О ПРОБЛЕМЕ ПОЛНОТЫ В ТЕОРИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ *

МЕДВЕДЕВ Ф. А.

Восходящая к пифагорейцам программа арифметизации математики стала в XIX в. одной из самых актуальных задач, за решение которой взялись многие ученые. Важнейшей составной частью этой программы была арифметизация анализа, проходившая на всем протяжении прошлого века, и кульминационным моментом указанного процесса явилось построение теорий действительных чисел.

В 1872 г. появилось пять публикаций, содержащих различные теории действительных чисел [1]—[5]. Принято считать, что в этих изложениях или в их улучшенных вариантах содержатся достаточно строгие доказательства полноты построенных систем действительных чисел. Главный тезис настоящего сообщения — утверждение, что дело обстоит не так, по крайней мере с очень большой степенью достоверности.

Целесообразно начать с работы Кантора [2].

Кантор, как и другие авторы указанных публикаций, отправлялся от упорядоченного плотного поля R рациональных чисел. Из чисел $r \in R$ он строил фундаментальные последовательности первого порядка $\{r_n\}$ и каждой такой последовательности ставил в соответствие или рациональное число, или иррациональное число первого порядка. Существование и единственность этих иррациональных чисел им фактически постулировалось. Для полученного таким образом поля действительных чисел вводилось отношение упорядочения.

Затем из элементов этого поля Кантор вновь образовывал фундаментальные последовательности второго порядка $\{r_n'\}$ и сопоставлял им или рациональные и иррациональные числа первого порядка, или иррациональные числа второго порядка; существование и единственность последних по существу тоже постулировалось. Далее аналогично вводились иррациональные числа третьего, четвертого и т. д. порядков. В указанной работе Кантор ограничился продолжением этого процесса до любого конечного порядка. В 1883 г. он [6] распространил описанный процесс на все трансфиниты второго числового класса.

При таком плане построения системы действительных чисел проблема полноты выступала в виде вопроса о завершении процесса построения все новых и новых чисел. Кантор был уверен, что его процесс завершится в том смысле, что можно доказать несуществование фундаментальных последовательностей, порядок которых обозначается трансфинитным числом третьего класса, и даже пообещал доказать это. Обещанного доказательства, естественно, не последовало: доказательство полноты в таком виде связано с положительным решением проблемы континуума **.

Дедекинд исходил из того же множества R. Для него он ввел операцию сечения и всякому сечению множества R сопоставил одно и только одно рациональное или иррациональное число. Чисел более высокого порядка он не вводил, а проблему полноты сформулировал и попытался доказать в виде следующего утверждения:

«Если система $\mathfrak{R}$ всех вещественных чисел распадается на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такого рода, что каждое число α_1 класса $\mathfrak{A}_1$ меньше каждого числа α_2 класса $\mathfrak{A}_2$, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение» [3, с. 25].

Дедекинд предложил доказательство приведенной теоремы, и в случае корректности его доказательства проблема полноты в указанном смысле была бы действительно решена. Однако данное им доказательство некорректно.

---

* Статья печатается в порядке обсуждения.

** Более подробно о канторовской теории см. [7].

В самом деле, первый же шаг в рассуждении Дедекинда состоял в допущении того, что требуется доказать. Вслед за приведенной формулировкой он пишет: «Вместе с разложением или сечением $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дается и некоторое сечение (A_1, A_2) системы R всех рациональных чисел, определяемое тем правилом, что A_1 содержит все рациональные числа класса $\mathfrak{A}_1$, а A_2 все остальные рациональные числа, т. е. все рациональные числа класса $\mathfrak{A}_2$». Но если признать, что всякое сечение $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ есть вместе с тем и сечение множества R рациональных чисел, что ни о каких других сечениях (например, неевдоксовых) нельзя и помыслить, то доказывать больше нечего, а все остальное в дедекиндовском рассуждении лишь маскирует это основное допущение. В самом деле, здесь лишь доказано, что если сечение $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ случайно окажется введенным ранее действительным числом $\alpha = (A_1, A_2)$, то никакое действительное число $\beta \neq \alpha$ не может быть соответствующим этому $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$; это также является прямым следствием процитированного выше утверждения и способа введения действительных чисел Дедекиндом.

Таким образом, полнота системы действительных чисел Дедекиндом тоже не доказана. Аналогично обстоит дело у Гейне [1, с. 180] и Мере [4, с. 7]: тот и другой заранее предполагают сравнимость вновь вводимых объектов с рассмотренными ранее.

Что касается вейерштрассовской теории действительных чисел, то ее в некотором смысле можно считать несуществующей. Дело в том, что сам Вейерштрасс ничего не публиковал по этому вопросу. Известные варианты изложения его теории *, которые он предлагал в своих лекциях, отличаются друг от друга в существенных пунктах даже тогда, когда они составлялись на основании одного и того же курса лекций Вейерштрасса. Упомянутую в начале статьи книгу Коссака [5] Шварц считал искажением лекций Вейерштрасса, а последний обвинил Коссака в том, что он испортил его введение в теорию функций [9, с. 68]. Действительно, у Коссака лишь с трудом можно вычитать некоторые элементы теории действительных чисел. Там не только не содержится решения проблем полноты, но нет и четкой ее постановки.

Следовательно, ни в одной из названных работ проблема полноты не решена. После 1872 г. рассмотренные теории многократно излагались вновь, переделывались и дополнялись несколько иными теориями. По этому вопросу опубликовано необозримое множество работ. Мы знакомы лишь с небольшим их числом (поэтому-то наше основное утверждение высказано лишь «с большой степенью достоверности») — во всех рассмотренных нами работах отмеченная некорректность в доказательстве полноты сохраняется. Можно, видимо, полагать, что она в принципе неустранима в рамках построений, аналогичных рассмотренным.

Литература

1. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre.— Journ. für die reine und angew. Math., 1872, **74**, 172—188.
2. Cantor G. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.— Math. Ann., 1872, **5**, 123—132; Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1932, S. 92—102.
3. *Dedekind R.* Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig, 1872. Р. Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1923.
4. *Méray Ch.* Nouveau précis d'analyse infinitésimal. Paris, 1872. Статьей Мере 1869 г., в которой соответствующая теория была изложена впервые, мы не располагали. Описание ее Дюгаком [8] представляется нам не вполне корректным.
5. *Kossak E.* Die Elemente der Arithmetik. Berlin, 1872. Е. Коссак. Основы арифметики. Киев, 1885. В этой работе содержится изложение теории действительных чисел Вейерштрасса.
6. *Cantor G.* Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883. Г. Кантор. Основы общего учения о многообразиях.— В сб.: Новые идеи в математике, № 6, Спб., 1914, с. 1—77.
7. *Медведев Ф. А.* О канторовской теории действительных чисел.— Историко-матем. исследования, 1978, в. XXIII, с. 56—70.
8. *Dugac P.* Charles Méray (1835—1911) et la notion de limite.— Revue d'hist. des sci., 1970, **23**, 333—350.
9. *Dugac P.* Eléments d'analyse de Karl Weierstrass.— Archive for hist. of exact sci., 1973, **10**, 41—176.

* Их около десятка, причем три последние известны (в изложении) с 1973 г. [9].