

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНЕМ КИТАЕ

А. П. ЮШКЕВИЧ

История математики в странах Востока привлекает в наше время все большее внимание. Достижения здесь весьма значительны и коренным образом меняют представления, широко распространенные сравнительно недавно. Впечатляющие успехи были достигнуты в изучении математики Китая первых 14 столетий н. э.—времени, от которого сохранились достоверные первоисточники. Главные результаты были получены за последние четверть века. Правда, в самом Китае работы шли нарастающим темпом уже с 20-х годов, но они некоторое время оставались неизвестными за его пределами.

Вплоть до начала XX в. сведения почти всех европейских историков математики в рассматриваемой области были очень отрывочны и во многом ошибочны. Китайская литература вопроса была им недоступна, и приходилось довольствоваться тем немногим, что сообщали Э. Бю (ряд работ, начиная с 1835 г.), а также К. Л. Бернацкий, который в 1856 г. напечатал неточный немецкий перевод хорошей, но очень далекой от полноты английской статьи А. Уайли (A. Wylie), опубликованной в 1852 г. в одном практически недоступном периодическом издании, выходившем в Китае. Неудивительно, что глава о математике Китая в I томе некогда наиболее авторитетного и полного труда по общей истории математики, вышедшего на рубеже XIX и XX вв., известных «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik» М. Кантора (Лейпциг, 1-е изд., 1880; 3-е изд., 1907) является ныне совершенно устарелой. Первым серьезным трудом в этой области явилась книга «The Development of Mathematics in China and Japan» (Лейпциг, 1913) японского ученого И. Миками, который изучил ряд первоисточников и другую китайскую литературу. Книга Миками была гораздо основательнее статьи Уайли, хотя содержала неясности и даже ошибки; ее использовал в своей двухтомной «History of Mathematics» (Нью-Йорк, 1925) Д. Ю. Смит. Миками принадлежит, кроме того, еще 20 статей о математике и астрономии в Китае и Японии, напечатанных в 1905—1914 гг.¹

Почти одновременно с Миками, в 1911—1939 гг., опубликовал 16 статей по разным вопросам древнекитайской математики также владевший китайским языком миссионер Л. ван Хе (L. van Hée). Статьи ван Хе, написанные по-французски, содержали полезные сведения и небольшие переводы отдельных китайских текстов. Однако его общая концепция была пристрастной и ошибочной. По мнению ван Хе, китайские математики не были способны к оригинальным исследованиям и свои основные знания заимствовали извне. Труды ван Хе, к которым некоторые европейские математики относились с тем большим доверием, что он читал и цитировал оригинальные тексты, оказали в целом отрицательное влияние на изложение вопроса в I томе «Storia della matematica» (Милан, 1929; 2-е изд., 1950) Дж. Лориа, в первом издании I части «Geschichte der Mathematik» (Берлин, 1953) И. Э. Гофмана (во 2-м изд. 1963 г. Гофман существенно расширил и уточнил соответствующий раздел) и некоторых других книг. Пренебрежительное отношение к достижениям математиков древнего Китая встречается и в некоторых более поздних сводных трудах. Например, о них нет ни слова в объемистом сочинении (1238 страниц) «Mathematical Thought from Ancient to Modern Times» (Нью-Йорк, 1972) М. Клайна.

¹ В «Литературе» к данной статье приведены только наиболее важные работы на европейских языках начиная с 1955 г. Весьма полная библиография всех работ о математике Китая, вышедших с 1800 до 1957 г., имеется в [9]: дополнения к ней вплоть до 1972 г. есть в [28], а еще за несколько последующих лет — в [21] и [22], где указаны и работы на русском языке.

Важным для дальнейших изысканий в данной области стало возникновение школы историков математики в самом Китае, занявшейся изучением истории математики в своей стране. Первыми выступили Ли Янь в 1917 г. и Цянь Баоцзун в 1921 г.; за ними последовали Сюй Чуньфан (в 1935 г.) и многие другие. О количественном объеме исследований этой школы можно судить хотя бы по тому, что уже к 1949 г. она опубликовала около 240 статей по различным частным вопросам, обобщающих книг, а также критических изданий многих первоисточников. Из сводных трудов особо следует назвать «Историю математики в Китае» (Шанхай, 1937) и два тома «Общего обзора китайской математики» (Пекин, 1959) Ли Яня (их существенно дополняют пять томов собрания его статей, Пекин, 1954—1955), а также «Историю китайской математики» (ч. I, Пекин, 1932; полное издание, Пекин, 1963) Цянь Баоцзуна. Последнему принадлежит также критическое издание (1963) сборника математических трактатов, называемого по-русски «Десятикнижие», — главного источника наших знаний о математике в Китае до начала VII в. Все эти труды имели важное значение для успешного изучения вопроса.

С середины 50-х годов начался быстрый подъем изысканий в Европе, основанных на изучении оригинальных текстов и привлечении китайской исторической литературы. В 1955 г. работавший несколько лет в Кембридже китайский историк математики Ван Лин в сотрудничестве с английским биологом и синологом Дж Нидемом впервые дал детальный и глубокий разбор способа извлечения квадратного и кубического корней [1], лаконически описанного в классической «Математике в девяти книгах», дошедшей до нас в редакции ее комментатора III в. Лю Хуэя, но составленной в промежутке между II в. до н. э. и I в. до н. э. Этот учебный трактат, содержащий только тексты 246 арифметических, алгебраических и геометрических задач, сжато высказанные правила их решения и числовые ответы, является ключевым в развитии древнекитайской математики. Он несомненно содержал результаты, накопленные рядом предыдущих поколений; вместе с тем он стал отправным пунктом работ почти всех математиков Китая до XIV в. и даже позднее. Ван посвятил «Математике в девяти книгах» в целом свою диссертацию 1956 г., оставшуюся, однако, неизданной [2]. Диссертация Вана имеется в библиотеке Кембриджского университета, но остается почти никому, в частности автору этих строк, неизвестной. В это время Э. И. Березкина уже заканчивала в Москве подготовку русского перевода «Математики в девяти книгах», о котором сказано несколько далее.

