БЕРНАРД БОЛЬЦАНО
(К 200-летию со дня рождения)

А. П. ЮШКЕВИЧ

В октябре 1981 г. исполнилось 200 лет со дня рождения великого чешского мыслителя и ученого Больцано. Эта памятная в истории человеческой культуры дата отмечается во многих странах мира [1].

Бернард — полностью Бернард Плацид Иоганн Непомук — Больцано родился 5 октября 1781 г. в Праге. Его отец, выходец из северной Италии, с детства жил в Чехии. Для него эта страна стала отечеством, вырос он чешским патриотом — об этом позднее писал Б. Больцано в своей автобиографии [2]. Отец Больцано, небогатый торговец предметами искусства, был глубоко гуманным человеком высокой культуры и филантропом. Мать происходила также из среднебуржуазной среды. В юности она мечтала стать монахиней и отказалась от этого замысла только по настоянию своих родителей. Из двенадцати ее детей выжили немногие, и для них она была чуткой и заботливой воспитательницей. В семье Больцано детям с малых лет внушались идеалы стремления ко всеобщему благу, альтруизма, прямоты в сочетании с религиозностью, что наложило свою печать на духовное формирование впечатлительного и чрезвычайно одаренного мальчика. Получив начальное образование дома, он обучался в 1791—1796 гг. в принадлежавшей монашескому ордену гимназии, где воспитание основывалось примерно на тех же принципах, какие прививали ему родители. В год окончания гимназии Больцано поступил на философский факультет старинного Карлова университета, основанного в Праге в 1348 г. Незадолго перед тем преподавание в университете, почти четыре с половиной века проводившееся на латыни, было полностью переведено на немецкий, и поэтому именно на немецком языке писал впоследствии Больцано свои труды и читал свои курсы (только в 1882 г. Карлов университет был разделен на два: чешский и немецкий).

В университете Больцано усердно изучал классиков философии, физику и математику — последнюю не столько по лекциям местных профессоров, сколько по неоднократно издававшимся «Основаниям математики» геттингенского профессора А. Г. Кестнера, бывшего, среди прочего, почетным членом Петербургской Академии наук. В личной библиотеке Больцано это многотомное энциклопедическое руководство, автор которого был выдающимся педагогом, имелось в новейшем издании 1792—1797 гг. [3].

Когда в 1800 г. Больцано с отличием завершил университетские занятия, отец предложил сыну принять участие в его деле. Это предложение было почтительно, но твердо отклонено, и в 1801 г. Больцано поступил, отчасти под влиянием матери, на богословский факультет. Не оставляя занятий математикой, он углубился в изучение теологических и этических проблем. Воззрения у него складывались отнюдь не ортодоксальные. Католицизм имел для него значение не сам по себе, а как наилучшая, по его мнению, основа личной и общественной нравственности.

После окончания в 1805 г. богословского факультета перед Больцано встал выбор: занять свободную кафедру математики (годом ранее он опубликовал свой первый математический труд) или же только что учрежденную в Праге, как и в других горо-

---

[1] При написании данной статьи были частично использованы материалы доклада, сделанного автором в Московском математическом обществе 21 декабря 1948 г. в связи со столетием со дня кончины Больцано [1, с. 176].

дах австрийской империи, кафедру «науки о религии». Если бы первая часть «Фауста» Гете вышла уже из печати (что произошло три года спустя), Больцано мог бы сказать о себе словами героя этой трагедии:

Но две души живут во мне,
И обе не в ладах друг с другом [2].

Как ученого, его влекла к себе математика, но своим высшим долгом он считал нравственное воспитание людей на принятой им религиозной основе и принял назначение профессором «науки о религии». В связи с этим он обязан был принять сан священника, хотя, как он признавался сам, этому противилась вся его «чувственная природа». В 1805 г. Больцано приступил к чтению лекций и воскресных проповедей, уделяя, впрочем, часы досуга математике. Сделанный Больцано выбор вскоре повлек за собой драматические для его жизни последствия, обусловленные политической обстановкой в Австрии тех лет.

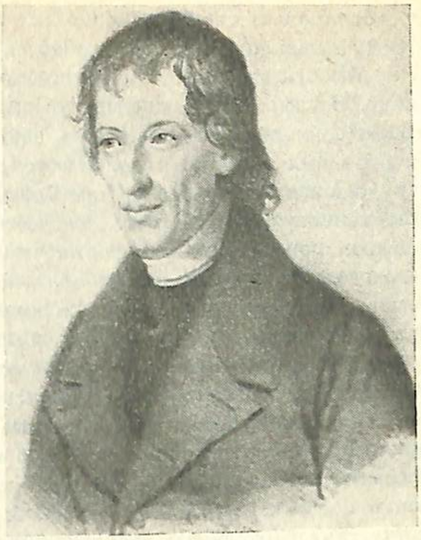
Чехия к тому времени уже почти три столетия входила в состав многонациональной Австрийской империи Габсбургов и называлась на немецкий лад Богемией (Словакия являлась тогда частью Венгрии, также управляемой Габсбургами). Для упрочнения империи, впоследствии справедливо прозванной «лоскутной монархией», венское правительство неизменно подавляло любые проявления национальной самостоятельности чешского народа и проводило германизацию культурной жизни. Во второй половине XVIII в., в эпоху «просвещенного абсолютизма», императоры Йозеф II и Леопольд II пошли на некоторые уступки духу времени, допустили в известных границах распространение просветительских идей. Проявляя некоторую терпимость, они ослабили влияние наиболее реакционных кругов католического духовенства. В 80-е годы в Чехии и Словакии было отменено крепостное право.

