

была закончена Книга III). 5 апреля 1687 г. Галлей, взявший на себя все хлопоты по публикации «Начал» и даже заплативший издателю из своего кармана, сообщил Ньютону, что получил «последнюю часть его божественного трактата». 5 июля 1687 г. книга была напечатана.

* * *

Мы не можем сейчас с полной определенностью сказать, какую именно работу получил Галлей от Ньютона после своего первого визита в Кембридж в августе 1684 г., но, по всей вероятности, это был один из вариантов трактата, написанного тогда же, т. е. летом 1684 г. Внимание к нему историков было привлечено благодаря исследованиям Роуз Болла в 1893 г. [6], а в наше время он был издан А. Р. и М. Б. Холлами [7] и Д. Т. Уайтсайдом [8]. Этот трактат, содержащийся в Портсмутской коллекции рукописей Ньютона, предшествует копии «*Propositiones de Motu*» и является самым ранним наброском «Начал». Он имеет четыре варианта и хранится под шифром М. S. Add. 3965; издатели «Неопубликованных научных работ И. Ньютона» А. Р. Холл и М. Б. Холл, датируют их, как уже было сказано, летом 1684 г., они же дают их описание: «А. лл. 21—24, написан по-латыни рукой Ньютона под заглавием «*De Motu Corporum*».

В. лл. 55—62 bis, написан по-латыни рукой Ньютона под заглавием «*De Motu Corporum in girum*».

С. лл. 63—70, написан копиистом по-латыни, без заглавия.

Д. лл. 40—54, написан копиистом по-латыни под заглавием «*De Motu sphaericorum Corporum in fluidis*».

А — вариант определений (напечатанных позднее в «Началах») со многими исправлениями и вставками между строк, обрывающийся в конце последнего параграфа.

В, С и D — последовательные варианты, сходные с «*Propositiones de Motu*» Королевского общества. По-видимому, В — наиболее ранний вариант, позднее поправленный Ньютоном. Вероятно, что С — его грубая копия, куда включены и некоторые новые мысли. D — окончательная версия, аккуратно переписанная, возможно, Хэмфри Ньютоном [секретарь и однофамилец И. Ньютона, — В. К.], она представляет наиболее полный и отточенный вариант» [7, с. 238—239].

Ниже публикуется русский перевод варианта D этого трактата.

ON THE GENESIS OF I. NEWTON'S «PRINCIPIA»

V. S. KIRSANOV

Evolution of I. Newton's views on the nature of gravitation is considered. An attempt to explain a twenty years delay of the publication of the gravitation law is made. This delay may be connected with necessity of working out the principles of dynamics and also recognizing the significance of two first Kepler's laws.

О ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

ИСААК НЬЮТОН

Определения

Опр. 1. Я называю центростремительной силой то, посредством чего тело притягивается или приводится в движение по направлению к некоторой точке, рассматриваемой как центр¹.

Опр. 3. И сопротивлением [называю] то, что неизменно свойственно создающей помеху среде.

Опр. 4. Выражения количеств есть любые другие количества, пропорциональные тем, которые рассматриваются.

Гипотезы

Закон 1. Под действием одной лишь врожденной силы тело продолжает идти равномерно и прямолинейно, если ничто ему не препятствует³.

Закон 2. Изменение состояния движения или покоя пропорционально приложенной силе и происходит по прямой линии, по которой та сила действует⁴.

Закон 3. Относительные движения тел, заключенных в данном пространстве, являются теми же самыми, находится ли это пространство в покое или же движется постоянно и равномерно по прямой линии без кругового движения⁵.

Закон 4. Общий центр тяжести не изменяет своего состояния движения или покоя вследствие взаимодействия тел. Это следует из Закона 3⁶.

Закон 5. Сопротивление среды пропорционально плотности этой среды, а также сферической поверхности движущегося тела и его скорости, вместе взятым.

Леммы

Лемма 1. В результате совместного действия сил тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как если бы оно описывало стороны в результате раздельного действия сил⁷.

Если в данное время под действием одной лишь силы m (рис. 1) тело переместится из A в B , а под действием одной лишь силы n — из A в C , то можно построить параллелограмм $ABDC$, и оно переместится под действием обеих сил из A в D за то же самое время. Ибо, так как сила m действует по линии AC , параллельной BD , по Закону 2 эта сила совершенно не изменяет скорости по направлению к линии BD , создаваемой другой силой. Следовательно, тело достигнет линии BD в то же самое время, приложена сила AC или нет, а в конце этого времени тело будет находиться где-то на линии BD . По тому же рассуждению оно будет находиться на линии CD в конце того же времени, и поэтому оно должно находиться в D , точке пересечения двух линий.

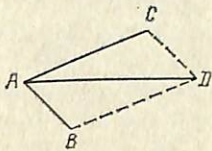


Рис. 1

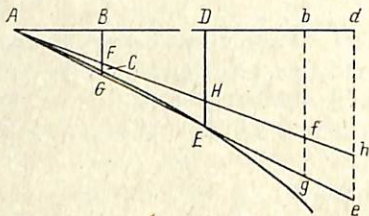


Рис. 2

Лемма 2. Пространство, описываемое телом, в то время как оно понуждается любой центростремительной силой, в начале своего движения пропорционально квадрату времени⁸.

Пусть времена представляются линиями AB, AD (рис. 2). Возьмем Ab, Ad , пропорциональные данным линиям, и пространства, описанные под действием однородной центростремительной силы, представлены с помощью площадей ABF, ADH с перпендикулярами BF, DH и ограниче-

ны любой прямой линией AFH , как объяснил Галилей. Но пусть пространства, описанные под действием неоднородной центростремительной силы, представлены площадями ABC , ADE , ограниченными любой кривой ACE , которая касается прямой AFH в точке A . Проведем прямую линию AE , пересекающуюся с параллелями BF , bf , dh в G , q , e , а AFH пересекается с bf , dh проведенными через f и h . Так как площадь ABC больше площади ABF , но меньше площади ABG , и криволинейная площадь $ADEC$ больше, чем площадь ADH , но меньше, чем площадь $ADEG$, [отношение] площади ABC к площади $ADEG$ будет больше, чем [отношение] площади ABF к площади $ADEG$, но меньше, чем [отношение] площади ABC к площади ADH , т. е. больше, чем [отношение] площади Abf к площади Ade , но меньше, чем отношение площади Abg к площади Adh . Пусть теперь линии AB , AD уменьшаются в их данном отношении, пока точки A , B , D не совпадут, и линия Ae совпадает с касательной Ah , и так последние отношения Abf к Ade и Abg к Adh станут такими же, как отношение Abf к Adh . Но это отношение есть квадрат отношения Ab к Ad или AB к AD ; следовательно, отношение ABC к $ADEC$ — промежуточное между крайними отношениями, становится уже квадратом отношения AB к AD , т. е. последнее отношение исчезающих пространств или первое отношение возникающих пространств есть квадрат отношения времен.

Лемма 3. Количества, пропорциональные своим разностям, пропорциональны непрерывно.

Пусть A относится к $A-B$, как B к $B-C$ и как C к $C-D$ и т. д. и при помощи производной пропорции⁹ получим, что A будет относиться к B , как B к C и как C к D и т. д.

Лемма 4. Все параллелограммы¹⁰, описанные вокруг данного эллипса, равны между собой.

Это известно из свойств конических сечений.

Теоремы

1. Все обращающиеся тела радиусами, проведенными к центру, описывают площади, пропорциональные временам.

2. Центростремительные силы в телах, обращающихся равномерно по окружности кругов, относятся, как квадраты дуг, описываемых в одно и то же время, поделенных¹¹ на радиусы кругов.

Следствие 1. Центростремительные силы относятся, как квадраты скоростей, поделенных на радиусы.

2. И обратно пропорционально квадратам периодических времен, поделенных на радиусы.