В том же 1955 г. вышла на русском языке статья автора этих строк, содержащая сжатый разбор развития математики в Китае до начала XIV в. [3]. При подготовке ее были использованы, кроме литературы на европейских языках, специально переведенные на русский язык разделы сочинений современных китайских историков математики. Общая концепция, предложенная в этой статье, коренным образом отличалась от концепции Л. ван Хе. Математика древнего Китая рассматривалась здесь как составная компонента математики цивилизованных народов, населявших Европу, северное побережье Африки и многие страны Востока, математики, в которой преобладали вычислительно-алгоритмические и алгебраические методы, разработанные прежде всего для решения комплекса задач, повсеместно возникавших в общественных условиях того времени. В статье были резюмированы многие оригинальные результаты китайских математиков, которые не могли быть получены чисто эмпирически, без теоретических рассуждений, не отражавшихся тогда в учебных руководствах, какими являлись многие составные части «Десятикнижия». В статье был затронут вопрос о мало изученных двусторонних связях между математикой в Китае и в других странах.

1957 год был отмечен появлением русского перевода «Математики в девяти книгах» [4], выполненного Э. И. Березкиной при содействии доцента МГУ Чжоу Сунюаня и прокомментированного переводчицей в соответствии с установившимися в советской школе историков науки нормами издания классиков науки². В тщательно и продуман-

² Однако утверждение, что данный перевод послужил образцом (очевидно, в отношении комментирования) других переводов с древних языков [5, с. 166], является очевидным недосмотром. Достаточно вспомнить, что еще в 1948—1950 гг. Д. Д. Мордухай-Болтовской при участии И. Н. Веселовского опубликовал в переводе с древнегреческого «Начала» Евклида с обширным прекрасным комментарием.

но составленных комментариях Березкиной, занимающих вместе с вводной статьей более 80 страниц, т. е. больше, чем сам трактат, разобраны труднопонятные из-за краткости правила вычислений и решений задач, предложены различные оригинальные реконструкции отсутствующих доказательств, проведены необходимые сопоставления с математикой народов других стран. Русское издание «Математики в девяти книгах» впервые позволило многим европейским историкам математики познакомиться с полным текстом этого сочинения. На издание перевода вскоре откликнулись М. Я. Выгодский [6], А. Е. Ранк [7] и другие советские ученые. Это издание отчасти использовал позднее К. Фогель, опубликовавший в 1968 г. немецкий перевод «Математики в девяти книгах», также снабженный им подробным и во многом оригинальным комментарием [8].

В 1954 г. начало выходить многотомное исследование по истории науки и цивилизации в Китае Нидема. В 1959 г. в III томе этого сочинения [9] был помещен очерк развития математики, написанный опять-таки в соавторстве с Ваном, без участия которого Нидем один с этим делом не справился бы, как он впоследствии признавал и сам [10, с. 33]. Основная структура очерка такова. После краткого введения, в котором несколько бегло рассмотрена литература вопроса, описано развитие системы нумерации, начиная с середины II тысячелетия до н. э. Затем следует обзор развития математики до XVIII в., в котором упоминаются очень многие ученые и сочинения, известные только по имени или по названию, а также содержатся ценные замечания о связях с наукой других стран. Далее анализируется развитие отдельных направлений — арифметики, алгебры и геометрии (в трудах самих древнекитайских математиков такое деление не имело места и задачи классифицировались по алгоритмам их решения). Благодаря такому характеру изложения развитие математики в Китае до XVIII в. впервые представало как по существу непрерывный процесс. Интересен список методов и понятий, которые встречаются в китайской литературе раньше, чем в других странах [9, с. 146—150], — список, направлявший мысль специалистов на более глубокое изучение проблемы международных научных контактов. Общая оценка, предлагаемая авторами, близка к данной в статье [3], которая сочувственно ими упоминается в начале очерка [9, с. 2].

Заслуживает внимания подход в книге [9] к вопросу о причинах коренного различия между развитием математики в Китае и в Европе поздних средних веков, эпохи Возрождения и начала Нового времени. Признавая известную роль усвоения в Европе древнегреческого культурного наследия (частью через посредство арабской литературы), авторы объясняют различие между наступившим в Китае застоем и нараставшим темпом научного прогресса в Европе главным образом социально-экономическими причинами. «По-видимому, — пишут они, — только коммерческая культура (Европы. — А. Ю.) могла привести к тому, на что не была способна аграрно-бюрократическая цивилизация (Китай. — А. Ю.), — к слиянию ранее раздельных математики и естествознания» [9, с. 168]. Эта формулировка схематична и упрощена: культура Европы рассматриваемого времени была отнюдь не только коммерческой, а культура Китая не только аграрной; кроме того, объяснению подлежит застой в Китае не только математики, но и естествознания в целом и техники. Вопрос этот слишком сложен, чтобы его можно было подробно обсуждать в рамках данной статьи. Сам Дж. Нидем обещал к нему вернуться в одном из последующих томов своего сочинения. Несомненно, однако, что глубокие причины явления, о котором идет речь, лежали в экономическом базисе и социальной структуре «Срединной империи» и дополнялись событиями ее политической истории и характерными особенностями весьма устойчивой научной, в частности математической, традиции. Во всяком случае, дело было не только в том, что Европе досталось богатое греческое наследие: им еще ранее овладели народы стран ислама, где также научный прогресс надолго приостановился в середине XV в.

Труд Нидема — Вана, высоко оцененный вскоре же после выхода его первых томов (см., например [11]), дал толчок новым работам. Этому способствовали даже его слабые стороны: поверхностное описание ряда классических древнекитайских книг, не изученных авторами, и недостаточно конкретный в ряде случаев математический анализ различных приемов решения задач. Новые сообщенные Нидемом и Ваном сведения и русское издание «Математики в девяти книгах» позволили автору этих строк вместе с Б. А. Розенфельдом опубликовать в 1960 г. общий очерк истории математики

в странах Востока в эпоху средних веков [12]. Целью очерка было сопоставить пути развития математики в Китае, Индии и странах ислама, выделяя при этом как преобладавшие общие черты, так и особенности, присущие отдельным регионам. Год спустя вышла моя книга по истории математики в средние века, где Китаю отведена первая глава [13, с. 19—105]. Здесь не было столь подробного перечисления всех известных хотя бы по упоминаниям математиков и их трудов, до нас не дошедших, как у Дж. Нидема и Ван Лина, главное же место отведено математическому и историко-научному анализу методов и понятий. В немецком переводе глава была дополнена на основании новых переводов Э. И. Березкиной (см. далее) и работ китайских ученых.