Вступивший на престол в 1792 г. Франц II, настороженный событиями Французской буржуазной революции 1789—1794 гг. и вызванным ею почти повсеместно в Европе подъемом национально-освободительного и антимонархического движения, стал проводить все усиливающуюся реакционную политику. Кафедры «науки о религии» (Religionswissenschaft) и были призваны внушать учащимся религиозно-верноподданические чувства. Больцано, подчинявшийся только велениям собственной совести, в своих лекциях и проповедях, изданных затем под названием «Нравоучительные речи» [4], рационалистически истолковывал церковные догматы, говорил о желательности лучшего правопорядка, отвечающего интересам общества. Больцано говорил, что наступит пора, когда исчезнут многочисленные иерархические различия и отношения между людьми будут строиться на основе равенства и братства, когда будут введены более совершенные конституции и невозможными окажутся распространенные в его время злоупотребления. Он выражал твердую уверенность в том, что шаги вспять являются в общественной жизни только временным явлением и что в конце концов прогресс восторжествует. Более того, он призывал слушателей и читателей бороться за свободу и другие человеческие права, не жалея для этого сил и жертвуя, если требуется, своим положением, имуществом и даже жизнью. Его устные и печатные выступления встречали горячее сочувствие и благодарный отклик в широких кругах населения, но шли вразрез с намерениями австрийских властей.

Жалобы и доносы иезуитов венскому правительству и Ватикану не замедлили последовать. Папский нунций коротко характеризовал богословские взгляды Больцано как пагубные, а общественные — как либеральные и антимонархические. Имея поддержку некоторых влиятельных и высокопоставленных пражских деятелей, Больцано несколько лет сохранял за собой университетскую кафедру, соглашаясь лишь на несущественные формальные изменения в изложении своих идей. Между тем в студенческой среде ведущих крупных европейских стран крепли передовые демократические настроения, происходили волнения; в 1819 г. студент К. Занд убил реакционного немецкого писателя А. Коцебу. По предложению австрийского министра иностранных дел и фактического премьера К. Меттерниха было решено удалить из университетов профессоров и студентов, придерживающихся демократического направления, ввести

[2] Перевод Б. Л. Пастернака.

строгую цензуру и создать специальную комиссию для наблюдения за оппозиционно настроенной интеллигенцией. Против Больцано, в 1815 г. избранного членом Королевского научного общества Богемии, а в 1818 г.— деканом философского факультета, было возбуждено следствие. 24 декабря 1819 г. он был отстранен от преподавания, а затем исключен из университета с запретом публично выступать и состоять на государственной службе; вместе с тем над ним был установлен полицейский надзор.



Бернард Больцано

Слабый здоровьем, но сильный духом, Больцано стойко переносил эти удары. Не сломил его и затянувшийся на пять лет церковный процесс по обвинению в еретическом толковании им католического вероучения. Больцано категорически отказался признать какие-либо свои «заблуждения», и в конце концов, опять-таки не без вмешательства сочувствовавших ему высоких покровителей в Праге, процесс был прекращен. Однако к университетской работе Больцано никогда уже не был допущен. Плохо приспособленный к практической жизни, он прожил несколько лет у одного из друзей в деревушке под Прагой, а затем почти двадцать лет в имении своих друзей Гофманов на юго-востоке Чехии, лишь изредка наведываясь в Прагу. Анна Гофман ухаживала за ним, как преданная сестра, с нею делился он и своими идеями. После ее смерти в 1842 г. Больцано поселился в Праге у своего брата, продолжавшего дело отца.

Все эти годы Больцано продолжал чрезвычайно интенсивную научную и литературную деятельность. Если за 1804—1817 гг. он опубликовал пять математических трудов и один том «Нравоучительных речей», то к 1831 г. он вчерне закончил сочинение «О лучшем государстве» — социалистическую утопию, которую совершенствовал еще в течение пятнадцати лет и которая по своим политическим установкам смогла увидеть свет только в 1932 г. [5], подготовил четырехтомное «Наукознание», изданное прижизненно, но анонимно [6], и несколько рукописей: «Парадоксы бесконечного», опубликованные его другом Ф. Иржигонским в не вполне завершенной редакции вскоре после его смерти [7]; поразительное по тонкости математической мысли «Учение о функциях», оставшееся незаконченным и увидевшее свет в 1930 г. [8], и изложение теории действительных чисел, напечатанное еще позднее, в 1962 г. [9]. Здесь названы далеко не все труды, оставленные Больцано в виде рукописей.

