зывают всю современную математику от элементарных арифметики и геометрии до самых возвышенных нынешних теорий. Эта аксиома «стала привычной для любого работающего математика» (Ю. И. Манин, [7, с. 53]), а рассуждения, проводимые, например, в рамках аксиоматической системы теории множеств Цермело — Френкеля, включающей ее, «удовлетворяют требованиям» „строгости" современной математики» (Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, [8, с. 99]).

В заключение немного о нематическом слове «метаморфоза». Оно довольно расплывчато, и математики им не пользуются, применяя в описанных ситуациях кажущийся точным (однозначным) термин «эквивалент». Однако, быть может, именно первый из этих терминов лучше выражает существо дела.

Действительно, в настоящее время образцом математической строгости является жесткое формально-дедуктивное построение соответствующей теории. В частности, два утверждения считаются эквивалентными, если одно из них может быть получено из другого и обратно в рамках некоторой аксиоматической конструкции. Это же относится и к аксиоме выбора. Но сейчас имеется много довольно различных аксиоматических теорий множеств, и априори не исключена возможность эквивалентности двух утверждений в пределах одной аксиоматизированной теории и их неэквивалентности в другой. В последние годы такая априорная возможность стала реальностью: исследованиями Р. Говарда, А. Рабина и Ж. Рабина (1977—1978 гг.) обнаружено, что некоторые формы аксиомы выбора как для множеств, так и для классов оказались невыводимыми друг из друга, а формулировки, считавшиеся ранее эквивалентными, не оказались таковыми в разных аксиоматических теориях множеств. Но тем самым термин «эквивалент аксиомы выбора» теряет вкладывавшийся в него ранее однозначный смысл, становится расплывчатым.

Литература

1. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
3. *Лузин Н. Н.* Современное состояние теории функций действительного переменного.— Собр. соч., т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
4. *Лузин Н. Н.* Мемуар об аналитических множествах.— Там же.
5. *Лузин Н. Н.* О строении измеримых функций. – Собр. соч., т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
6. *Александров П. С.* Лузинская математическая школа.— Математика в школе, 1977, № 5.
7. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. М.: Сов. радио, 1979.
8. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1979.

ТРИГОНОМЕТРИЯ АН-НАСАВИ

Н. Г. ХАЙРЕТДИНОВА (Егорьевск)

Абу-л-Хасан'Али ибн Ахмад ан-Насави (970—1070), уроженец г. Насы, вблизи нынешнего Ашхабада, ученик Кушияра ал-Джили, работал при дворе буидских султанов в Рее или Исфагане, а после завоевания Ирана Махмудом Газневи — при его дворе в Газне.

Ан-Насави принадлежит тригонометрический трактат «Книга насыщения комментариями о теореме о секущих» (Китāб а-ишбā‘ фӣ шарх шакл ал-китā‘). Теорема о секущих — это теорема Менелая о полном четырехстороннике, доказанная Менелаем Александрийским в его «Сферике» [1, с. 289]. Ее применял Птолемей в своем «Алмагесте» для решения задач сферической тригонометрии [2].

Рукопись трактата, переписанная в 1230 г., хранится в Лейденской университетской библиотеке (№ 556/4, 24 л.) [3].

«Книга насыщения» состоит из трех разделов:

1) о предпосылках и комментариях к предложениям, в которых Птолемей определяет хорды, вписанные в круг, с помощью предложений и доказательств Евклида;

2) о вводных предложениях и замечаниях, которые у Птолемея связаны с теоремой о секущих, о разъяснении составного отношения и его применении;

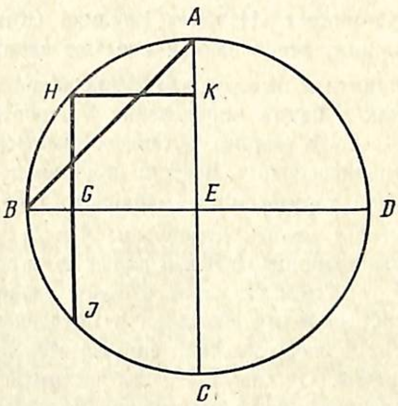
3) о применении теоремы о секущих.