После выхода названных трудов изложение вопроса во многих сводных работах по истории математики пришло в соответствие с достигнутым уровнем знания. Сказанное относится ко 2-му изданию уже названной книги И. Э. Гофмана (1963), к новым изданиям широко распространенной и переведенной на многие языки, в том числе на русский, «A Concise History of Mathematics» (N. Y., 1948; 3-е изд., 1967) Д. Я. Стройка, к «A History of Mathematics» (New York — London, Sidney, 1968) К. Б. Бойера, к университетскому руководству «История математики» (Изд-во Моск. ун-та, 2-е изд., 1974) К. А. Рыбникова. Упомянутая ранее книга М. Клайна, в которой математика древнего Китая просто игнорируется, явилась в этом отношении исключением, так же как основанная только на литературе до 1929 г. и повторяющая давно опровергнутые взгляды ван Хе итальянская статья М. Адамо, удивительным образом напечатанная в столь солидной серии, как «Osiris» в 1968 г. [14].

Труды [9] и [13] далеко не исчерпывали предмет, и предстояло дальнейшее изучение многих оригинальных китайских сочинений, а также перевод их на европейские языки, без чего они оставались бы недоступными для подавляющего большинства историков науки. Работа шла здесь в двух направлениях, в соответствии с двумя основными группами сохранившихся первоисточников, принадлежащих главным образом ко времени до начала VII и к XIII в. Первую группу образует «Десятикнижие» с различными комментариями к нему, известное ныне по изданию 1213 г., которому предшествовало более раннее издание 1084 г., восходящее в свою очередь к редакции, какую сборник получил у Ли Чунфена около 656 г. Уже в издании 1084 г. сборник содержал 8 из 10 первоначально входивших в него трактатов; два остальных, утерянных, были заменены другими, также весьма старинными, но точная датировка которых неясна (обширнейший материал об истории «Десятикнижия» и его комментирования имеется в недавно опубликованной работе Г. Когельшатца [15], которая станет ценным справочным изданием для всех специалистов). Изучение «Десятикнижия» взяла на себя Э. И. Березкина, которая после русского издания в 1957 г. «Математики в девяти книгах» опубликовала в 1963—1975 гг. прекрасно комментированные переводы еще пяти трактатов [16—20] и несколько статей о них. Особенный интерес представляют трактат Суньцзы, в котором систематически применялись десятичные дроби [16], перевод сохранившейся части комментария Лю Хуэя, содержащей кроме задачи на определение расстояний до недоступных предметов и их высот³ своеобразный прием приближенного вычисления площади круга [19], а также трактат Ван Сяотуна, где впервые в истории математики встречается решение серии задач, приводящихся к кубическим или биквадратным уравнениям [20]. Целый или рациональный положительный корень уравнения, всегда заранее подобранный составителем, находится по так называемому теперь методу Руффини-Горнера, который применялся к извлечению квадратных и кубических корней еще авторами «Математики в девяти книгах» (впрочем, описания метода Ван Сяотун не дает). Из неизданных еще в русском переводе частей «Десятикнижия»,готавливаемых Березкиной к печати, важен трактат о гномоне, по времени близкий к «Математике в девяти книгах», — диалог космологического содержания, включающий и математические сведения (среди них «теорему Пифагора») попеременно с метафизическими и мистическими размышлениями⁴. Исследования со-

³ Французский перевод этой части комментария Лю Хуэя, так называемого «Трактата о морском острове», впервые опубликовал в 1933 г. Л. ван Хе.

⁴ Полный французский перевод всех задач «Десятикнижия» и анализ его содержания дал в своей неопубликованной диссертации Р. Шримпф [21].

ветских историков математики были, в той мере, в какой они становились известными, положительно оценены за рубежом Дж. Нидемом, К. Б. Бойерсом, У. Либбрехтом (о нем см. далее), К. Фогелем [22] и др.

Другое направление новых исследований по истории математики посвящено второй половине XIII и началу XIV в., отмеченным деятельностью выдающихся алгебраистов Цинь Цзюшао, Ли Е (он же Ли Цзи), Ян Хуэя, Чжу Шинзе и астронома Го Шоуцзиня. Здесь прежде всего следует назвать краткие, но весьма содержательные научные биографии первых четырех, написанные профессором Малайского университета Хо Пенниоком [23—27].

Из шести дошедших до нас сочинений названных алгебраистов⁵ три были с большей или меньшей полнотой изучены и одно переведено на английский целиком. Мы рассмотрим эти публикации в порядке создания соответствующих китайских трудов.

«Девять книг по математике» Цинь Цзюшао (1247) весьма основательно проанализировал работающий в Лувенском университете У. Либбрехт [28]. Впрочем, он далеко выходит за рамки исследования только названного трактата. В главе I вслед за общей характеристикой математики в Китае X—XIV вв., которая близка к концепции книги [13], приведены биография Цинь Цзюшао и описана общая структура его труда. В трех следующих главах рассмотрены, соответственно нумерация и терминология, элементарные арифметические и геометрические методы (включая приемы измерения недоступных предметов, которые Либбрехт условно называет «тригонометрическими», сам ставя это слово в кавычки) и, наконец, вопросы алгебры. Очень хорошо разобрано численное решение одного биквадратного уравнения по древнекитайскому варианту метода Руффини-Горнера, включая приближенное вычисление корня, в том числе с помощью десятичных дробей [28, с. 177—211]. Центральное место занимает глава V, в которой исследованы приемы решения неопределенных линейных систем в целых положительных числах [28, с. 213—413] в сопоставлении с другим приемом, применявшимся в Индии, и с разработкой по существу совпадающего с китайским методом, вновь развитого в Европе рядом первоклассных математиков; Эйлером, Гауссом, Стильерсом и др. Либбрехт связывает происхождение китайского метода (быть может, острожнее было сказать: особый интерес к нему в Китае) с вычислением некоторых календарных периодов и приводит весьма сложные расчеты в одной такой задаче, опираясь на вычисления Ли Яня и Цянь Баоцзуня [28, с. 367—369 и 409—413].

В последней, VI главе «Социальноэкономическая информация» [28, с. 416—474] автор выясняет, какое отражение получили в сочинении Цинь Цзюшао строительные, транспортные, военные, коммерческие, финансовые задачи его эпохи. В математике древнего Китая очень многие задачи возникали непосредственно на почве запросов жизненной практики, а многие связаны были с такими запросами косвенно, например путем перемены местами данных и искомых величин. Было бы важно изучить аналогичным образом древнекитайскую математическую литературу в целом; пока это сделано только в отношении нескольких сочинений, среди них древнейшей «Математики в девяти книгах» [4].