По возвращении в Прагу Больцано распространил свои интересы и на другие области знания — эстетику, языкознание и др. Он посещал Королевское научное общество Богемии и иногда выступал в нем с докладами. Теперь вокруг него возник кружок единомышленников.

Между тем наступил 1848 год — год буржуазно-демократических революций в Западной и Центральной Европе. В феврале народ Парижа изгнал короля Луи-Филиппа. В марте революция распространилась на Германию и Австрию. Меттерних был отстранен, а в конце года отрекся от трона австрийский император Фердинанд, наследник Франца II. Революционная волна прокатилась тогда по всей Австрийской империи. Июнь был отмечен народными восстаниями в Праге. Больцано не принял участия в политических событиях этого года. Насильственные действия были чужды его натуре, а цели буржуазно-демократической революции не соответствовали идеалам его социалистической утопии. Кроме того, он не питал иллюзий насчет возможности успеха Пражского восстания, быстро подавленного австрийской армией. Буржуазно-демократическая революция всюду потерпела поражение, хотя правительствам и пришлось пойти на некоторые конституционные уступки.

Лето 1848 г. Больцано, по настоянию друзей, провел вне Праги. Вернувшись в чешскую столицу, он продолжал неутомимо трудиться, выступил в научном обществе с докладом о своих «Парадоксах бесконечного». Через несколько дней, 18 декабря 1848 г., Бернард Больцано скончался в возрасте 67 лет.

Мы отнесли выше слова гетевского Фауста о его душевной раздвоенности к Больцано. В самом деле, математика далека как от философии религии, так и от утопического социализма, и совмещать занятия всем этим гигантским комплексом столь разнообразных проблем с полным успехом было не под силу даже столь одаренному и трудолюбивому человеку, как Больцано. Вместе с тем творчеству Больцано в целом было присуще некое методологическое единство: все оно пронизано идеей развития логики, понимаемой как форма человеческого мышления, и применения критико-логического метода в различных областях умственной деятельности. Эта идея прослеживается во всем научном наследии Больцано [10], в конструкции его четырехтомного труда «Наукознание. Опыт обстоятельного и по большей части нового изложения логики» [3] и особенно в его подходе к актуальным задачам математики. Он всегда стремился исходить из ясных первичных принципов, точно определенных понятий и на этой основе строить безупречные дедуктивные системы. Подробное сопоставление Больцано как философа с его предшественниками в рамках данной статьи невозможно. Необходимо сказать, что, подобно Лейбницу, с которым его роднило многое, и Гегелю, от которого он в целом был далек, Больцано был объективным идеалистом. Тем не менее можно заметить общие черты в методологическом подходе ко многим вопросам объективного идеалиста Больцано и материалиста Спинозы: Спиноза строил этику по образу геометрии, *modo geometrico*, Больцано ставил себе целью построить свою систему, включая этику, по образу логики *modo logico*. «Наукознание» начинается с изложения предварительных понятий логики и завершается обоснованием нескольких непреложных «истин в себе», среди которых важнейшее место занимает высший принцип нравственности, требующий от каждого постоянного содействия общему благу и стремления к движению вперед.

Хотя логика занимала, таким образом, центральное место в системе воззрений Больцано, саму науку логики он обогатил лишь отдельными новыми идеями, позволяющими видеть в нем одного из предшественников современной математической логики. Так, он предпринял попытку аксиоматического построения логики, а в своем «методе вариации представлений» по существу пользовался понятием, которому Б. Рассел присвоил наименование пропозициональной функции, т. е. предложения с переменными терминами [11, с. 144—149]. Неизмеримо более значительны были исследования Больцано по математике, и главным образом по основаниям математического анализа.

Выше было сказано, что на формирование Больцано как математика значительное влияние оказало прежде всего руководство Кестнера «Основания математики», ибо в нем он нашел выводы или по меньшей мере попытки вывода многих предложений, кажущихся очевидными, но по существу требующих доказательства. Позднее в изданных в 1810 г. «Замечаниях о более обоснованном изложении математики» [12] Больцано указал, что математика уже в течение пятнадцати лет является одним из любимых его занятий, и отметил, что обнаруживал в рассуждениях Кестнера все более и более различных недостатков, которые он пытается устранить. При этом он подчеркивал, что эта наука привлекает его «преимущественно в ее умозрительной части, как ветвь философии и средство упражнения в правильном мышлении» [12, с. XI]. В современной ему математике Больцано усматривал много дефектов и пробелов: в учении о числе, основаниях дифференциального исчисления, понятиях линии, площади и объема, теории параллельных и т. д.

Первой печатной работой Больцано по математике явились «Размышления о некоторых предметах элементарной геометрии» [13]. Это сочинение более интересно постановкой некоторых проблем, чем их решением, например указанием на необходимость уточнить понятие «между»,— обстоятельство, отмеченное затем в одном письме Гаусса от 1832 г. Теория подобия и теория параллельных Больцано не представляют научной ценности, а об открытии неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским и Я. Бояи он, по-видимому, никогда не узнал [14].