3. Откуда, если квадраты периодических времен относятся, как радиусы кругов, центростремительные силы равны, и наоборот.

4. И если квадраты периодических времен относятся, как квадраты радиусов, центростремительные силы относятся обратно пропорционально радиусам.

5. Если квадраты периодических времен относятся, как кубы радиусов, центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов.

3. Центростремительная сила тела, обращающегося вокруг точки, обратно пропорциональна объему, образованному квадратом расстояния, умноженным на квадрат перпендикуляра к расстоянию из точки на периферии, поделенному на параллель, проведенную из той же самой точки на периферии к касательной.

Следствие. Отсюда, если будет дана какая-нибудь [геометрическая] фигура и точка в ней, к которой направлена центростремительная сила, то можно определить закон [изменения] центростремительной силы, по-

средством которой тело обращается по периметру этой фигуры, разумеется, подсчитав при этом объем, обратно пропорциональный данной силе. Примеры даются в следующих задачах.

Задачи

1. Тело обращается по окружности круга; найти закон центростремительной силы, направленной к любой точке на окружности.

2. Тело обращается по эллипсу древних; найти закон центростремительной силы, направленной к центру эллипса.

3. Тело обращается по эллипсу; найти закон центростремительной силы, направленной к фокусу эллипса.

Теорема 4. Предположим, что центростремительная сила может быть обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра, тогда квадраты периодических времен при движении по эллипсу относятся, как кубы поперечных осей.

Задача 4. Предположив, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния и поскольку величина этой силы известна, требуется [определить] эллипс, который тело описывает при движении из данной точки с данной скоростью по данной прямой линии.

Задача 5. Предположив, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра, определить расстояния, которые тело, падая по прямой линии, описывает в данные промежутки времени.

6. Определить движение тела, перемещающегося посредством одной лишь врожденной силы, в равномерно сопротивляющейся среде.

7. Предположив центростремительную силу равномерной, определить движение тела, поднимающегося и опускающегося по прямой линии в однородной среде.

С помощью двух последних задач станут ясными движения снарядов в нашем воздухе, из гипотезы, что этот воздух однороден и что тяжесть действует равномерно вдоль параллельных линий.

О движении тел в несопротивляющихся средах

Теорема 1. Все обращающиеся тела радиусами, проведенными к центру, описывают площади пропорционально временам.

Пусть время поделено на равные части, и пусть в течение первого интервала тело под действием врожденной силы описывает прямую линию AB (рис. 3). Тогда, в течение второго промежутка времени, если

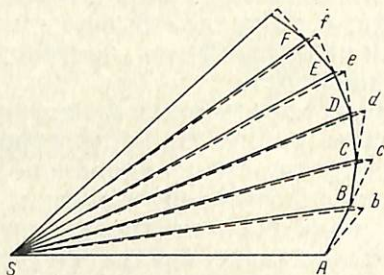


Рис. 3

ничто не помешает, оно дойдет по прямой до c , описывая прямую линию Bc , равную AB , таким образом, что если провести к центру радиусом AS , BS , cS , будут построены равные площади ASB , BSc . Однако, когда тело придет в B , подействует центростремительная сила при помощи единичного большого импульса и заставит тело отклониться от прямой линии

BC и продолжать движение по прямой линии BC . cC проводится параллельно самой BS и пересекается с BC в C , и когда истечет второй интервал времени, тело будет находиться в C . Соединим S с C , треугольник SBC будет равен¹² треугольнику Sbc , потому что SB и Cc параллельны, — а также треугольнику SAB . При помощи подобного рассуждения [получается, что,] если центростремительная сила действует последовательно в C, D, E и т. д., заставляя тело в отдельные моменты времени описывать отдельные и прямые линии CD, DE, EF и т. д., треугольник SDC будет равен треугольнику SBC , и SDE равен SCD , и SEF [равен] SDE . В равные промежутки времени, следовательно, описываются равные площади. Пусть число таких треугольников будет бесконечно, а каждый из них — бесконечно малым, так что отдельные треугольники соответствуют отдельным мгновениям времени, тогда утверждение будет справедливо для центростремительной силы, действующей непрерывно¹³.

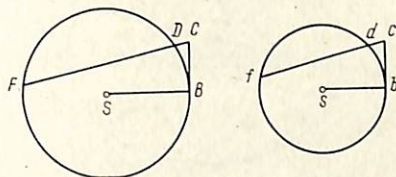


Рис. 4

Теорема 2. В телах, обращающихся равномерно по окружностям кругов, центростремительные силы относятся, как квадраты дуг, описанных в данное время, поделенных на радиусы кругов.

Тела B, b , обращающиеся по окружностям кругов BD, bd , описывают дуги BD, bd в то же самое время (рис. 4). Под действием одной лишь врожденной силы они бы описали касательные BC, bc , равные этим дугам. Центростремительные силы — это такие [силы], которые непрерывно возвращают тела от касательных к окружностям, и силы относятся друг к другу, как расстояния разностей CD, cd ; т. е. при продолжении CD, cd к F и f [силы относятся] как BC^2/CF к bc^2/cf или как $BD^2/\frac{1}{2}CF$ к $bd^2/\frac{1}{2}cf$. Я говорю о расстояниях BD, bd как о чрезвычайно малых и

уменьшаемых до бесконечности, так что вместо $\frac{1}{2}CF, \frac{1}{2}cf$ можно было бы написать радиусы кругов SB, sb , и если это сделано, то предложение справедливо¹⁴.

Следствие 1. Центростремительные силы относятся, как квадраты скоростей, поделенные на радиусы.

Следствие 2. И обратно пропорционально квадратам периодических времен, поделенным на радиусы.

Следствие 3. Отсюда, если квадраты периодических времен относятся, как радиусы кругов, центростремительные силы равны, и наоборот.

Следствие 4. Если квадраты периодических времен относятся, как квадраты радиусов, центростремительные силы обратно пропорциональны радиусам.

Следствие 5. Если квадраты периодических времен относятся как кубы радиусов, центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов¹⁵.

Поучение. Случай пятого следствия имеет место для небесных тел. Квадраты периодических времен относятся как кубы расстояний от общего центра, вокруг которого они обращаются. Астрономы полагают, что это имеет место для больших планет, обращающихся вокруг Солнца, и для малых планет, обращающихся вокруг Юпитера¹⁶.

Теорема 3. Если тело P , обращаясь вокруг центра S , описывает какую-либо кривую линию APQ (рис. 5); и если прямая линия PR касается этой кривой в какой-либо точке P , и к этой касательной из произвольной точки Q проводится QP , параллельная SP , и на линию SP опускают перпендикуляр QT , я утверждаю, что центростремительная сила будет обратно пропорциональна объему $(SP^2 \times QT^2)/QR$, если [понимать, что] величина этого объема всегда принимает предельное значение, когда точки P и Q стремятся совпасть.

Ибо в неопределенно малой фигуре $QRPT$ малая линия QR , если время задано, пропорциональна центростремительной силе, а если задана сила, пропорциональна квадрату времени, а если не задано ни то, ни

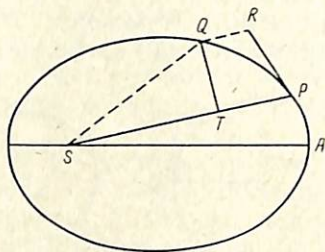


Рис. 5

другое, пропорциональна центростремительной силе и квадрату времени, вместе [взятым], т. е. пропорциональна центростремительной силе, взятой однократно, и дважды площади SPQ , пропорциональной времени, или двойному ее значению $(SP \times QT)$. Пусть каждая часть этого отношения поделена на малую линию QR , и мы получим, что единица пропорциональна центростремительной силе и $\frac{(SP^2 \times QT^2)}{QR}$, вместе взятым,

т. е. центростремительная сила обратно пропорциональна $\frac{(SP^2 \times QT^2)}{QR}$, что и требовалось доказать¹⁷.