Исследование Либбрехта проведено на очень высоком уровне, но все-таки полный перевод «Девяти книг по математике» остается желательным. Заслуживает особого упоминания замечание Либбрехта, что китайский метод решения неопределенных линейных систем удовлетворяет всем основным условиям, которые следует предъявлять к эффективным алгоритмам. Нельзя, однако, пишет Либбрехт, слишком переоценить общую роль алгоритмов в развитии математики; сами же алгоритмы он характеризует по К. Марксу, как «стратагему действия» [28, с. 377]. С предложенной Марксом характеристикой математических алгоритмов Либбрехт познакомился по докладу К. А. Рыбникова, представленному на VIII Международном конгрессе по истории науки (1955). Вообще бельгийский ученый существенно использовал труды советских исследователей, имеющиеся в немецком или английском переводе; литература на русском языке осталась ему недоступной.

⁵ Сочинения Го Шоуцзиня до сих пор не обнаружены, но об их содержании можно судить по другим позднейшим источникам [9, с. 109, 110].

Сочинения другого видного математика второй половины XIII в. — Ян Хуэя были изучены Лейм Лейян, ныне профессором университета в Сингапуре. В 1974 г. она опубликовала статью [29] о части комментария Ян Хуэя к «Математике в девяти книгах», именно к разделу, в котором изложено и применено правило двух ложных положений. Однако обзора всего этого комментария, написанного в 1261 г. и в некоторой части уцелевшего, до сих пор нет, и этот труд имеется только в китайском издании 1936 г. Зато в 1977 г. Лейм опубликовала полный перевод другого весьма важного для истории математики сочинения Ян Хуэя — «Методы вычислений» [30], состоящего из трех его трудов, написанных в 1274—1275 гг., и раскрывающего такие стороны развития математики в Китае в XII—XIII вв., о которых других свидетельств не сохранилось. «Методы вычисления» высоко ценились последующими поколениями, о чем говорит их переиздание в Китае в 1378 г. и в Корее в 1433 г. Книга эта отличается стремлением к доказательному изложению предмета, какое не встречается в более ранней литературе, содержащей только задачи, лаконичные правила решения и ответы. Конечно, при устном обучении давались какие-то объяснения, но они не попадали в учебники. Ян Хуэй очень внимателен к читателю. Он приводит даже число дней, нужных для изучения того или иного раздела, а своих предшественников — Лю Хуэя, Ли Чунфена и Лю И, составившего в XI в. сборник 200 задач под названием «Обсуждение старинных источников», — упрекает в непонятности изложения и отсутствии необходимых объяснений, в силу чего, даже овладев техникой решения упражнений, не понимаешь сути дела [30, с. 14]. Сам Ян Хуэй в ряде случаев приводит теоретический вывод — обстоятельство, отмечавшееся уже Ван Лином и Дж. Нидемом [9, с. 104, 105]. Возможно, что на педагогических воззрениях Ян Хуэя отразилось укрепление научных контактов со странами Средней Азии, явившееся следствием политических событий того времени. Что касается математического творчества, то оно издавна не могло обойтись без теоретического исследования, хотя китайские ученые рассматриваемого времени и не пришли к созданию целостных систем типа Евклидовых «Начал».

Сочинение Ян Хуэя представляет собой энциклопедическое руководство в трех книгах, охватывающее многие традиционные разделы. В 1-й книге подробно изложены элементарные операции над целыми числами и дробями, причем приведены многие способы упрощения вычислений, пригодные в частных случаях, вроде умножения на 10—2 вместо 8 или умножения на 2 вместо деления на 5, и другие, более сложные приемы. Особого внимания заслуживают несколько задач 2-й книги, которые мы выражаем системами вроде $xu = a$, $y \pm x = b$, равносильными квадратному уравнению с одним неизвестным. Отдельные сходные задачи, в основе которых лежит теорема Пифагора⁶, были решены уже в «Математике в девяти книгах», а обширное собрание их имелось, согласно Ян Хуэю, в упомянутой книге Лю И. Все примеры Ян Хуэя относятся к прямоугольнику с площадью $xu = 864$, шириной $x = 24$ и длиной $y = 36$. Требуется по данным площади и разности сторон определить стороны (задачи № 43, 44) или их сумму (№ 45), а также по площади и сумме сторон определить стороны (№ 46, 47) или их разность (№ 48). Задачи № 43, 44 и 46, 47 решены по методу Руффини-Горнера, который Ян Хуэй описывает довольно подробно и поясняет необходимыми чертежами. Такое геометрическое обоснование алгебраических правил было, по-видимому, характерно для математики древнего Китая. Решения задач № 45 и 48 основано на тождестве $(y+x)^2 = (y-x)^2 + 4xy$, которое Ян Хуэй доказывает, деля квадрат со стороной $x+y$ с помощью отрезков, параллельных сторонам, на четыре прямоугольника xu , окаймляющих внутренний квадрат со стороной $y-x$. Решение систем $xu = a$, $y \mp x = b$ с помощью только что приведенного тождества встречается уже в древнем Вавилоне и это — дополнительный довод в пользу предположения о связи между наукой Китая и Вавилона, хотя прямых свидетельств такой связи нет. О продолжении в Китае вавилонских традиций писали Нидем и Ван, указывая и на возможные промежуточные звенья, как Согднана и Иран [9, с. 204—205, 395].

⁶ Истории теоремы Пифагора в древнекитайской математике, ее доказательства и алгебраических приложений посвящены статьи Б. С. Джиллона (университет в Торонто, см. [31]) и Ан Тянсе (Малайский университет в Куала-Лумпуре, см. [32]); диссертация на ту же тему Ан Тянсе [33] не опубликована.

Из разнообразного содержания 3-й книги следует отметить построение магических квадратов до 10-го порядка включительно и аналогичных по свойствам магических кругов, комбинаторные и календарные задачи.

Комментарий Лейм в целом удовлетворителен, но содержит пробелы и даже ошибки (вроде отождествления на с. 242 Джемшида ал-Каши с Казизаде ар-Руми и Али Кушчи). В исторических пояснениях к задаче на суммирование ряда квадратов натуральных чисел нет даже упоминания ни о суммировании Шэнь Ко (XI в.)⁷, ни об интересных реконструкциях решения названной задачи, ни о том, что правило суммирования этого ряда знали еще в древнем Вавилоне [30, с. 233—234]⁸.