В 1816—1817 гг. Больцано выпустил в свет три математических труда. Мы подробнее остановимся на одном из них, содержащем фундаментальные открытия. Это

[3] «Наукознание» Больцано, разумеется, не следует смешивать с науковедением нашего времени, главным предметом которого служит совершенно другой круг вопросов.

опубликованное в трудах Королевского общества наук Богемии за 1817 г. «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между двумя любыми значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [15, 16].

После разработки Ньютоном и Лейбницем начал дифференциального и интегрального исчисления эта область математики получила в XVIII в. мощное развитие в различных направлениях и важные применения в механике и математической физике, а также во многих разделах самой математики. На рубеже XVIII и XIX вв. дальнейший прогресс математического анализа, а потому и его приложений задерживала недостаточная разработанность его оснований. Важнейшие понятия анализа зародились в геометрии и математическом естествознании, многие свойства и теоремы являлись аналогами кажущихся очевидными свойств геометрических или механических объектов. Однако подобная чисто интуитивная основа оказалась совершенно недостаточной на более высокой ступени развития анализа. Об этом, в частности, свидетельствовало возрастающее число случаев, в которых пользование примитивными интуитивными представлениями приводило к явным логическим противоречиям. В течение XVIII столетия анализ бесконечно малых приобретал характер все более автономной науки. В порядок дня ставилась задача его построения на более строгой, и притом чисто арифметической основе. Эйлер, Даламбер, Лагранж и многие другие ученые во многом подготовили почву для реформы анализа, но решающие преобразования начаты были только в первой четверти XIX в. Гауссом в Германии и несколькими годами позднее, совершенно независимо друг от друга, Больцано в Праге и Коши в Париже.

Теорема, о которой идет речь в данном труде, выражает важное свойство непрерывных функций одной переменной, которым математики пользовались издавна (в частности, для приближенного вычисления корней уравнений) и которое доказывали многие авторы. Их рассуждения Больцано разделил на две группы. К одной он отнес доводы, опирающиеся на то наглядное обстоятельство, что всякая непрерывная плоская линия, каждой абсциссе которой соответствует лишь одна ордината и ординаты которой на концах отрезка имеют разные знаки, по крайней мере один раз пересекает ось абсцисс в какой-либо промежуточной точке этого отрезка. Доказательства другой группы носят механический характер; в них исходят из того, что если одно движущееся по прямой тело было сначала позади другого, а под конец его опередило, то первое должно в какой-то момент пройти мимо второго. Признавая пользу этих предложений, как пояснений, Больцано принципиально отвергает их как средство доказательств. О первом рассуждении он писал:

«Против *верности*, а также *очевидности* этой геометрической теоремы возражать нечего. Но столь же очевидно также, что нетерпимым нарушением *хорошего метода* является, когда истины *чистой* (или общей) математики (т. е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат только *прикладной* (или специальной) ее части, а именно *геометрии*... Само собой очевидно, что подлинно научным доказательством или объективным основанием истины, которая верна для *всех* величин, безразлично, находятся ли они в пространстве или нет, не может быть истина, которая верна только для величин, находящихся в *пространстве*. Если придерживаться этого взгляда, то станет, наоборот, понятным, что подобное *геометрическое* доказательство как в большинстве случаев, так и в настоящем составляет настоящий (замкнутый — *А. Ю.*) круг». Несколько далее о доказательстве, к которому по словам Больцано, «примешиваются понятия времени и движения», он добавлял: «Никто, по-видимому, не станет отрицать, что понятие *времени*, а тем более *движения* столь же чужеродно в общей математике, как и понятие *пространства*» [15, с. 6—9; 16, с. 4—7].

В приведенных отрывках было, таким образом, в общем виде провозглашено методологическое первенство понятий и доказательств общей, в конечном счете числовой математики по отношению к интуитивным понятиям и умозаключениям, заимствованным из геометрии или наук о природе. Так, понятие непрерывной функции (о нем см. далее) методологически предшествует идее ее образа — непрерывной плоской линии. Эта концепция, как уже сказано, была подготовлена ходом развития анализа в XVIII в. и затем поздними трудами Лагранжа и ранними Гаусса; но только Больцано первый сформулировал ее как ведущую в преобразовании оснований анализа. Это еще не была завершенная «арифметизация анализа», как позднее выразился Ф. Клейн, но программная декларация необходимости арифметизации, продолжавшейся в течение всего XIX в. Как осуществлять эту программу, Больцано показал на примере теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции (из теоремы, доказываемой Больцано, непосредственно следует, что непрерывная функция, имеющая значения a и b, принимает по крайней мере один раз любое значение, промежуточное между a и b).