Следствие. Отсюда, если задана любая фигура и точка на ней, к которой направлена центростремительная сила, можно определить закон центростремительной силы, которая заставляет тело обращаться по периметру этой фигуры. Конечно, объем $(SP^2 \times QT^2)/QR$, обратно пропорциональный этой силе, должен быть подсчитан. Примеры этого [расчета] мы дадим в следующих задачах¹⁸.

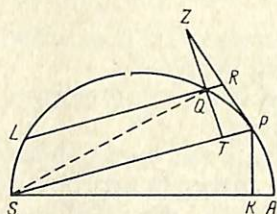


Рис. 6

Задача 1. Тело движется по окружности круга; требуется определить закон центростремительной силы, направленной к любой точке на окружности.

Пусть $SPQA$ есть окружность круга, S — центр центростремительной силы, тело по окружности выносится к P , Q — следующее положение, к которому она движется (рис. 6); опустим перпендикуляры PK , QT на диаметр SA и на SP ; затем проведем через Q LR , параллельную SP ,

пересекающую окружность в L и касательную PR в R . RP^2 (т. е. QRL) будет относиться к QT^2 , как SA^2 к SP^2 . Следовательно, $[(QRL \times SP^2)/SA^2] = QT^2$. Умножим эти равные величины на SP^2/QR , и когда точки P и Q сольются, мы можем вместо RL написать SP и тогда получим

$$\frac{SP^5}{SA^2} = \frac{QT^2 \times SP^2}{QR}.$$

Следовательно, центростремительная сила обратно пропорциональна SP^5/SA^2 , т. е. (так как SA^2 дано) обратно пропорциональна пятой степени расстояния SP . Что и требовалось найти¹⁹.

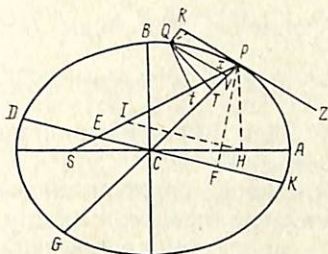


Рис. 7

Поучение. Более того, в этом и подобных случаях следует понимать, что после того, как тело достигнет центра S , оно не возвратится снова на орбиту, но замедлится по касательной. Для спирали, которая пересекает все радиусы под данным углом, центростремительная сила, направленная к началу спирали, обратно пропорциональна третьей степени расстояния²⁰; но в начале спирали никакая прямая не касается спирали ни в каком определенном положении.

Задача 2. Тело обращается по эллипсу древних; найти закон центростремительной силы, направленной к центру эллипса.

Примем CA , CB за полуоси эллипса (рис. 7); GP , DK — сопряженные диаметры; PF , QT — перпендикуляры к диаметрам; QV — ордината, проведенная к диаметру GP ; и $QVPR$ — параллелограмм. Из этого построения будет [следовать] (из свойств конических сечений), что PVG так относится к QV^2 , как PC^2 к CD^2 и $\frac{QV^2}{QT^2} = \frac{PC^2}{PF^2}$, и, комбинируя отноше-

ния, $\frac{PVG}{QT^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \times \frac{PC^2}{PF^2}$; т. е. VG так относится к $\frac{QT^2}{PV}$, как PC^2 к $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Запишем QR вместо PV и $BC \times CA$ вместо $CD \times PF$, а также (так как Q и P совпадают) $2PC$ вместо VG , и, перемножив крайние и средние, будем иметь $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$; следовательно, центростремительная сила обратно пропорциональна $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. То есть, по-

скольку $2BC^2 \times CA^2$ дано, обратно пропорциональна $1/PC$, т. е. прямо пропорциональна отрезку PC . Что и требовалось найти²¹.

Задача 3. Тело обращается по эллипсу; найти закон центростремительной силы, направленной к фокусу²² эллипса.

Строим эллипс с главным фокусом S , проводим SP , пересекающую диаметр эллипса DK в E [и линию QV в x , и построим параллелограмм $OxPR$]. Ясно, что EP равна большей полуоси AC , потому что, проводя из другого фокуса эллипса H линию HI , параллельную EC , так как CS , CH равны, ES , EI будут равны, так что EP будет полусуммой PS , PI ; т. е. (так как HI , PR параллельны и углы IPR , HPZ равны) полусуммой

одно и то же время по эллипсам и по окружностям, диаметры которых равны поперечным осям эллипсов. Но (по Следствию 5, Теоремы 2) квадраты периодических времен для окружностей относятся, как кубы диаметров, и отсюда таковы же они для эллипсов. Что и требовалось доказать²⁴.

Почтение. Отсюда, в небесной Системе, из периодических времен планет могут быть получены отношения поперечных осей орбит. Пусть будет дана одна ось. Тогда и другие будут даны. По данным осям орбиты могут быть определены следующим образом. Пусть S — положение Солнца, или же один фокус эллипса, A, B, C, D — положения планет, полученные из наблюдений, и Q — поперечная ось эллипса (рис. 9). Пусть круг FG будет описан радиусом $Q-AS$ из центра A , и другой фокус эллипса будет находиться на его окружности. Из центров B, C, D и т. д. отрезками $Q-BS, Q-CS, Q-DS$ и т. д. таким же самым образом пусть будет описан ряд других кругов, и другой фокус будет [лежать] на окружностях всех этих кругов, а следовательно, в точке их общего пересечения F . Если все пересечения не совпадут, то за фокус нужно выбрать среднюю точку. Преимущество этого метода состоит в том, что для того, чтобы получить однозначный вывод, любое количество наблюдений можно свести воедино и легко сравнить [их] между собой. Галлей показал, как найти отдельные положения планет A, B, C, D и т. д. из двойных наблюдений, если известна большая [годовая] орбита Земли. Если, однако, эта большая орбита определена недостаточно точно, орбита любой планеты, скажем, Марса, будет определяться более точно на основе этого приближенного знания, и отсюда, при помощи орбиты этой планеты тем же самым методом будет определена орбита Земли с большим правдоподобием, нежели до сих пор. Затем на основании [знания] орбиты Земли будет определяться орбита планеты гораздо точнее, чем прежде. И так — шаг за шагом, пока пересечения кругов не совпадут в фокусе обеих орбит достаточно точно.

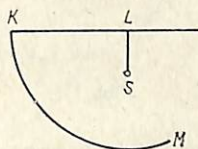


Рис. 10

Этим методом можно определить орбиты Земли, Марса, Юпитера и Сатурна; орбиты же Венеры и Меркурия следующим образом. Из наблюдений, произведенных при наибольшем отклонении [угловом расстоянии] планеты от Солнца, проводятся касательные к орбитам (рис. 10). К такой касательной KL опускается из Солнца перпендикуляр SL , и из центра L радиусом, равным полуоси эллипса описывается круг KM . Центр эллипса будет лежать на его окружности; и когда будет проведено множество подобных кругов, его обнаружат в точке их пересечения. Наконец, когда размеры орбит известны, долготы этих планет затем определятся более точно при их прохождении через диск Солнца.