Профессор Лейм опубликовала также довольно подробный разбор [36] «Введения в изучение математики» (1299) Чжу Шичзе, служившего руководством высшего уровня не только в Китае, Корее и Японии до конца XVII в. В научном отношении более ценно, однако, несколько более позднее «Яшмовое зеркало четырех элементов» (1303) Чжу Шичзе, которые исследовал Джон Ху [37]⁹.

В «Яшмовом зеркале» Чжу Шичзе изложено решение нелинейных систем алгебраических уравнений с одним, двумя, тремя и четырьмя неизвестными посредством метода исключения, приводящего к одному нелинейному уравнению с одним неизвестным. Дж. Ху опубликовал только первую часть подготовленного им труда, в которой дал обстоятельный анализ вводного раздела «Яшмового зеркала», содержащего решение четырех типичных задач соответственно числу неизвестных, и сжатый общий обзор книги, содержащей еще 284 задачи (также переведенные Ху, но пока неизданные). Во введении к своей книге Ху вслед за критическим обзором литературы вопроса поясняет на одном примере трудности адекватного перевода древнекитайского текста как при дословной передаче его на европейских языках, так и в современной символической. Затем он излагает принципы собственного (французского) перевода. Прежде всего Ху цитирует оригинальный текст, затем приводит его латинизированную транскрипцию, принятую теперь в Китае, далее передает текст в придуманной им полусимволической записи и, наконец, в современной алгебраической форме. Нумерация слов позволяет читателю сравнить оригинал и полусимволический перевод [37, с. 33—40]. В главе 1 автор сообщает необходимые для дальнейшего сведения о китайской нумерации, применении счетной доски для выкладывания на ней коэффициентов уравнений, теореме Пифагора и проч. В главе 2, самой большой [37, с. 91—247], рассмотрено решение четырех задач введения Чжу Шичзе, остальные 284 решаются аналогично. Все четыре задачи относятся к прямоугольному треугольнику с вертикальным катетом $a=4$, горизонтальным $b=3$, гипотенузой $c=5$ и диаметром вписанной окружности $d=a+b-c=5$ ¹⁰. Варьируя условия задачи, Чжу Шичзе получает задачи с одним, двумя, тремя и четырьмя неизвестными. Так, в первой задаче даны $d(ab)=24$ и $a+c=9$ и ищется, как неизвестная, величина $b=x$. Основная трудность состоит в исключении a , c и d с тем, чтобы получить одно уравнение — $3888+729x^2-81x^3+9x^4+x^5=0$; для этого приходится, как сказали бы мы, перемножить алгебраические многочлены. Исключение неизвестных производится с большим искусством и, как справедливо пишет Дж. Ху, «очевидно, что получаемое на счетной доске решение... никоим образом не могло быть получено путем слепого применения механических правил. Существенной является способность следовать логическим путем», — этому и стремился научить читателя Чже Шичзе [37, с. 113—114]. В Европе общей проблемой исключения неизвестных из систем не-

⁷ В биографии Шэнь Ко, написанной Н. Сивинном [34], математические знания этого выдающегося ученого изложены слишком суммарно.

⁸ Остроумная реконструкция вывода этого правила была опубликована еще в 1937 г. советским ученым С. Я. Лурье [13, нем. изд., с. 81, 82]. Этот факт остался неизвестным китайским историкам математики, и Сюй Чуньфан вновь предложил такую реконструкцию. См. статью сотрудника университета в Гонконге М. К. Сю [35].

⁹ Четыре элемента (неба, земли, человека, вещи) — принятый у нас перевод идеограмм для четырех неизвестных величин. Дж. Ху переводит эту идеограмму словом *inconnue*, т. е. неизвестная: в этом смысле она применяется в современном Китае [37, с. 45—26].

¹⁰ Согласно Дж. Ху [37, с. 298], равенство $d=a+b-c$ есть в «Математике в десяти книгах». Это неточно; там приведено правило $d=2ab:(a+b+c)$ [4, с. 510], которое, правда, легко преобразовать в первое. И то и другое правила могли быть получены только с помощью теоретического вывода.

линейных уравнений занялись Эйлер (1764) и Безу (1764—1779), за которыми последовали многие выдающиеся математики XIX в. Ху подчеркивает, что эффективность приемов Чжу Шинце уже в случаях трех и четырех неизвестных была существенно ограничена техническими средствами вычислений на счетной доске, не допускавшими их непосредственного распространения на большее число неизвестных [37, с. 332—333].

В главе 3 Ху кратко излагает содержание остальных разделов «Яшмового зеркала»: различные варианты численного решения уравнений (в частности, с использованием таблицы биномиальных коэффициентов; см. [37, с. 276])¹¹, геометрические знания, используемые при составлении задачи, многочисленные суммирования арифметических рядов.

Чжу Шинце называет восемь своих предшественников в разработке метода исключения неизвестных. Согласно ему, случай с одной неизвестной («небом») рассмотрели Цзян Чжоу и еще несколько математиков, вторую неизвестную ввел Ли Децзан, третью Лю Жунфу, а все четыре применял также друг автора Чжу Ханцин, причем решал задачи, относящиеся к уже встречающемуся выше прямоугольному треугольнику [37, с. 115—118]. Никаких дополнительных сведений об упоминаемых Чжу Шинце алгебраистах¹² нет; можно полагать, что они работали в XII и XIII вв. Таким образом, Чжу Шинце явился представителем долгой традиции, и судить об оригинальности его личного вклада затруднительно. Дж. Ху считает, что Чжу Шинце был не столько оригинальным исследователем, сколько педагогом, и признает за ним только распространение метода с трех на четыре неизвестных [37, с. 332]. Напротив, Нидем и Ван считают его самым крупным из группы четырех китайских алгебраистов второй половины XIII в., а Дж. Сартон — даже крупнейшим математиком средних веков [11, с. 41]. Этот вопрос приходится оставить открытым. Бесспорно только, что его труды знаменуют вершину достижений древнекитайской алгебры и, вероятно, превосходят по богатству содержания все прочие алгебраические сочинения его китайских современников. В заключение [37, с. 335—338] Ху затрагивает вопрос о причинах декаданса китайской математики и указывает, что помимо социальных, политических, идеологических причин здесь имели значение и ее внутренние особенности: замкнутость постановки проблем и характер вычислений на счетной доске не открывали путей ни к созданию символики, ни к постановке вопроса о решении уравнений в радикалах, ни к изучению свойств корней и коэффициентов и т. д., как это имело место в Европе. Впрочем, все эти вопросы требуют более глубокого изучения.