Формулировка, а затем доказательство теоремы требовали четкого аналитического определения понятия непрерывной функции. Во второй половине XVIII и начале XIX в. этот термин нередко употребляли в другом смысле, чем теперь, но, конечно, идеей непрерывности функции или кривой в нашем смысле математики *de facto* пользовались неоднократно. В первую очередь недоставало точного аналитического определения непрерывности, без которого немыслимо строго логическое изучение каких бы то ни было свойств непрерывных функций. Больцано сформулировал такое определение следующим образом: «Под выражением, что *функция $f(x)$* [4] *изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, понимают лишь то, что когда x есть какое-нибудь такое значение, то разность $f(x+\omega)-f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим*, или пусть будет (согласно обозначениям, введенным нами в § 14 *Биномиальной теоремы* и т. д. Прага, 1816) $f(x+\omega)=f(x)+\Omega$» [15, с. 11—12, 16, с. 7—8] [5].

Говоря о величине ω и разности $f(x+\omega)-f(x)$, Больцано, конечно, имел в виду соответствующие абсолютные значения, что в те времена особо не оговаривалось и никак не обозначалось,— общепринятый теперь знак абсолютного значения в виде двух вертикальных черточек был введен только в 1841 г. Вейерштрассом.

Доказательство основной теоремы Больцано опирается на два предложения, ставшие основоположными в анализе. Мы приведем их для простоты в современной терминологии, которой у Больцано не было. В первом утверждается, что бесконечная числовая последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ имеет определенный конечный предел в том, и только в том случае, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что для всех $n \geqslant N$ и любых натуральных p выполняется неравенство $|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$ [15, с. 35; 16, с. 21]. Второе предложение гласит: всякое бесконечное ограниченное множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань [15, с. 41; 16, с. 25]. При этом в своем выводе (содержащем, впрочем, один пробел, который он заметил позднее), Больцано применил так называемый (теперь) метод вложенных отрезков, получивший затем широкое применение. К этим результатам следует добавить важную теорему о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций, содержащуюся в работе Больцано, вышедшей в один год с только что рассмотренной: «Решение трех задач — спрямления, квадратуры и кубатуры без рассмотрения бесконечно малого, без постулатов Архимеда и без какого-либо не строго доказуемого предположения...» [18, с. 3, 4]. Обозначая две непрерывные функции $F(y)$ и $y=f(x)$, можно записать эту теорему формулой

$$\lim_{x\to a} F[f(x)]=F[\lim_{x\to a} f(x)]=F[f(a)].$$

Если бы все указанные открытия Больцано получили широкую известность вскоре после их публикации, прогресс математического анализа в различных направлениях был бы существенно ускорен. Но Больцано как математику была суждена только посмертная слава. В Чехии не было тогда ученых, способных продолжить начатое им дело арифметизации анализа, а в других странах его сочинения остались довольно долго незамеченными, не считая, кажется, одного исключения. Именно, в 1821 г. Н. И. Лобачевский, приобретая в Петербурге новые книги для библиотеки Казанского университета, купил экземпляр «Чисто аналитического доказательства...» [19, с. 20, 116]. Нет сомнений в том, что Лобачевский прочитал эту книгу. Много позднее он включил теорему об обращении в нуль целого алгебраического многочлена, имеющего на концах

---

[4] Больцано писал еще, как было принято в то время, не заключая аргумент x в скобки.

[5] В работе о биномиальной теореме [17] Больцано для обозначения сколь угодно малых величин применил буквы ω, Ω, следуя примеру докторской диссертации Гаусса, посвященной доказательству основной теоремы алгебры (1799).

отрезка противоположные знаки, в свой курс алгебры, изданный в 1834 г. [20, с. 233]; при выводе он использовал метод вложенных отрезков. Но Лобачевскому эта теорема, частный случай теоремы Больцано, была нужна только для приближенного вычисления действительных корней алгебраических уравнений. Разработкой новой системы математического анализа он специально не занимался.

Наряду и одновременно с Больцано точное определение непрерывной функции, высказанное в несколько других словах, и упомянутый критерий сходимости последовательности предложил Коши. Об этом свидетельствует первый мемуар Коши 1814 г. по теории интегрирования (изданный, впрочем, значительно позднее; [21]) и неопубликованные программы курсов, которые он читал в парижской Политехнической школе с 1816 г.[6]. Эти и другие многие свои открытия в области оснований анализа Коши опубликовал в курсе алгебраического анализа, изданном в 1821 г. [22], т. е. позднее, чем Больцано, но в математический обиход они вошли именно благодаря этому руководству Коши. Теперь общий признак сходимости последовательности называют чаще всего критерием Больцано — Коши.