Трактат ан-Насави, представляющий собой довольно подробные разъяснения к тригонометрической части «Алмагеста» Птолемея, изучался О. Ширмером в статье «Исследования по астрономии арабов» (1926) [4, с. 80—85]. Однако его рукопись дошла до нас в плохом состоянии, поэтому О. Ширмер ограничился переводом предисловия. Нам же удалось разобрать также некоторые другие ее фрагменты.

Заметим, что тригонометрические разделы астрономических трудов среднеазиатских философов Абу Насра ал-Фараби (870—950) и Абу‘Али Ибн Сины (980—1037), являющихся частями «Комментариев» к «Алмагесту» (Шарх ал-Маджисти) ал-Фараби и «Изложения» великой книги Птолемея, охватывающего «Алмагест» и «Науку астрономии» (Джавāмu‘китāб Битлимийус ал-кабūр ал-ма‘мūл Маджистū ва ‘илм ал-хай’а), входящего в состав его энциклопедического трактата «Книга исцеления» (Китāб аш-Шифā‘), изучались нами ранее [5, с. 29—31].

Указанные труды упоминаются в трактате ан-Насави и, наш взгляд, оказали влияние на его содержание.

Так же, как Ибн Сина и ал-Фараби, ан-Насави в первом разделе приводит определение синуса. Он говорит: «Всякая прямая, проведенная под прямым углом к диаметру и пересекающая линию круга, является синусом, соответствующим дуге, которая отсекается от половины круга, т. е. это хорда, которую Птолемей называл половиной хорды удвоенной дуги, ал-Баттани называл ее половинной хорды, ал-Джа‘фар ибн ал-Хазин называл ее синусом» [3, л. 43].



У ан-Насави мы встречаем новые названия тригонометрических линий [3, л. 42—43]. Определяя тригонометрические линии в круге, ан-Насави называет линию синуса «первым синусом» (джūб ал-аввал) и «плоским синусом» (Ибн Сина и ал-Фараби называли ее синусом), а линию синуса-версуса — «обращенным синусом», линию же косинуса — «вторым синусом» (джūб ас-сāнū) и «синусом дополнения» (джūб ат-тамāм).

Ан-Насави пишмт: «$ABCD$ — круг. Диаметры AC и BD пересекаются в E... Проведем линию HK, перпендикулярную к диаметру AC. HG — первый синус, HK — второй синус, т. е. синус дополнения дуги BH». Заметим, что в трактате ан-Насави, так же как у Ибн Сина и ал-Фараби, линии тангенса и котангенса не встречаются.

В первом разделе своего трактата ан-Насави, так же как ал-Фараби и Ибн Сина, делит отрезки в среднем и крайнем отношении и приводит задачи на отыскание хорды 1/6, 1/10 и 1/5 круга [3, л. 43 об.]. При этом он, так же как ал-Фараби и Ибн Сина, пользуется первым переложением XIII книги «Начал» Евклида о том, что апофема вписанного пятиугольника равна полусумме сторон вписанного десятиугольника и шестиугольника. Затем ан-Насави приводит доказательство так называемой «теоремы Птолемея» о том, что для вписанного четырехугольника, сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей [3. л. 46]. На основании «теоремы Птолемея» ан-Насави приводит задачу на отыскание стороны вписанного четырехугольника, опирающегося на известный диаметр по диагонали и стороне [3, л. 47].

Указанные теоремы имеются у ал-Фараби и Ибн Сины.

Много места ан-Насави отводит теореме о секущих, называя ее «ключом для решения многих задач астрономии». Во втором разделе он приводит доказательство плоской теоремы о секущих. Его доказательство не отличается от птолемеевского, но в отличие от него, а также от ал-Фараби и Ибн Сины ан-Насави говорит о двенадцати видах фигур секущих. Он приводит двенадцать видов составных отношений, соответствующих двенадцати видам плоских фигур секущих [3, л. 53]. Отметим, что впервые двенадцать видов фигур секущих мы встречаем в трактате ас-Сиджизи «Трактат о получении согласования двенадцати составных отношений, относящихся к плоской фигуре секущих» [6].