Более того, все пространство планетарного неба либо покоится (как обычно полагают), либо равномерно движется по прямой линии, и аналогично общий центр тяжести планет (по Закону 4) либо покоится, либо движется в то же самое время. В любом случае движения планет относительно друг друга происходят тем же самым образом по Закону 3), и их общий центр тяжести находится в покое по отношению ко всему пространству, и таким образом, должен рассматриваться как неподвижный центр всей планетной системы. Откуда, в действительности, коперниканская система доказывается априори. Ибо, если общий центр тяже-

сти рассчитывается для любого расположения планет, он либо лежит в теле Солнца, либо всегда будет находиться очень близко от него. При смещении Солнца от центра тяжести случается, что центростремительная сила не всегда направляется к неподвижному центру, и отсюда, что планеты не обращаются в точности по эллипсу и не возвращаются дважды на одну и ту же орбиту. Столько орбит у этой планеты, сколько обращений, как это происходит при движении Луны, и каждая орбита зависит от совместного движения всех планет, так что я уже умолчу об их действии друг на друга. Если я не слишком ошибаюсь, [необходимость] рассматривать одновременно столь много причин движения и определять сами движения посредством точных законов, допускающих простые расчеты, превосходит силу человеческого разума. Оставьте в стороне эти тонкости, и простая орбита, т. е. среднее между всеми вариациями, будет эллипсом, что я уже обсуждал. Если бы кто-нибудь попытался определить этот эллипс посредством тригонометрических расчетов, исходя из трех наблюдений (как обычно), то он стал бы продвигаться [в решении] без предосторожностей. Ибо наблюдения включают те из малых нерегулярностей движения, которыми я здесь должен пренебречь, и они заставят эллипс отклониться от правильной своей величины и положения (которые должны быть средними среди всех вариаций); может быть получено столько эллипсов, отличных друг от друга, сколько используется тройных наблюдений. Следовательно, должно быть как можно больше наблюдений взято вместе и объединено единой процедурой [вычисления], чтобы они взаимно дополнили друг друга и привели к эллипсу, среднему по величине и положению.

Рис. 11

RFS есть угол RPH , и [этим] задано положение линии PH , где расположен другой фокус H . Когда перпендикуляр SK опущен на PH и проведена малая полуось BC ,

$$SP^2 - 2KP \cdot PH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = (SP + PH)^2 - L(SP + PH) = SP^2 + 2SP \cdot PH + PH^2 - L(SP + PH).$$

Прибавим к обеим частям $2KP \times PH + L(SP + PH) - SP^2 - PH^2$ и выражение примет вид $L(SP + PH) = 2SP \times PH + 2KP \times PH$; или $SP + PH : PH = 2SP + 2KP : L$. Отсюда задан и другой фокус H . А если даны два фокуса вместе с поперечной осью $SP + PH$, то эллипс задан. Что и требовалось найти.

Это происходит, таким образом, там, где фигура является эллипсом. Но может статься, что тело будет двигаться по параболе или гиперболе. Конечно, если скорость тела такова, что главный параметр

$$L = 2SP + 2KP.$$

фигура будет параболой, имеющей фокус в точке S , и все диаметры параллельны линии PH . Но если тело пущено с еще большей скоростью, то оно будет двигаться по гиперболе, имеющей один фокус в точке S , а другой в точке H , взятой на стороне, противоположной по отношению к точке P и имеющей поперечную ось, равную разности между PS и PH ²⁵.

Получение. Теперь преимущество [метода] решения этой задачи состоит в том, что он позволяет найти орбиты планет, а затем времена обращения. Далее, из величины орбит, эксцентриситетов, афелиев, наклонов к плоскости эклиптики и узлов орбит, сравненных друг с другом, мы можем узнать, возвращается ли к нам одна и та же комета снова и

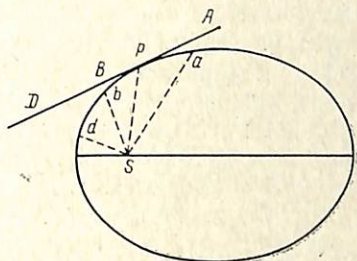


Рис. 12

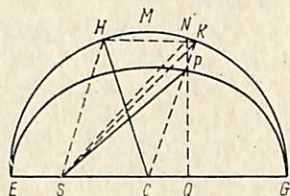


Рис. 13

снова. Из четырех наблюдений за местоположениями кометы вместе с гипотезой, что кометы движутся равномерно по прямым линиям, может быть определена ее прямолинейная траектория. Пусть она есть $APBD$ и пусть A, P, B, D — положения кометы на орбите, соответствующие временам наблюдений, а S — положение Солнца (рис. 12). Представим, что комета движется из одного из своих положений P , имея ту же самую скорость, с которой она равномерно проходит по прямой линии AD , и что увлеченная действием центростремительной силы она вскоре отклоняется от прямой линии и превращается в эллипс $Pbda$. Этот эллипс нужно определить, как в задаче, [данной] выше. В ней a, P, b, d будут приняты за положения кометы, соответствующие временам наблюдений. Долготы и широты этих положений известны [из наблюдений] с Земли. Чем больше или меньше эти наблюденные долготы и широты, тем большими или меньшими принимаются новые долготы и широты [по сравнению с наблюденными]. Из этих новых [долгот и широт] заново определяется прямолинейная траектория кометы, отсюда <прямолинейная траектория кометы (sic!) и> ее эллиптическая траектория, как ранее. И [значения, определяющие] четыре новых местоположения на эллиптической орбите, завышенные или заниженные предыдущими ошибками,

теперь достаточно точно согласуются с наблюдениями. Но если, может случиться, останутся заметные ошибки, вся операция должна быть повторена. А так как эти расчеты не могут быть чересчур обременительными для астрономов, то достаточно определить все это геометрическим методом.

Трудно, однако, утверждать, что площади aSP , PSb , bSd пропорциональны временам. На главной оси EG эллипса построим полукруг EHG (рис. 13). Возьмем угол ECH пропорционально времени. Проведем SH и CK , ей параллельную, пересекающую окружность в K . Соединим HK и сделаем треугольник SKN равным круговому сегменту HKM (с помощью таблиц сегментов или другим способом), опустим перпендикуляр NQ на EG и на нем возьмем [точку P так, что] PQ [так относится] к NQ , как малая ось эллипса к большей оси, а точка P будет находиться на эллипсе и, когда линия PS будет проведена, она отсечет площадь эллипса EPS , пропорциональную времени. Пусть площадь $HSNM$ увеличится на треугольник SNK и уменьшится на равный сегмент HKM , что сделает ее равной треугольнику HSK , т. е. равной треугольнику HSC . К этим равным площадям прибавим площадь ESH , и площади $EHNS$ и $EHSC$ окажутся равными. Следовательно, так как сектор $EHSC$ пропорционален времени, а площадь EPS площади $EHNS$, то площадь EPS будет также пропорциональна времени.

Задача 5. Предположим, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра. Определить расстояния, которые тело, падая по прямой линии, проходит в равные времена.

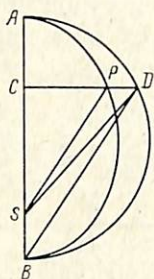


Рис. 14

Если тело падает не перпендикулярно, то оно опишет эллипс; предположим, эллипс APB , нижний фокус которого, скажем, S , совпадает с центром Земли (рис. 14). Это следует из того, что уже было доказано. На большей полуоси эллипса AB построен полукруг ADB , и прямая линия DPC , перпендикулярная оси, проходит через падающее тело. Если провести DS и PS , площадь ASD будет пропорциональна площади ASP , а также времени. Пусть теперь при неизменной оси AB ширина эллипса непрерывно уменьшается, а площадь ASD будет всегда оставаться пропорциональной времени. Пусть ширина будет бесконечно уменьшившейся, и так как теперь орбита APB совпадает с осью AB , а фокус S с концом оси B , тело опустится по прямой линии AC , и пропорциональной времени станет площадь ABD . Таким образом, расстояние AC , которое тело, падая отвесно из A , опишет в данное время, может быть определено, если площадь ABD берется пропорционально времени, а перпендикуляр DC опущен из точки D на прямую линию AB . Что и требовалось сделать ²⁶.