Как ни велики заслуги Коши в обновлении оснований анализа, у него не было важной теоремы о верхней грани. Первое упоминание о ней в печати встречается в 1870 г. в статье Г. Кантора по теории тригонометрических рядов, где он, используя одно доказательство, сообщенное ему Шварцем, в сноске указал, что это доказательство опирается на следующую теорему, часто встречающуюся и доказанную в неопубликованных лекциях Вейерштрасса: «Заданная в интервале $(a\ldots b)$ вместе с его концами непрерывная функция $\varphi(x)$ действительного переменного x *достигает* максимума g значений, которые она может принимать, по крайней мере для одного значения переменной x_0, так что $\varphi(x_0)=g$» [23, с. 82]. В результате теорема Больцано о верхней грани получила сперва известность как теорема Вейерштрасса, в курсах которого она действительно стала одним из основных средств исследования. Между тем нет сомнений о том, что Вейерштрасс несколько ранее 1870 г. познакомился с «Чисто аналитическим доказательством» Больцано, которое таким образом, через полстолетия после выхода в свет оказало существенное влияние на разработку оснований анализа. Об этом свидетельствует письмо Шварца, бывшего слушателя Вейерштрасса, Кантору от 1 апреля 1870 г., в котором дана чрезвычайно высокая оценка этого труда Больцано. Среди прочего Шварц писал: «Мне представляется, что следует признать принципиальную важность имен Больцано и Вейерштрасса... Как и ты, я согласен с тем мнением, которое поддерживает в своих лекциях г. Вейерштрасс, что многие исследования не удались бы без тех выводов, которые В. развил, отправляясь от принципов Больцано». Тут же Шварц говорил о «Больцано-Вейерштрассовском способе вывода» [24, с. 228][7]. Впоследствии теорема о верхней грани получила принятое теперь название теоремы Больцано — Вейерштрасса. Вообще в 70-е годы XIX в. имя Больцано начинает приобретать все более широкую известность у математиков.

Все же с современной точки зрения доказательства в рассматриваемом труде Больцано содержали некоторые пробелы: обязательной предпосылкой полноты таких доказательств является наличие общей теории действительных чисел, но ее в то время не существовало (сказанное относится к различным доказательствам Коши и многих других ученых первой половины XIX в.). Недавно выяснилось, что Больцано сам заметил это обстоятельство и построил своеобразную теорию действительных чисел, которую изложил в оставшейся незаконченной рукописи, подготовленной примерно в 1830—1834 гг. Эта теория (близкая к теории Кантора), в подробности которой мы входить не будем, содержит пробелы, но может быть уточнена [9, 26]. Однако уже само осознание неполноты обоснования анализа без развитой теории действительного числа свидетельствует об исключительной логической тонкости мышления Больцано. Кажется, ни один из его современников не пришел к такой мысли, и отмеченный принципиальный пробел в самом фундаменте анализа вновь заметил только в 1858 г. Дедекинд,

---

[6] Ознакомлением с рукописью этой программы, хранящейся в секретариате Академии наук Института Франции, я обязан любезности г. Б. Белоста (B. Belhoste), изучающего биографию Коши.

[7] Возможно, что Вейерштрасс прочитал «Чисто аналитическое доказательство» еще раньше, до 1865 г. [см. 25, с. 95, 96].

а затем и другие математики (Мерэ, Кантор, Вейерштрасс), независимо друг от друга предложившие, как и Дедекинд, свои решения вопроса.

Упомянутое «Решение трех задач» [18] гораздо менее богато положительным содержанием, чем «Чисто аналитическое доказательство», но и в нем имеются интересные идеи, определяемые общей концепцией автора. Больцано замечает, что в «Началах» Евклида нет принципов, позволяющих обосновать измерение длин, площадей и объемов, а постулаты в сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» [8] являются не принципами, а вспомогательными предложениями, подлежащими доказательству. Вывод интегральных формул для спрямления, квадратуры и кубатуры должен, согласно Больцано, носить чисто аналитический характер. Самый вывод этих формул в «Решении трех задач» не был, и в то время не мог быть удачным. Но в своей постановке вопроса Больцано был прав и предвосхитил соответствующие теории, развитые в конце XIX в. на основе теории функций действительного переменного. Напомним, что Клейн в 1898 г. с полным основанием мог заявить, что нет ничего более неясного, чем понятие непрерывной кривой, и что удовлетворительное определение этого понятия было дано лишь в 20-е годы нашего столетия П. С. Урысоном и, независимо от него К. Менгером. Определяя «пространственный предмет» (*Raumding*) как произвольную систему конечного или бесконечного множества точек, Больцано также приближался к позднейшей теоретико-множественной трактовке вопроса. Между прочим, в рукописях Больцано была обнаружена теорема: «Всякая простая замкнутая линия, лежащая на плоскости, делит ее на две части, отличающиеся друг от друга тем, что все точки плоскости, не лежащие на этой линии, лежат либо с одной, либо с противоположной стороны от линии» [10, с. 132]. Опубликовал эту важную топологическую теорему и ее (неполное) доказательство только в 1882 г. К. Жордан, под именем которого она фигурирует в современной математической литературе.

Теория действительных чисел Больцано должна была войти в состав большого труда — «Учения о величинах», который не был закончен. В этот же труд Больцано намеревался включить и «Учение о функциях», также незаконченное и даже не отредактированное автором. Написанное около 1830 г., оно было обнаружено только около 1920 г. профессором М. Яшеком и полностью опубликовано десять лет спустя профессором К. Рыхликом, который подготовил к печати и рукопись Больцано по теории действительных чисел.