Для доказательства сферической теоремы о секущих в своем трактате «Книга насыщения» ан-Насави приводит шесть предпосылок — все предпосылки Менелая и Птолемея и одну предпосылку, встречающуюся только у ал-Фараби и Ибн Сины. Это задача об определении дуг по их разности и отношению синусов этих дуг (случай, когда хорда разности дуг параллельна диаметру) [3, л. 56 об.]. Все предпосылки доказаны ан-Насави очень подробно со ссылками на Евклида и Птолемея. Ан-Насави называет эти предпосылки «специальными». Сферическая теорема о секущих приведена у ан-Насави в трех вариантах, так же как у Менелая, ал-Фараби и Ибн Сины, ее доказательство сводится к приведению сферической фигуры секущих к плоской фигуре секущих и применению теоремы Менелая к плоской фигуре секущих [3, л. 57—58]. В предисловии к трактату ан-Насави характеризует сферическую теорему о секущих следующим образом: «Птолемей рассматривал пятое предложение второй книги Менелая „О фигурах на сфере" („Сферика"). Это предложение, известное под названием „теорема о секущих", является ключом к его пропорциям и основой для правильности доказательства его задач. Я не знаю среди геометрических пропорций ни одной, которой люди занимались столь же интенсивно, как этой. Значение этой предпосылки легко понять, если знать, насколько многочисленны ее применения в науке о сфере. Это принцип, на котором основаны многие астрономические задачи» [3, л. 41 об.].

На л. 53 об. «Книги насыщения» ан-Насави имеется плохо сохранившееся определение составного отношения. Судя по тому, что перед этим определением ан-Насави упоминает «Начала» Евклида (Китāб ал-усӯл), «Алмагест» Птолемея и комментарии к ним, вслед за чем следуют слова микдāр ан-нисба — «величина отношения», можно прийти к выводу, что в оригинале трактата составное отношение определялось так же, как в пятом определении VI книги «Начал» и в комментариях Теона к «Алмагесту». В своей теории составных отношений ан-Насави в отличие от других математиков средневекового Востока применяет при описании составного отношения арифметический термин мисл — «равно», дарб — «умножение», кисма — «деление». Вместо того чтобы сказать «отношение A к B составлено из отношений C к D и E к F, он говорит, что «отношение A к B равно двум отношениям C к D и E к F» [3, л. 59].

В третьей главе второго раздела «Книги насыщения», озаглавленной «О случаях составления отношения и определения неизвестных из них» ан-Насави после приведения доказательства теоремы Менелая еще раз возвращается к теории составных отношений. Он отмечает, что рассмотренное ранее представляет собой предпосылки к теории составного отношения. Затем он пишет: «Каждые три величины составляют отношение. Примем одну из них за промежуточную между двумя остальными. Поэтому если отношение одной из двух остальных к другой составлено из отношения первой к промежуточной и из отношения промежуточной к другой из оставшихся, например, три величины A, B, C, промежуточная между A и B есть C. Тогда я утверждаю, и это нетрудно доказать, что отношение A к B составлено из отношения A к C и из отношения C к B [3, л. 58 об.], а также: Если умножим отношение C к D на отношение E к F, получим произведение отношения A к B, так как отношение A к B составлено из отношения C к D и из отношения E к F... Если разделим отношение A к B на отношение C к D, то частное от деления — отношение E к F, так как если умножим отношение C к D на отношение E к F, то их произведение — отношение A к B. Если разделим отношение A к B на отношение C к D, то частное от деления — отношение E к F. Если разделим [отношение A к B] на отношение E к F, то частное от деления — отношение C к D [3, л. 60 об.].

Ан-Насави далее решает задачи на определение неизвестных в составном отношении при помощи промежуточной величины между двумя величинами, определение одного из отношений в составном отношении, если два из них известны, составление отношения, отыскания одной величины в составном отношении из двух отношений, если пять из них известны. В каждом случае ан-Насави приводит числовые примеры. Особенно подробно ан-Насави разбирает последнюю из перечисленных нами задач.