Поучение. До сих пор я объяснял движение тел в несопротивляющихся средах для того, чтобы определить движения небесных тел в эфире. Ибо я думаю, что сопротивление чистого эфира или не существует, или чрезвычайно мало. Ртуть сопротивляется сильно, вода — много меньше, а воздух еще меньше. Эти среды сопротивляются соответственно их

плотности, которая почти пропорциональна их весу, а также (я мог бы сказать) соответственно количеству их твердой материи. Следовательно, твердую материю воздуха можно, по-видимому, уменьшить, и сопротивление среды будет уменьшено почти в той же самой пропорции, пока не будет достигнуто тонкости эфира. Наездники, быстро мчась, чувствуют сильное сопротивление воздуха, но моряки, гонимые ветрами по открытому морю, вовсе не страдают от эфира, вопреки его потоку. Если бы воздух свободно протекал между частицами тел и, следовательно, действовал не только на внешнюю поверхность целого, но и на поверхности отдельных частиц, то его сопротивление было бы много больше. Эфир протекает весьма свободно и не оказывает ощутимого сопротивления. Наиболее здравомыслящие астрономы уже знают, что кометы опускаются ниже орбиты Сатурна (они умеют приблизительно определять их расстояния, исходя из параллакса орбиты Земли), следовательно, эти кометы проносятся беспрепятственно через все участки нашего неба с огромной скоростью и тем не менее не теряют ни своих хвостов, ни пламени, окружающего голову, которым противодействие эфира мешало бы и [их] срывало. Планеты же действительно уже пребывают в своем движении тысячи лет, пока они не испытывают никакого сопротивления.

Следовательно, движения на небе управляются изложенными законами. Однако если сопротивление нашего воздуха не принимается в расчет, то движение в нем снарядов определяется по Задаче 4, а движение тел, падающих отвесно, — по Задаче 5, конечно, предполагая при этом, что тяжесть обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра Земли. Ибо тяжесть есть один вид центростремительной силы, а из моих расчетов явствует, что центростремительная сила, с помощью которой Луна удерживается в ее месячном движении вокруг Земли, относится к силе тяжести на поверхности Земли приблизительно так же, как обратные квадраты расстояний от центра Земли. Из-за медленного по сравнению с долинами хода маятниковых часов на вершинах высоких гор ясно также, что тяжесть уменьшается с расстоянием от центра Земли, но, однако, еще не наблюдается, в какой пропорции.

Более того, движения снарядов в нашем воздухе должны быть отнесены к безграничному и, конечно, неподвижному пространству небес, а не к движущемуся пространству, которое вращается вместе с нашей Землей и нашим воздухом и простакам кажется неподвижным. Нужно найти эллипс, который снаряд описывает в этом неподвижном пространстве, и отсюда должно быть определено его движение в движущемся пространстве. С этим согласуется, что тяжелое тело, падающее свободно с вершины высокого здания, в своем падении немного отклоняется от перпендикуляра, так что величина этого отклонения и его направление могут быть определены. И обратно, движение Земли определяется из отклонения, установленного из опыта. Когда я сам ранее сообщил об этом отклонении знаменитейшему Гуку, он подтвердил, что это так, согласно эксперименту, повторенному трижды, тяжелое тело всегда отклоняется от перпендикуляра на юг и запад, как и должно быть на нашей северной широте.

О движении тел в сопротивляющихся средах

Задача 6. Определить движение тела под действием одной врожденной силы в однородно сопротивляющейся среде.

Пусть будет описана гипербола с прямоугольными асимптотами ADC , CH , пересекающих перпендикуляры AB , DG в B и G (рис. 15). Пусть и скорость тела, и сопротивление среды в начале движения выражаются линией AC , а по прошествии какого-нибудь промежутка времени — линией DC ; тогда затраченное время может быть выражено площадью $ABGD$, и пройденное за это время пространство — линией AD . Ибо со-

противление среды пропорционально скорости, и уменьшение скорости пропорционально сопротивлению; т. е. если время делится на равные части, то скорости в их началах пропорциональны своим разностям. Следовательно, скорость уменьшается в геометрической прогрессии, тогда как время увеличивается в арифметической пропорции. Но это тот самый случай, когда отрезок DC уменьшается и площадь $ABGD$ увеличивается, как хорошо известно. Следовательно, время правильно выражается через эту площадь, а скорость — через эту линию. Что и требовалось доказать²⁷.

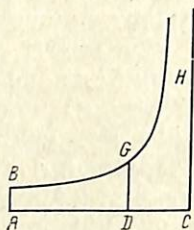


Рис. 15

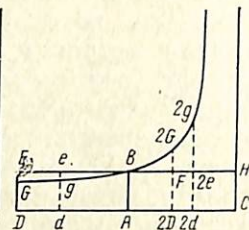


Рис. 16

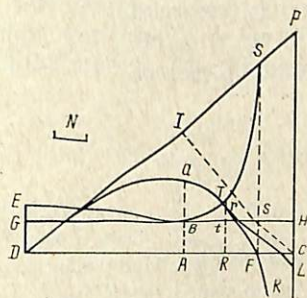
Далее, приращение описанного пространства пропорционально скорости и отсюда — уменьшению скорости, но таково же приращение линии AD , пропорциональное уменьшению линии DC . Следовательно, приращение пространства правильно выражается приращением линии AD , и отсюда само пространство — этой линией. Что и требовалось доказать.

Задача 7. Предполагая центростремительную силу однородной, определить движение тела, поднимающегося и опускающегося по прямой линии в однородной среде.

Когда тело поднимается, пусть центростремительная сила выражается каким-либо данным прямоугольником BC (рис. 16), а сопротивление среды в начале подъема — прямоугольником BD , взятым на противоположной стороне. Пусть гипербола с прямоугольными асимптотами AC , CH проведена через точку B , пересекая перпендикуляры DE , de в G и g ; и тогда как, поднимаясь за время $DGgd$, тело опишет расстояние $EGge$, за время $DGBA$ — все расстояние подъема EGB , за время $AB2G2D$ — расстояние спуска $BF2G$ и за время $2D2G2gd$ — расстояние спуска $2GF2e2g$, а скорость тела (пропорциональная сопротивлению среды) в эти промежутки времени будет $ABED$, $ABed$, нуль, $ABF2D$, $AB2e2d$, и наибольшая скорость, которую тело приобретет в течение своего спуска, будет BC .

Ибо, пусть прямоугольник AH разложен на бесчисленные прямоугольники Ak , Kl , Lm , Mn и т. д., которые будут пропорциональны приращениям скоростей, полученным в столь же малые промежутки времени, и Ak , Al , Am , An и т. д. (рис. 17) будут пропорциональны скоростям целиком и, следовательно, пропорциональны сопротивлениям среды в конце каждого равного промежутка времени. Пусть AC относится к AK или $ABHC$ к $ABkK$, как центростремительная сила к сопротивлению в конце первого промежутка, а $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $NnHC$ и т. д. будут относиться как абсолютные силы, посредством которых тело движется, и следовательно, как приращения скоростей, т. е. как прямоугольники Ak , Kl , Lm , Mn и т. д., и отсюда — в геометрической прогрессии. По этой причине, если прямолинейные отрезки Kk , Ll , Mm , Nn пересекают гиперболу в λ , μ , ν и т. д., площади $AB\lambda K$, $K\lambda\lambda L$, $L\lambda\mu M$, $M\mu\nu N$ и т. д. будут равны и, следовательно, всегда аналогичны как равным промежуткам времени, так и равным центростремительным силам. Но площадь $AB\lambda K$ относится к площади $Bk\lambda$, как Kk к $\frac{1}{2} k\lambda$ или как AC к $\frac{1}{2} AK$, т. е. как центростремительная сила к сопротивлению в середине первого проме-

Поучение. С помощью двух последних задач могут быть определены движения снарядов в нашем воздухе, [исходя] из гипотезы, что наш воздух однороден и что тяжесть действует равномерно и вдоль параллельных линий. Ибо, если косое движение какого-нибудь брошенного тела может быть разложено на две составляющие, одну — падения или подъема, и другую — горизонтального продвижения, первое движение будет определяться по Задаче 6, а второе — по Задаче 7, как на этом рисунке (рис. 18).