«Учение о функциях» состоит из введения и двух частей, посвященных соответственно общей теории непрерывных функций и теории производных функций. Математический гений Больцано проявляется здесь с особенной силой, и вся конструкция этого труда убедительно показывает, насколько глубже проникает в основания анализа исследование, не стесненное рамками примитивной пространственной или механической интуиции, и вместе с тем насколько совершеннее становится сама геометрическая интуиция, обогащенная приемами строгого логического анализа. В первой части Больцано, исходя из общего определения функции, которое в печати особенно выпукло сформулировали Лобачевский (1834) и Лежен-Дирихле (1837), исследует основные свойства непрерывных функций и приводит примеры непрерывных и разрывных функций, обладающих разнообразными особенностями. Включая в изложение основные результаты «Чисто аналитического доказательства», он продвигается теперь гораздо далее. Так, он показывает, например, что вопреки распространенному мнению свойство непрерывности функции на отрезке вовсе не совпадает со свойством принимать на нем всякое значение, промежуточное между двумя какими-либо данными: функция, принимающая на отрезке все значения между какими-либо двумя значениями на его концах, может быть везде разрывной. Возможность такого рода случаев никому в то время не приходила в голову, а в печати их привел только в 1875 г. Г. Дарбу.

Но особенно замечательной является так называемая теперь «функция Больцано». Эта функция вводится в § 75 первой части чисто аналитически, посредством бесконечного повторения одного и того же приема, но в основе лежала геометрическая конструкция, дополненная смелым предельным переходом, зрительно непредставимым. Функция

[8] В этих постулатах идет речь о сравнении длин дуги кривой и стягивающей ее хорды, объемлющей и объемлемой выпуклых дуг с общими концами и т. п.

Больцано является предельной для последовательности непрерывных функций, изображаемых ломаными с концами в концах данного отрезка и со звеньями, число которых неограниченно возрастает по некоторому закону, а длины стремятся к нулю. В том же параграфе Больцано доказывает, что его функция не является монотонной (т. е. только возрастающей или только убывающей) ни в одном сколь угодно малом промежутке, принадлежащем данному отрезку. Доказательство непрерывности этой функции у самого Больцано содержит некоторый пробел, так как в то время не было еще выделено понятие равномерной сходимости.

В § 19 второй части этого труда устанавливается другое, еще более поразительное свойство функции Больцано. Математики его эпохи были твердо уверены в том, что всякая непрерывная функция, вообще говоря, дифференцируема, за исключением, быть может, отдельных точек. Это соответствовало наглядному представлению о непрерывной плоской кривой как о линии, имеющей в каждой точке определенную касательную (т. е. единственный предел секущих, проходящих через эту точку), за исключением, быть может, отдельных особых точек. Больцано доказывает, что его функция не имеет производной ни в одной точке всюду плотного множества точек на данном отрезке. Несколько дополнив рассуждения Больцано, можно доказать, что его функция не имеет конечной производной вообще ни в одной точке области ее задания [27]. И этот результат полностью выходил за пределы общепринятых геометрических или физических представлений. Через сорок лет аналитические примеры непрерывных и нигде не дифференцируемых функций были доложены Берлинской Академии наук Вейерштрассом (1872) и Парижской Академии — Дарбу (1873), а опубликованы в одном и том же 1875 г. Правда, к этой мысли — не во всей ее полноте — подходили в начале 50-х годов Лежен-Дирихле и Риман, но они не подкрепили ее определенной аргументацией [28, с. 208—222]. Сравнивая Больцано с такими великими его современниками, как Гаусс и Коши, можно сказать, что последние преобразовывали главным образом основы классического анализа, между тем как Больцано создавал основы теории функций действительного переменного, интенсивная разработка которой началась лишь через двадцать — двадцать пять лет после его кончины.