Таким образом, мы видим, что в трактате ан-Насави, так же как у ал-Фараби и Ибн Сины, разъяснена сущность составного отношения и дается довольно развитой аппарат теории составных отношений, необходимый для решения задач сферической тригонометрии и астрономии.

В предисловии ан-Насави пишет: «К этому предложению (здесь имеется в виду теорема о секущих) Птолемей делает вводные замечания, относящиеся к составлению отношений, поэтому я снабдил это предложение и предпосылки исчерпывающим комментарием» [3, л. 41 об.].

В третьем разделе «Книги насыщения» ан-Насави рассматривает несколько астрономических задач, в которых применяет рассмотренные им предпосылки.

Литература

1. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Наука, 1961.
2. *Ptolemäus C.* Handbuch der Astronomie, Übers. K. Manitius, Vorwort und Berichte von O. Neugebauer, B. 1, Lpz, 1963.
3. *Ан-Насавӣ Алӣ.* Кита̄б ал-ишба̄ фӣ шарх̣ шакл ал-кит̣а‘, рукопись Лейденской университетской библиотеки, № 556/4.
4. *Schirmer O.* Studien zur Astronomie der Araber Sitzungsber. phys.-med. Sozietät, Erlangen, 1926, № 58.
5. *Хайретдинова Н. Г.* Тригонометрия в трудах ал-Фараби и Ибн Сины.— Вопросы истории естествознания и техники, 1969, вып. 3 (28).
6. *Ас-Сиджизӣ ‘Абд ал-Джалӣл.* Рисӓла фӣ тахсӣл ика‘ан-нисба ал-му’аллафа ал-ис̣най ‘ашара фӣ шакл ал-кит̣а̄ ‘ал-мус̣ат̣т̣аха̄. Рукопись Лейденской университетской библиотеки, № 168/3.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ САБИТА ИБН КОРРЫ В БИБЛИОТЕКЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Г. Е. КУРТИК, Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

В каталогах латинских рукописей, хранящихся в Библиотеке Академии наук СССР, сочинения известного багдадского астронома Сабита ибн Корры (836—901 гг.) упоминаются дважды: в описании рукописей XVI—XVII вв. указана рукопись Q 537, л. 26—38 об. [1, с. 106], а в описании рукописей X—XV вв. указана рукопись F 8, л. 18—21 об. [2, с. 118]. Первая рукопись озаглавлена «О составлении изображений» (De imaginum compositione) и снабжена характерным пояснением «Книга фокусов (или обманов) Сабита ибн Корры, мужа ученого и в волшебствах опытнейшего» (Liber praestigiorum Thebit Benchorat viri sapientis et in Magicis expertissimi). Эта книга под приведенным названием известна как перевод Аделарда из Бата (XII в.) не сохранившегося на арабском трактате Сабита ибн Корры. Чаще встречается, однако, под названием «Об изображениях» (De imaginibus) другой перевод этого произведения, выполненный Иоанном Севильским (XII в.) и изданный по нескольким западноевропейским рукописям Ф. Дж. Кармоди [3, с. 180—194]. В трактате описаны правила изготовления и применения магических статуэток для заклинаний, целью которых являлось, например, разыскание потерянной вещи, достижение успеха в каком-нибудь предприятии, внушение любви или ненависти между двумя людьми и т. д. Магическая часть трактата теснейшим образом переплетается с астрологией.

Значительно более интересна вторая рукопись. В описании [2] утверждается, что в ней имеются два трактата Сабита: на л. 18—18 об. «Об уравнениях» (De equationibus), а на л. 19—21 об. «О движении восьмой сферы» (De motu octave spere). М. А. Шангин, давший первое описание рукописи F8 [4], рассматривал только л. 19—21 об. этой рукописи, также считая ее единым трактатом, а л. 18—18 об. он, по-видимому, считал текстом, не представляющим интереса.

Исследование л. 18—21 об. рукописи F 8 показало, что на самом деле здесь помещены не два, а три трактата Сабита, однако листы рукописи при ее переплете были переставлены, чем и объясняется ошибка тех, кто описывал эту рукопись. На л. 19, 19 об. и 18 (в таком порядке!) помещен трактат Сабита «О движении восьмой сферы»,