый



угол при основании первого треугольника равен сумме острых углов при основаниях у компонируемых треугольников, а у второго — их разности. Если мы сопоставим каждому прямоугольному треугольнику комплексное число, первому — число $B+Di$, а второму — число $F+Gi$, тогда первый треугольник, полученный путем композиции, будет отвечать произведению чисел $(B+Di)(F+Gi)$, а второй — произведению первого числа на сопряженное ко второму — $(B+Di)(F-Gi)$. Но эти же треугольники можно характеризовать заданием гипотенузы и острого угла при основании. Первый треугольник можно условно записать как (Z, α), где α — острый угол при основании, а второй — соответственно (H, β). Тогда первый треугольник, полученный при композиции, будет $(ZH, \alpha+\beta)$, а второй — $(ZH, \alpha-\beta)$. Таким образом, построенное Виетом исчисление сразу же позволило обнаружить важнейшее свойство комплексных чисел: при умножении их модули перемножаются, а аргументы — складываются. Далее, Виет компонировал первый треугольник с собой, а затем последовательно с треугольниками, получаемыми путем композиции, и получал, таким образом, ряд треугольников: $(Z^2, 2\alpha)$, $(Z^3, 3\alpha)$ и т. д. Это дало ему возможность вывести формулу, которая впоследствии получила имя формулы Муавра.

$$[z(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^m=z^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi).$$

С помощью этой формулы Виет получал выражения синусов и косинусов кратных дуг в виде многочленов от синусов и косинусов.

Сравним комплексные числа-символы Бомбелли с исчислением треугольников Виета. Обе эти системы имели свои достоинства и свои недостатки: числа-символы Бомбелли были удобны для производства четырех действий арифметики; по современной терминологии, они составляли поле, т. е. определенные для них два закона композиции обладали теми же «хорошими» свойствами, как и сложение и умножение рациональных чисел. Однако они не имели «тригонометрической формы», т. е. с ними не связывались понятия аргумента и модуля. Поэтому они были неудобны для выполнения операции извлечения корня, а также для приложений к тригонометрии. Исчисление треугольников Виета допускало и алгебраическую, и тригонометрическую интерпретацию, поэтому оно сразу же было применено для получения ключевых формул тригонометрии. Виет пользовался им и при решении неопределенных уравнений. Однако это исчисление было малооперативным, над треугольниками был определен только один закон композиции (отвечающий умножению), короче, оно было построено еще в духе античной математики. Поэтому при дальнейшем развитии математики Нового времени предпочтение было отдано числам-символам Бомбелли. В XVIII в. они получили тригонометрическую интерпретацию, а в прошлом веке, особенно после того как Гаусс построил арифметику комплексных чисел, они приобрели полные права гражданства.

Итак, на протяжении всего третьего этапа развития алгебры основную роль играли задачи неопределенного анализа, и только в конце его заметное влияние приобрели исследования определенных уравнений.

Четвертый этап истории алгебры начинается с 30-х годов XVII в. и

продолжается до 70-х годов XVIII в. В это время математики прилагают усилия для решения уравнения 5-й степени и высших степеней в радикалах. Такие попытки мы находим у Эйлера, Безу, Варинга и многих других. Одновременно внимание привлекает основная теорема алгебры, утверждающая, что всякий многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители 1-й и 2-й степени. Различные ее доказательства были предложены Даламбером, Эйлером, Лагранжем, Лапласом и, наконец, Гауссом, который предложил четыре ее доказательства. В связи с этим развивается учение о симметрических функциях и рациональных функциях корней уравнения, остающихся неизменными при тех или иных подстановках корней. Все это подготавливало почву для будущей теории Галуа. Неопределенные уравнения хотя и продолжают по традиции рассматриваться в алгебре (весь второй том «Введения в алгебру» Эйлера посвящен неопределенному анализу), но, по существу, благодаря работам Ферма и Эйлера они сливаются с теорией чисел. С этого времени трудно различить импульсы, идущие от неопределенных уравнений как таковых, от импульсов, порождаемых теорией чисел. Исключение составляет, пожалуй, только Великая теорема Ферма. Уже доказательство ее для случая $n=3$, т. е. доказательство неразрешимости уравнения $x^3+y^3=z^3$ в целых числах (а значит, благодаря однородности уравнения — и в рациональных числах) потребовало расширения понятия целого числа, а именно перенесения понятия целого на выражения вида $m+n\sqrt{-3}$, где m, n — целые рациональные.

Пятый этап в развитии алгебры — от 70-х годов XVIII до 70-х годов XIX в., казалось, весь прошел под знаком проблемы решения уравнений в радикалах. Достаточно напомнить о фундаментальных исследованиях Ж. Л. Лагранжа, К. Ф. Гаусса, Н. Г. Абеля и Э. Галуа, которые привели к введению таких важнейших понятий, как поле, группа, нормальный делитель, разрешимая группа и т. п. Но и здесь имеется другая линия развития, связанная с Великой теоремой Ферма, теорией квадратичных форм и законами взаимности. Для исследования этих проблем оказалось необходимым расширить понятие целого рационального числа до числа целого алгебраического, построить арифметику полей алгебраических чисел, что привело в свою очередь к введению понятий кольца, модуля и идеала. Все эти понятия являются фундаментальными в современной алгебре и применяются за ее пределами.

После 70-х годов прошлого века проблема решения уравнений в радикалах потеряла свое былое значение. Алгебра постепенно преобразовалась в науку о законах композиции, определенных для произвольных множеств объектов произвольной природы. И с современной точки зрения сама проблема решения уравнений в радикалах имеет несравненно меньшее значение, чем понятия группы и поля, которым она дала жизнь. Иначе обстоит дело с учением о неопределенных уравнениях. Это учение слилось в нынешнем веке с алгебраической геометрией, с одной стороны, и с теорией чисел — с другой. Роль их в истории математики далеко еще не исчерпана.

Литература

1. *Курош А. Г., Шмидт О. Ю.* Алгебра.— БСЭ, т. 2. М., 1950.
2. *Serret J. A.* Cours-d'Algebre superieure. P., 1885.
3. *Диофант.* Арифметика. М., 1974.
4. *Цейтен Г. Г.* История математики в XVII—XVIII веках. М.— Л., 1933.
5. *Демидов С. С.* У истоков современной алгебры. М., 1971.

INDEFINITE EQUATIONS AND THEIR IMPORTANCE FOR THE DEVELOPMENT OF ALGEBRA

I. G. BASHMAKOVA

The problem of the influence of the diophant analysis ideas an the process of formation and development of algebra is considered.