Из всего огромного рукописного наследия Больцано (до сих пор не полностью изданного и даже изученного) в XIX в. увидели свет, как говорилось ранее, только «Парадоксы бесконечного», опубликованные в 1851 г. [7]. Начав подготовку этой книги летом 1847 г., т. е. за полтора года до смерти, Больцано не успел ее отшлифовать и потому в ней есть некоторые неточности. В целом же «Парадоксы бесконечного» явились первым шагом на пути к созданию современной теории множеств. Это сочинение имеется в прекрасном русском переводе [29], и поэтому мы ограничимся лишь самыми необходимыми замечаниями. Как известно, еще со времен Зенона с проблемой бесконечного связано было множество трудностей, и, в то время как одни ученые, как, например, Лейбниц, принимали существование актуальной бесконечности, другие требовали ее исключения из математики, считая законным применение только потенциально бесконечно больших или малых величин. Такова была в эпоху Больцано позиция авторитетного Гаусса. Руководящей идеей «Парадоксов» была реабилитация понятия актуальной бесконечности. Больцано еще не удалось разработать последовательную систему теории множеств, но мы находим у него ряд интересных подходов. В частности, он вплотную подошел к самому понятию бесконечного множества как такого, элементы которого могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с элементами какого-либо множества, являющегося его частью. Эту мысль более отчетливо выразил Кантор в 1878 г. и принял за определение бесконечного множества Дедекинд в 1888 г. Можно указать и на другие моменты этого труда, сближающие Больцано с Кантором и Дедекиндом,— трактовку понятия континуума, постановку проблемы изучения точечных множеств и их размерности и т. д. [30, с. 74—77]. Все же в целом это сочинение несет на себе печать незавершенности. Трудно сказать, какое влияние оно оказало на Кантора, приступившего в 70-е годы к разработке теории множеств, исходя из совсем других задач; во всяком случае имя Больцано, как мы видели, было ему тогда известно, и можно полагать, что он, вероятно, заинтересовался и «Парадоксами бесконечного». Сам Кантор с высокой похвалой отозвался об этой книге в одном из своих трудов, опубликованном в 1883 г., отмечая вместе с тем неполноту системы понятий и определений своего чешского предшественника [23, с. 179—180, 194].

Человечество, оценивая деятельность и творчество людей науки, рассматривает все их стороны. Больцано явил всей своей жизнью высокий образец преданного служению добру и истине, социальному и научному прогрессу. Имя его навсегда записано золотыми буквами во всемирную историю культуры.

Литература

1. Успехи матем. наук. 1949, т. IV, вып. 2.
2. Lebensbeschreibung des Dr. Bernard Bolzano... Sulzbach, 1836.
3. *Kaestner A. G.* Mathematische Anfangsgründe. Göttingen, 1792—1799.
4. *Bolzano B.* Erbauungsreden, B. I—IV. Prag — Wien, 1813—1855.
5. *Bolzano B.* Von dem besten Staate. Praha, 1932.
6. *Bolzano B.* Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstenteils neuen Darstellung der Logik... B. I—IV. Sulzbach; 1837.
7. *Bolzano B.* Paradoxien des Unendlichen. Hsg. von F. Prihonsky. Leipzig, 1851.
8. *Bolzano B.* Functionenlehre. Hsg. von K. Rychlik. Praha, 1930.
9. *Rychlik K.* Theorie der reellen Zahlen in Bolzanos handschriftlichen Nachlasse. Prag, 1962.
10. *Winter E., Funk P., Berg J.* Bernard Bolzano. Ein Denker und Erzieher im Osterreichischen Vormärz. Wien, 1967.
11. *Стяжкин Н. И.* Становление идей математической логики. М.: Наука, 1964.
12. *Bolzano B.* Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Prag, 1810.
13. *Bolzano B.* Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie (darunter eine Theorie der Parallelen). Prag, 1804.
14. *Folta J.* Bernard Bolzano and the foundations of geometry. Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum. Prague; 1966, Special issue 2, p. 75—104.
15. *Bolzano B.* Rein analytischen Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleicung liege. Prag, 1817.
16. *Bolzano B.* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, weningstens eine reele Wurzel der Gleichhung liege. In: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig, 1905, № 153.
17. *Bolzano B.* Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische... genauer als erwiesen. Prag, 1816.
18. *Bolzano B.* Die drei Probleme der Rektifikation, Komplanation und Kubirung ohen Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft au allen Mathematikern zur Pfüfung vorgelegt. Leipzig, 1817.
19. *Каримуллин А. Г., Лаптев Б. Л.* Что читал Лобачевский? Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979.
20. *Лобачевский Н. И.* Алгебра или вычисление конечных. Казань, 1834. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. Т. 4, М.— Л.: Гос. изд-во тех.-теоретич. лит-ры, 1948.
21. *Юшкевич А. П.* О возникновении понятия об определенном интеграле Коши.— Тр. Ин-та истории естествознания, М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1947, т. I, с. 373, 411.
22. *Cauchy A. L.* Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Ie partie. Analyse algébrique. P., 1821.
23. *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hsg. von E. Zermelo. B., 1932.
24. *Meschkowski H.* Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig, 1967.
25. *Dugac P.* Histoire du théorème des accroissements finis.— Arch. internat. histoire sci., 1980, v. 30, № 105, p. 86—101.
26. *van Rootselaar B.* Bolzano's theory of real numbers. Arch. history exact sci., 1964, v. 2, p. 169—180.
27. *Бржечка В. Ф.* О функции Больцано.— Успехи матем. наук, 1949, т. IV, вып. 2, с. 15—21.
28. *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.
29. *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного/Пер. под ред. И. В. Слешинского. Одесса: Матезис, 1911.
30. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.

Примечание. Ранние математические сочинения Больцано № 12, 13, 15, 17 и 18 фотографически воспроизведены в кн. Bolzano B. (1781—1848). Bicentenary. Early mathematical works. Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum. Special issue 12. Editor L. Nový. Prague, 1981.