Новый свет на развитие в древнем Китае инфинитезимальных методов пролили статьи сотрудника Скандинавского института азиатских исследований в Копенгагене Д. В. Вагнера [39] и [40], более полный текст диссертации которого [41] пока не опубликован. Об этом направлении творчества китайских ученых до сих пор было известно очень немного. Имеются скудные фрагменты, свидетельствующие о том, что в философско-логической школе Моцзы (IV—III в. до н. э.) обсуждались вопросы о непрерывном и дискретном и о движении, родственные тем, какие были предметом апорий Зенона и их греческих комментаторов, и анализировались основные геометрические понятия точки, плоскости и т. д. в манере, напоминающей определения «Начал» Евклида [9, с. 91—95]. Известен был также примененный Лю Хуэем метод приближенного вычисления площади круга с помощью правильных вписанных многоугольников и построенных на их сторонах описанных фигур, напоминающий метод, употребленный ранее Архимедом. Метод Лю Хуэя был инфинитезимальным; однако затруднительно сказать, имелся ли при этом в виду процесс неограниченного приближения, т. е. предельный переход, как полагают, например, вслед за Ду Шижанем (1954), Э. И. Березкина [19, с. 262], или же Лю Хуэй исходил из атомистических представлений [13, с. 72]. На этот вопрос исследования Вагнера не дают ответа, но они знакомят с еще более глубокими инфинитезимальными изысканиями Лю Хуэя и работавшего во второй половине V в. Цзу Хенчжи. В статье [40] Вагнер подробно разобрал остроумный вывод Лю Хуэем правила вычисления объема пирамиды с квадратным основанием, одна из граней кото-

¹¹ Новые интересные соображения о применении в Китае таблицы биномиальных коэффициентов («треугольника Паскаля») при численном решении уравнений имеются в работе Лейм [38].

¹² Нидем и Ван также вскользь касаются предшественников Чжу Шинце и переводят названия некоторых сочинений не совсем так, как Ху [9, с. 41—42].

рой перпендикулярна к основанию (этот вывод, необходимым образом инфинитезимальный, можно распространить на пирамиду общего вида). В другой статье [39] Вагнер, опираясь на сведения, содержащиеся в комментарии Лю Чунфена, исследовал вопрос об измерении объема шара. В древней «Математике» в девяти книгах диаметр d шара с данным объемом v определяется по правилу $d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}v}$, между тем как на деле $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}v}$. Правило, взятое само по себе, соответствует не принятому в назван-

ном трактате значению $\pi \approx 3$, но гораздо худшему приближению $\pi \approx 3\frac{1}{8}$. Лю Хуэй объяснил происхождение правила тем, что объем шара был ошибочно принят равным $\frac{3}{4}$ (т. е. $\frac{\pi}{4}$) объема цилиндра, вписанного в куб d^3 , и показал, что на самом деле таково соотношение между объемом шара и другого тела «хо-кан», заключенного между поверхностями двух вписанных в куб d^3 цилиндров со взаимно перпендикулярными осями. Это правильно, но Лю Хуэй не удалось вычислить объем «хо-кан». Это сделал Цзу Хенчжи, используя явно сформулированный им, как мы теперь говорим, принцип Кавальери. Именно, Цзу Хенчжи доказал, что объем «хо-кан» равен $\frac{2}{3}d^3$, откуда и следует, что объем шара равен $\frac{\pi}{6}d^3$.

Рассмотренные выводы Лю Хуэя (который также применял в более частной форме принцип Кавальери) и Цзу Хенчжи не только свидетельствуют о высоком теоретическом уровне математики в Китае III—V вв., но и вносят новые элементы в решение трудного вопроса о культурных связях между Китаем и эллинистическими государствами или провинциями Рима. Уже труды школы Моцзы наводят на мысль о возможности таких связей, а вычисление площади круга Лю Хуэем — и на мысль о проникновении в Китай сведений о работах Архимеда. Вычисление объема столь сложного тела, как «хо-кан», укрепляет в такой мысли. Дело в том, что результат Цзу Хенчжи совпадает со второй теоремой, высказанной в начале послания Архимеда Эратосфену, где он изложил свой эвристический метод квадратур и кубатур с помощью неделимых и принципа рычага (доказательство теоремы в единственной дошедшей до нас рукописи послания не сохранилось). Эта рукопись была обнаружена только в 1899 г. на пергаменте X в., хранившемся в одной монастырской библиотеке в Иерусалиме; до того она была известна лишь по некоторым упоминаниям, например, у Герона (I в.). То, что мы знаем о торговых и политических связях Китая со Средней Азией и Римом, говорит о реальной возможности частичной передачи научных знаний с Запада на Дальний Восток. Вагнер этот вопрос не затрагивает.

В известной мере завершающей в рассматриваемой области исследований явилась монография Э. И. Березкиной [42], вышедшая в конце 1980 г. Здесь рассмотрено развитие математики в Китае до 1303 г., причем, как говорится в предисловии, основное внимание уделено эпохе «Десятикнижия», которое было предметом долгих исследований автора. Книга состоит из пяти частей, содержащих: 1) краткие сведения о литературе, вводный общий обзор и анализ источников, особенно «Десятикнижия»; 2) детальный разбор техники вычислений, включая применение десятичных дробей; 3) арифметические и теоретико-числовые проблемы; 4) очерк развития алгебры — решение линейных систем и численных нелинейных уравнений и 5) сведения о геометрических знаниях, измерении круга и шара, применении к решению геометрических задач алгебраических знаний. Во вводном обзоре [42, с. 8—21] развитие математики в древнем Китае связывается с ходом его социальной, политической и культурной истории в целом, а общая концепция китайской математики близка к предложенной в работах Вана и Нидема, автора этих строк, а также Либбрехта.