Пусть тело брошено вдоль какой-либо линии DP , и пусть его скорость в начале движения представлена длиной DP . Опустим перпендикуляр PC из точки P на горизонтальную линию DC и проведем CI , перпендикулярную DP и пусть DA относится к CI , как сопротивление среды в начале движения к силе тяжести. Восстановим перпендикуляр AB произвольной длины и построим параллелограммы $DABE$, $CABH$. Пусть гипербола с асимптотами DC , CP будет проведена через точку B , пересекая DE в G . Возьмем отрезок N , который так относится к EG , как DC к CP , и из какой-либо точки R на прямой линии DC восстановим перпендикуляр RT , который пересечет гиперболу в T и прямую линию EH — в t . В RT возьмем $Rr = (DRDE - DRTBG)/N$, и за время $DPTBG$ снаряд до-

стигнет точки r , описав кривую линию $DarFK$, на которой всегда будет лежать точка r . Он достигнет максимума высоты в точке a на перпендикуляре AB , затем пересекает горизонтальную линию DC в F , где площади $DFsE$, $DFSBG$ равны, а впоследствии непрерывно приближается все ближе к асимптоте PCL . И его скорость в любой точке r пропорциональна касательной к кривой rL .

Если же отношение между сопротивлением воздуха и силой тяжести не известно, углы ADP , Afr , под которыми кривая $DarFK$ пересекает горизонтальную линию DC , могут быть получены из наблюдения. Пусть прямоугольник $DFsE$ построен на DF , причем его высота произвольна, и пусть прямоугольная гипербола описана таким образом, что одна из ее асимптот есть DF , так что площади $DFsE$, $DFSBG$ равны, а sS может так относиться к EG , как касательная угла AF_2 к касательной угла ADP . Из центра C этой гиперболы опустим перпендикуляр CI на прямую линию DP , а также перпендикуляр BA из B , где гипербола пересекает прямую линию Es , на прямую линию DC , и будет получено искомое отношение между DA и CI , т. е. отношение сопротивления среды в начале движения к тяжести снаряда. Все это легко устанавливается из того, что было ранее доказано. Существуют также другие методы определения сопротивления воздуха, которые я охотно оставляю в стороне. Однако, если это сопротивление было найдено в одном случае, в любых других оно должно быть взято пропорционально скорости тела и его сферической поверхности, вместе взятым (ибо я повсюду предполагаю, что снаряд сферичен), в то время как сила тяжести может быть определена из его веса. Таким образом, всегда можно будет получить отношение сопротивления к тяжести или линии DA к линии CI . Из этого отношения и из угла ADP определится форма кривой $DarFK$; а ее размер определится, если взять длину DP пропорциональной скорости снаряда в точке D ; так что высота Aa между подъемом и падением снаряда всегда будет определяться соответственно. Итак, исходя из однажды измеренной на поверхности длины DF , всегда можно определить и эту длину DF , и все другие размеры фигуры $DarFK$, которую снаряд описывает над поверхностью. Но для нахождения этих размеров следует использовать логарифмы вместо гиперболической площади $DRTBG$.

При помощи того же самого рассуждения могут быть определены движения тел в воде, движутся ли они под действием тяжести или легкости, или любой другой силы, действующей сразу и навсегда.

Комментарии

Ньютоновские «Начала» не только великая книга. «Это очень трудная для чтения книга. Если взять страницу из ее середины, напечатать на машинке и дать профессору истории науки, который только что разбирал в аудитории подробности замечательных открытий Ньютона, то он, вероятно, и не поймет, что эта страница вышла из-под пера героя его рассказа» [9, с. 138]. Русский читатель находится здесь в особом положении, благодаря превосходным комментариям А. Н. Крылова, содержащимся в его переводе «Начал», опубликованном еще в 1916 г. [10]. Сегодня в результате мощного взлета ньютоноведения, произошедшего за последние 20 лет, мы можем со значительно меньшими усилиями разобраться в содержании великой книги. Небольшой трактат Ньютона «О движении» дает возможность легко обозреть замысел «Начал» и уяснить пути его реализации, намеченные Ньютоном.

* * *

1. Ср. [10, Опр. V, с. 26]. Здесь Ньютон впервые вводит понятие центростремительной силы. Позднее он объяснил: «М-р Гюйгенс дал название «vis centrifuga» [центробежная сила] силе, посредством которой обращающиеся тела стремятся уда-

литься от центра их движения. М-р Ньютон в честь этого автора сохранил название и назвал противоположную силу «*vis centripeta*» [центростремительная сила] [11, с. 53].

2. Ср. [10, Опр. III, с. 24].

3. Ср. [10, Закон I, т. 36].

4. Ср. [10, Закон II, с. 37]. Теперь можно попытаться ответить на вопрос, почему Ньютон дал столь неопределенную формулировку второму закону в своих «Началах»: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrice impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur*.

А. Н. Крылов, желая устранить эту неопределенность, перевел его: «Изменение количества движения пропорционально...», в то время как Ньютон написал «*mutationem motus*», т. е. «изменение движения», а не «*mutationem momenti*», т. е. «изменение количества движения» как должно было бы быть написано, если придерживаться перевода Крылова.

В данном трактате Ньютон дает несколько иную формулировку: *Mutationem status movendi vel quiescendi proportionalem esse vi impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur*. В ней важно то, что Ньютон говорит об изменении *состояния* движения или покоя (*mutationem status movendi vel quiescendi*), подчеркивая тем самым онтологическое равноправие движения, с одной стороны, и покоя — с другой. Понимание фундаментальности состояния равномерного прямолинейного движения — аналогично состоянию покоя — было чрезвычайно существенным для генезиса науки Нового времени, и Ньютон, без сомнения, пытается это здесь подчеркнуть.

Вполне вероятно, что в формулировке второго закона в «Началах» он написал «*motus*», а не «*momenti*», также желая подчеркнуть, что речь идет не только об изменении количества движения (которое является мерой движения, и поэтому по сути Крылов перевел верно), но и об изменении состояния движения. См. об этом [10, с. 36—37].

5. Ср. [10, Сл. V, с. 45].

6. Ср. [10, Сл. IV, с. 43].

7. Ср. [10, Сл. I, с. 38].

8. Ср. [10, Кн. I, Лемма X, с. 58].

9. Ср. [10, Кн. II, Отд. I, Лемма I, с. 278]. Доказательство этой леммы гласит: *Posatur A ad A — B ut B ad B — C et C ad C — D etc, et dividendo fiet A ad B ut B ad C et C ad D etc*. Слово «*dividendo*» в данном случае означает, как объяснил Крылов [10, с. 59], не деление, а производную пропорцию. Ньютон пользуется терминами, приведенными у Евклида, — если дана пропорция $a:b=c:d$, то *dividendo* есть производная пропорция $a:(a-b)=c:(c-d)$, откуда и следует доказательство.

10. Имеется в виду: «площади всех параллелограммов». Ср. [10, Кн. I, Отд. II, Лемма XII, с. 81].

11. «...*quadrata, applicata ad radios circulorum*» — дословно: «квадраты, приложенные к радиусам кругов». Так во времена Ньютона обычно говорилось об операции деления. См. [10, с. 72].

12. Здесь и далее имеется в виду равенство треугольников.

13. Ср. [10, Кн. I, Отд. II, Пр. I, с. 67].

14. Ср. [10, Кн. I, Отд. II, Пр. IV, с. 72]. Зависимость, аналогичную формуле $F=mv^2/R$ для центробежной силы, Ньютон знал и раньше. Как было сказано выше, он вывел ее на основе своей теории удара. Теперь он дает вывод зависимости для центростремительной силы. Для того чтобы понять его рассуждения, необходимо заметить, что в предельном случае, когда точка *D* находится бесконечно близко к точке *B*, можно принять, что прямая *FC* проходит через центр окружности *S*. В этом случае соотношение

$$\frac{BC^2}{CF} : \frac{bc^2}{cf} = CD : cd$$

или, что то же самое, $\frac{BC^2}{CF} \sim CD$ будет аналогично известной из тригонометрии формуле для половинного угла:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что во времена Ньютона тригонометрические функции выражались не отношениями, а отрезками, поясним (рис. 19), что

$$\sin \text{versus } \alpha = DC = SB - SD \cos \alpha = SB(1 - \cos \alpha)$$

С другой стороны, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{D'K'}{SB} \right)^2 = \left(\frac{CB}{2SB} \right)^2$, отсюда

$$\sin \text{versus } \alpha = DC = SB(1 - \cos \alpha) = SB \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{SB \cdot CB^2}{(2SB)^2} = \frac{CB^2}{2 \cdot 2SB} = \frac{CB^2}{2CF} \cdot A,$$

отсюда следует, что

$$CD \sim \frac{BC^2}{CF}.$$

15. Эти следствия аналогичны следствиям из теоремы IV «Начал». См. [10, с. 73].

16. Позднее Ньютон подробно рассмотрел этот вопрос в Книге III «Начал», см. [10, Кн. III, с. 451—456].

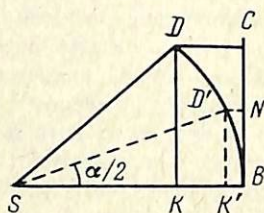


Рис. 19

17. Ньютон исходит из того, что $QR \sim F_{ц.с} \cdot t^2$. (То, что QR пропорционально t^2 , следует из Леммы 2, а пропорциональность центростремительной силы отрезку QR определяется Законом 2 и построением, приведенным в доказательстве Теоремы 1.)

С другой стороны, по второму закону Кеплера $t \sim S_{SQP} \simeq (SPQT) \cdot \frac{1}{2}$. Здесь неявно предполагается, что площадь эллиптического сектора SQP и площадь треугольника SQP можно считать равными, если Q бесконечно близко к P . Позже, в «Началах» Ньютон специально доказал теорему [10, Кн. I, Отд. I, Лемма VII, с. 56], согласно которой дуга QP , хорда QP и отрезок касательной PR в пределе равны. Комбинируя две вышеприведенные зависимости, приходим к доказательству Теоремы 3:

$$QR \sim F_{ц.с} \cdot t^2 \sim F_{ц.с} \cdot SP^2 \cdot QT^2,$$

$$\text{откуда } 1 \sim F_{ц.с} \cdot \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} \text{ или } F_{ц.с} \sim 1 / \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}.$$

Ср. [10, Кн. I, Отд. II, Пр. VI, Сл. 1, с. 76].

18. [Ср. 10, Кн. I, Отд. II, Пр. VI, Сл. 5, с. 77].

19. В обозначениях Ньютона $QRL = QR \cdot RL$ и $RP^2 = QR \cdot RL$ по свойству линий в круге. Опустим из R перпендикуляр RN на SP и проведем в точку P радиус OP , который будет перпендикулярен ZP , так как ZP — касательная (рис. 20). Тогда видно, что треугольник NPR подобен треугольнику SPA и, следовательно,

$$\frac{RP}{SA} = \frac{RN}{SP} \text{ или } \frac{RP}{SA} = \frac{QT}{SP}, \text{ откуда } \frac{RP^2}{QT^2} = \frac{SA^2}{SP^2} \text{ или } \frac{QR \cdot RL \cdot SP^2}{SA^2} = QT^2.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\frac{SP^2}{QR}$ и заменяя в пределе RL на SP ,

$$\text{получим } \frac{QR \cdot RL \cdot SP^2 \cdot SP^2}{SA^2} = \frac{QT^2 SP^2}{QR}.$$

$$\frac{SA^2}{SP^5} = \frac{QT^2 SP^2}{QR} = \frac{1}{F_{ц.с}}, \text{ т. е. } F_{ц.с} \sim \frac{1}{SP^5}.$$

Ср. [10, Кн. I, Отд. II, Пр. VII, Сл. 1, с. 77—79].

20. Это поучение есть отголосок переписки Ньютона с Гуком — по-видимому, Ньютон хотел оправдать свой неправильный ответ на первое письмо Гука, показав, что вообще говоря, если сила зависит от расстояния, тело может двигаться и по спирали. Доказательство этого предложения дано в «Началах» [10, Кн. I, Отд. II, Пр. IX, с. 80—81].

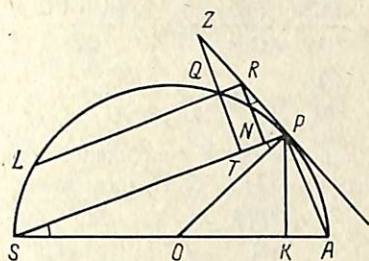


Рис. 20

21. На чертеже к этой и последующей задачам линия RZ должна быть параллельна диаметру DK (рис. 21). Это легко показать из элементарных соображений. Пусть точка P имеет координаты (x_0, y_0) . Тогда уравнение сопряженного диаметра PG есть $y = \frac{y_0}{x_0}x$, где угловой коэффициент $k = \frac{y_0}{x_0}$. Тогда угловой коэффициент k' сопряженного диаметра DK определится из известной формулы $k' = -\frac{b^2}{a^2k} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. А именно такое значение имеет угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) . Следовательно, $RZ \parallel DK$.

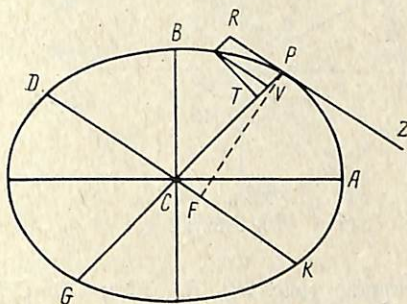


Рис. 21

Как обычно, Ньютон обозначает через PVG произведение $PV \cdot VG$ и указанная им пропорция

$$\frac{PVG}{QV^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \quad (1)$$

есть выражение, аналогичное уравнению эллипса, отнесенному к сопряженным диаметрам. Действительно, обозначим

$$CV = x, QV = RP = y; \quad AC = a, BC = b;$$

$$CP = a_1, CD = b_1; \quad \angle PCK = \alpha.$$

Тогда вместо $\frac{PVG}{QV^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$ или $\frac{PV \cdot VG}{QV^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$ можем записать:

$$\frac{(a_1 - x)[2a_1 - (a_1 - x)]}{y^2} = \frac{a_1^2}{b_1^2} \quad \text{или} \quad y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2)$$

— уравнение эллипса, отнесенное к сопряженным диаметрам.

Из подобия треугольников TQV и CPF имеем:

$$\frac{QV}{QT} = \frac{PC}{CF} \quad \text{или} \quad \frac{QV^2}{QT^2} = \frac{PC^2}{CF^2} \quad (2)$$

Комбинируя (1) и (2), получим:

$$\frac{PVG}{QV^2} \frac{QV^2}{QT^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \cdot \frac{PC^2}{CF^2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{PV \cdot VG}{QT^2} = \frac{PC^2 \cdot PC^2}{CD^2 \cdot CF^2}$$

$$\text{или } VG: \frac{QT^2}{PV} = PC^2 : \frac{CD^2 \cdot CF^2}{PC^2}. \quad (3)$$

Но $PV=QR$, $BC \cdot AC = CD \cdot PF$ по свойству сопряженных диаметров ($ab=a_1b_1 \sin \alpha$), и в пределе VG можно заменить на $PG=2PC$. Подставив эти значения в (3), получим:

$$2PC : \frac{QT^2}{QR} = PC^2 : \frac{AC^2 BC^2}{PC^2} \quad \text{или} \quad \frac{PC^2 \cdot QT^2}{QR} = \frac{2AC^2 \cdot BC^2}{PC},$$

а так как $2AC^2 \cdot BC^2 = \text{const}$ и $F_{ц.с} = 1 / \frac{PC^2 \cdot QT^2}{QR}$ по теореме 3,
 $F_{ц.с} \sim PC$.