Оценивая труд Э. И. Березкиной, следует иметь в виду, что в нем не были, а частью не могли быть учтены исследования последних лет Когельшатца [15], Лейм [29], [36], [38], Ху [37], Вагнера [39, 40] и некоторые другие. В значительной мере этим обстоятельством объясняются некоторые естественные пробелы в этом труде. В то время как анализ «Десятикнижия», за редкими исключениями, весьма содержателен и во многом оригинален (это относится особенно ко всей второй части, главам об обыкновенных дробях и задачах на пропорции третьей части, главе о решении определенных линейных систем четвертой части и главе об определении расстояний до недоступных предметов пятой части), трактовка математики VII—XIII вв. нередко поверхностна, а иногда просто небрежна. Достаточно привести два примера сказанного. Этот

«период расцвета математики в Китае,— пишет Березкина,— украшен именами крупных ученых: Цинь Цзюшао, Чжу Шицзе, Шэнь Ко, Го Шоуцзиня и других,— создавших своими трудами своеобразную китайскую алгебраическую школу, основным достижением которой было создание численного метода решения уравнений высших степеней» [42, с. 21]. Такое хронологически беспорядочное перечисление имен, из которых пять относятся к середине или второй половине XIII в., не дает представления о процессе создания китайской алгебраической школы. Ян Хуэй, Ли Е, Цинь Цзюшао и Чжу Шицзе¹³ были, возможно, самыми крупными и, во всяком случае, последними крупными представителями этой школы, складывавшейся в течение нескольких поколений; мы ничего не знаем об их сколько-нибудь выдающихся последователях. Что касается численного метода решения уравнений высших степеней, то здесь следует различать решение численного уравнения с одним неизвестным, известное в Китае не позднее VIII в. [42, с. 10], и сведение системы нелинейных уравнений со многими неизвестными к одному уравнению с одним неизвестным методом исключения. Полстраницы, отведенные «Яшмовому зеркалу» Чжу Шицзе, не содержат даже упоминания о применении им метода исключения неизвестных, а в текст здесь вкралась досадная опечатка: вместо слов «нелинейные системы» набрано «линейные системы» [42, с. 238].

Другим примером неполноты изложения является история решения квадратных уравнений. Э. И. Березкина оставила в стороне собственно алгебраическое решение систем вида $xu=a$, $y\pm x=b$, имеющееся у Ян Хуэя. Не очень удачно изложение приема решения неопределенных задач, которые мы записываем системами линейных уравнений [42, с. 166]. Здесь автор прежде всего отсылает к решению таких систем в современном университетском курсе, но объяснение операций, производившихся в Китае, у Либбрехта [28] изложено лучше. Замечание же, что «решение проводится с помощью непрерывных дробей» с отсылкой к университетскому курсу [42, с. 170] оставляет читателя в недоумении: было ли в древнем Китае понятие непрерывной дроби?

В «Заключении» книги вызывает сомнение характеристика «общей модели» математики древнего Китая как в основном линейной [42, с. 287]. Вся работа Э. И. Березкиной доказывает, что, несмотря на линейный характер большого числа практических задач, совокупность применявшихся методов далеко выходила за пределы линейной модели. Все сделанные замечания и возражения не умаляют, однако, указанных ранее достоинств монографии.

Дальнейших успехов в изучении китайской математики следует ожидать от более углубленного изучения первоисточников и привлечения ранее не исследованных текстов. Сколь важными могут оказаться полученные результаты, показывают хотя бы недавние работы Вагнера. Перевод на европейские языки старинных трактатов и их фрагментов является при этом обязательным условием привлечения к исследованиям более широкого круга историков математики. Полезен был бы и перевод работ современных китайских историков науки, например книги Цянь Баоцуня 1963 г.

Одним из весьма актуальных является вопрос о связях между математикой древнего Китая и других народов. Для его решения математические тексты недостаточны; здесь необходимо привлечение данных общей истории, истории культуры, истории философии, религии и т. д. В этом направлении сделано пока немного. Особенно труден вопрос об истоках древнекитайской математики.

В 1980 г. Б. Л. ван дер Варден предложил гипотезу о существовании некой «довавилонской математики», явившейся общим источником математики Вавилона, Египта, Индии и Греции, а именно «неолитической геометрии и алгебры, изобретенной где-то в Центральной Европе между, скажем, 3500 и 2500 гг. до н. э., в которой центральную роль играла „теорема Пифагора“» [43, с. 29]. Отправными пунктами аргументации ван дер Вардена служат следующие факты: 1) знание теоремы Пифагора и пифагорейских троек натуральных чисел в древнем Вавилоне около 1800 г. до н. э. и затем в китайской «Математике в девяти книгах»; 2) решение одинаковых задач, приводящихся к квадратным уравнениям, в вавилонских текстах и в той же китайской «Математике»; 3) совпадение правил вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основа-

¹³ Что касается Го Шоуцзиня, то вклад этого выдающегося астронома в алгебру неизвестен и в книге Березкиной его имя больше не упоминается.

ниями в Египте около 1800 г. до н. э. и опять-таки в китайской «Математике»; 4) наличие одинакового неверного правила для площади сегмента круга у каких-то предшественников Герона (I в.) и снова в китайской «Математике». К этому ван дер Варден добавляет еще несколько аналогичных фактов.

Все эти факты несомненны, но объясняет их ван дер Варден весьма своеобразно. Помещая центр распространения математических знаний в Европе, он апеллирует в сущности только к наличию во многих местах Европы каменных сооружений ритуального характера, размещенных в соответствии с некоторыми геометрическими правилами, а также искусно вылепленных и разрисованных гончарных изделий [43, стр. 23—36, 46, 47].

В целом конструкция ван дер Вардена весьма искусственна. Автор ее исходит из молчаливого допущения: 1) невероятности самостоятельного возникновения начальных математических знаний в различных районах мира; 2) невероятности передачи знаний, приобретенных в одних районах, в другие. По-видимому, ван дер Варден не замечает, что второе допущение находится в противоречии с его же гипотезой о распространении знаний из некоего европейского ареала в ходе перемещения неизвестных племен [43, с. 46] в Южную Европу, Северную Африку, Месопотамию, Индостан и на Дальний Восток. Аргументация ван дер Вардена подкрепляется заявлением, что «математику впервые изобрел и обучал ей народ, говоривший на индоевропейском языке», ибо именно «индоевропейские языки прекрасно подходят для обучения математике» [43, с. 45]. Здесь вводятся еще два необоснованных допущения: во-первых, что неизвестные народы, населявшие в эпоху нового каменного века Европу, говорили на индоевропейских языках, причем понимали друг друга, и, во-вторых, что древние восточные языки были мало пригодны для развития и обучения математике, что опровергается самим фактом прогресса математики во всех цивилизованных странах Востока, независимо от языка или языков, на которых они говорили.

Таким образом, гипотеза Б. Л. ван дер Вардена покончена на других априорных гипотезах, частью противоречащих друг другу, частью не согласующихся с данными общей истории и филологии. Ставя важный вопрос о происхождении математики в различных странах Востока, он не дает на него сколько-нибудь убедительного ответа.

Литература

1. Wang Ling, Needham J. Horner's Method in Chinese Mathematics; its Origins in the Root-Extraction Procedure of the Han Dynasty.—T'oung Pao, 1955, v. 43, p. 345—401.
2. Wang Ling. The «Chiu Chang Suan Shu» and the History of Chinese Mathematics during the Han Dynasty. Univ. of Cambridge. Inaug. Dissertation, 1956.
3. Юшкевич А. П. О достижениях китайских ученых в области математики.—Историко-математические исследования (далее ИМИ), 1955, т. VIII, с. 539—572. Китайский перевод: Progress in mathematics, 1956, v. 2, № 2, p. 256—278.
4. Математика в девяти книгах/Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.—ИМИ, 1957, т. X, с. 427—584.
5. Beryozkina E. Studies in the History of Ancient Chinese Mathematics. Science and Technology: Humanism and Progress. V. II. M., USSR, Acad. Sci., 1981.
6. Выгодский М. Я. Происхождение правила двух ложных положений.—ИМИ, 1960, т. XIII, с. 231—252.
7. Раик А. Е. О вычислении некоторых объемов в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах».—ИМИ, 1961, т. XIV, с. 467—472.
8. Neun Bücher arithmetischer Technik/Übersetzt und erläutert von Vogel K. Braunschweig, 1968.
9. Needham J. with the collaboration of Wang Ling. Science and Civilisation in China. V. 3.—(Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth). Cambridge, 1959.
10. Libbrecht U. Joseph Needham's Work in the Area of Chinese Mathematics. Past and Present, N 87, May 1980, p. 30—39.
11. Васильев Л. С., Быков Ф. С., Юшкевич А. П., Березина Ю. М., Дж. Нудем. Наука и цивилизация в Китае.—Проблемы востоковедения, № 4, 1960, с. 192—205.
12. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Математика в странах Востока в средние века.—В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. т. I, М., 1960, с. 349—421. Немецкий перевод: Juschkewitsch A. P. und Rosenfeld B. A. Die Mathematik der Länder des Ostens im Mittelalter.—In: Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft. B., 1960, S. 62—160.
13. Юшкевич А. П. История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961. Немецкий перевод: Juschkewitsch A. P. Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig, 1964.

14. Adamo M. La matematica nell'antica China.— Osiris., 1968, v. 15, p. 175—195.
15. Kogelschatz H. Bibliographische Daten zum frühen mathematischen Schrifttum Chinas im Umfeld der «Zehn mathematischer Klassiker» (1. Jh. v. Chr. bis 7 Jh. n. Chr.).— Veröffentlichungen des Forschungsinstitutes des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe B. München, 1981.
16. Суныцы. Математический трактат/Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. III. М.: Изд-во восточной литературы, 1963, с. 5—70.
17. Математический трактат Чжан Цюцзяня/Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— В кн.: Физико-математические науки в странах Востока. II(V). М.: Наука, 1969, с. 18—84.
18. Математический трактат пяти ведомств/Перевод, статья и примечания Березкиной Э. И.— Там же, с. 82—97.
19. Лю Хуэй. Математический трактат о морском острове; две задачи из «Математики в девяти книгах» и комментарий к ним с вычислением числа π (название дано в русском переводе)/Перевод, статьи и примечания Э. И. Березкиной.— ИМИ, 1974, т. XIX, с. 231—273.
20. Ван Сяогун. Математический трактат о продолжении древних [методов]/Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— ИМИ, 1975, т. XX, с. 329—371.
21. Schrimpf R. La collection mathématique «Souan King che chou». Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VII^e siècle de notre ère. 4 v. Rennes, Faculté des Lettres, 1963.
22. Vogel K. Bericht über neuere, in westlichen Sprachen erschienene Arbeiten zur Mathematik der Chinesen. Προσματα. Naturwissenschaftsgeschichtliche Studien. Wiesbaden, 1977, S. 423—430.
- 23—27. Ho Pengyoke. Ch'in Chiu-shao. Dictionary of Scientific Biography DSB, III (1971), p. 249—256; Chu Shih-chieh. DSB, III, (1971), p. 265—271; Li Chi. DSB, VIII (1973), p. 313—320; Yang Hui. DSB, XIV (1976), p. 536—546; Liu Hui. DSB, VIII (1973), p. 418—425.
28. Libbrecht U. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao. Cambridge, Mass. and London, England, 1973.
29. Lam Lay-yong. Yang Hui's Commentary on the ying nu chapter of the Chiu chang suan shu.— In: Historia mathematica (-HM). v. 1. 1974, p. 47—64.
30. Lam Layyong. A critical Study of the Yang Hui Suan Fa. A Thirteenth-century Chinese Mathematical Treatise. Singapore, 1977.
31. Gillon B. S. Introduction, translation and discussion of Chao Chün-Ch'ing's «Notes to the Diagrams of Short Legs and Long Legs and of Squares and Circles».— HM, 1977, v. 4, p. 253—293.
32. Ang Tianse. Chinese interest in right-angled triangles.— HM, 1978, v. 5, p. 253—266.
33. Ang Tianse. A study on the mathematical manual of Chang Ch'in-chien, 1969. (M. A. dissertation, University of Malaya, Kuala Lumpur).
34. Sivin N. Shen Kua.— DSB, 1975, v. XII, p. 369—393.
35. Siu Mankeung. Pyramide, Pile and Sum of Squares.— HM, 1981, v. 8, p. 61—66.
36. Lam Lay yong. Chu Shih-chieh's Suan-hsueh ch'i meng (Introduction to Mathematical Studies.— Arch. Hist. Exact Sci., 1979, v. 21, № 1, p. 1—31.
37. Hoe John. Les systèmes des équations polynômes dans le Siyuan Yujian (1303). Collège de France. Institut des hautes études chinoises, 1977.
38. Lam Layyong. The Chinese Connection between the Pascal Triangle and the Solution of Numerical Equations of Any Degree.— HN, 1980, v. 7, p. 407—424.
39. Wagner D. B. Liu Hui and Tsu Keng-chih on the Volume of a Sphere.— Chin. Sci., 1973, № 3, p. 59—79.
40. Wagner D. B. An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A. D.— HM., 1979, v. 6, p. 164—188.
41. Wagner D. B. Proof in Ancient Chinese Mathematics: Liu Hui on the Rectilinear Solids. Thesis, University of Copenhagen, 1975.
42. Березкина Э. И. Математика древнего Китая. М.: Наука, 1980.
43. Van der Waerden B. L. On the Pre-Babylonian Mathematics. I—II. Archive for History of Exact Sciences, 1980, v. 23, № 1, p. 1—46.