Ср. [10, Кн. I, Отд. II, Пр. X, с. 81].

22. Ньютон использует здесь для обозначения фокуса эллипса термин umbilicus (букв. «пуп»), который был введен Н. Меркатором в 1664 г. Современный термин focus был введен еще раньше И. Кеплером в его «Ad Vitellionem Paralipomena» (1604) и также был знаком Ньютону.

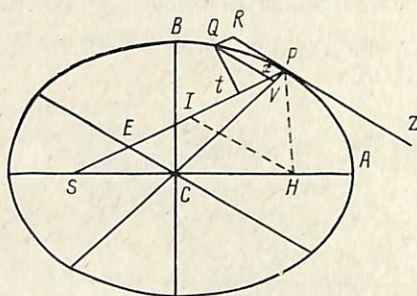


Рис. 22

23. Поясним доказательство (рис. 22). $HI \parallel EC$ и $CS=CH$ по построению. $SE=EI$, так как EC есть средняя линия в треугольнике SIH . Покажем, что $EP=AC$. Для этого покажем сначала, что $EP = \frac{1}{2}(PS+IP)$.

$$PS = PI + IE + ES$$

$$PI + PS = PI + IE + ES + PI = PI + IE + EI + IP \quad (\text{так как } SE = EI)$$

$$PI + PS = 2(PI + IE) = 2EP.$$

По свойству эллипса $\angle SPR = \angle HPZ$, поэтому треугольник IPH — равнобедренный и $IP=PH$. Тогда из определения эллипса следует, что

$$EP = \frac{1}{2}(PS + PI) = \frac{1}{2}(PS + PH) = \frac{1}{2} 2a = AC.$$

Итак, $EP=AC$.

Обозначим через L главный параметр эллипса:

$$L = \frac{2b}{a^2} = \frac{2BC^2}{AC}$$

Очевидно, что

$$\frac{L \cdot QR}{L \cdot PV} = \frac{QR}{PV}. \quad (1)$$

Из подобия треугольников PxV и PEC имеем $\frac{Px}{PV} = \frac{PE}{PC}$. Но $QR = xP$ и $PE = AC$, поэтому

$$\frac{L \cdot QR}{L \cdot PV} = \frac{AC}{PC}; \quad (2)$$

$$\text{пусть } \frac{QV^2}{Qx^2} = \frac{m}{n}. \quad (3)$$

Из подобия треугольников Qtx и EPF :

$$\frac{Qx}{Qt} = \frac{EP}{PF} \quad \text{и} \quad \frac{Qx^2}{Qt^2} = \frac{EP^2}{PF^2} \quad \text{или} \quad \frac{Qx^2}{Qt^2} = \frac{AC^2}{PF^2},$$

а так как $BC \cdot AC = CDPF$ (см. задачу 2), или, что то же самое, $\frac{AC}{PF} = \frac{CD}{CB}$, то

$$\frac{Qx^2}{Qt^2} = \frac{CD^2}{CB^2}. \quad (4)$$

Комбинируя (1) и (4), получаем:

$$\frac{L \cdot QR}{Qt^2} = \frac{AC}{PC} \frac{CD^2}{CB^2} \frac{L \cdot PV}{Qx^2}. \quad (*)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{L \cdot PV}{GV \cdot PV} = \frac{L}{GV} \quad \text{или} \quad L \cdot PV = \frac{L \cdot GV \cdot PV}{GV}. \quad (5)$$

С другой стороны, уравнение эллипса, отнесенное к сопряженным диаметрам (см. Задачу 2) дает:

$$GV \cdot PV = \frac{QV \cdot CP^2}{CD^2}. \quad (6)$$

Комбинируя теперь (5) и (6), имеем:

$$L \cdot PV = \frac{L \cdot QV^2 \cdot CP^2}{GV \cdot CD^2}, \quad (7)$$

и подставляя (7) в (*),

$$\frac{L \cdot QR}{Qt^2} = \frac{AC}{PC} \frac{CD^2}{CB^2} \frac{L \cdot QV^2 \cdot CP^2}{GV \cdot CD^2 \cdot Qx^2} = \frac{AC}{PC} \frac{L}{GV} \frac{CP^2}{CB^2} \frac{m}{n}.$$

Но $L = 2BC^2/AC$, по определению, и $AC \cdot L = 2BC^2$. Тогда

$$\frac{L \cdot QR}{Qt^2} = \frac{2BC \cdot PC \cdot m}{PC \cdot GV \cdot CB^2 n} = \frac{2PC \cdot m}{GV \cdot n}.$$

Очевидно, что $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{2CP}{GV} \frac{m}{n} = 1$, поэтому также и $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{L \cdot QR}{Qt^2} = 1$. Тогда для достаточно близких P и Q можно записать $L \cdot QR = Qt^2$. И, умножив обе части последнего равенства на $\frac{SP^2}{QR}$, получим

$$L \cdot SP^2 = \frac{SP^2 \cdot Qt^2}{QR}.$$

По теореме 3 $\frac{SP^2 \cdot Qt^2}{QR} \sim \frac{1}{F_{ц.с.}}$, а $L = \text{const}$ и SP есть R . Тогда $F_{ц.с.} \sim \frac{1}{R^2}$

Ср. [10, Кн. I, Отд. III, Пр. XI, с. 84].

24. Ср. [10, Кн. I, Отд. III, Пр. XV, с. 92].

25. Ср. [10, Кн. I, Отд. III, Пр. XVII, с. 95].

26. Ср. [10, Кн. I, Отд. VII, Пр. XXXII, с. 143].

27. Ср. [10, Кн. II, Отд. I, Пр. II, с. 278].

28. Ср. [10, Кн. II, Отд. I, Пр. III, с. 280].

Перевод с латинского и комментарии
В. С. Кирсанова

Литература

1. *Westfall R. S.* Never at Rest. A Biography of Isaac Newton. Cambridge, 1982.
2. The Correspondence of Isaac Newton. Eds. H. W. Turnbull, J. F. Scott, A. R. Hall and Laura Tilling. 7 vols., Cambridge, 1957—1977.
3. *Gunther R. T.* Early Science in Oxford. 14 vols., Oxford and London, 1920—1945.
4. *Herivel J. W.* Newtonian Studies III. The Originals of the two Propositions Discovered by Newton in December 1679?/Archives internationales d'histoire des sciences, 14, 1961.
5. *Rigaud S. P.* An Historical Essay on the First Publication of Sir I. Newton's Principia. Oxford, 1838.
6. *Rouse Ball W. W.* An Essay on Newton's Principia. London, 1893.
7. Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton. Eds. A. Rupert Hall and Marie Boas Hall. Cambridge, 1978, p. 237—292 (1st edition — 1962).
8. The Mathematical Papers of Isaac Newton. Ed. D. T. Whiteside. Cambridge, 1974, v. VI, p. 30—91.
9. *Truesdell C.* Essays in the History of Mechanics. Springer-Verlag, 1968.
10. *Ньютон Ис.* Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. с пояснениями и примечаниями Флота Генерал-Лейтенанта А. Н. Крылова, заслуженного профессора Академии/Известия Николаевской морской академии. Пг., вып. IV—V, 1915—1916.
11. *Cohen I. B.* Introduction to Newton's Principia. Cambridge, 1971.

ON THE MOTION OF SPHERICAL BODIES IN FLUIDS

I. NEWTON

Translation with commentaries of Newton's early treatise which is the germ of «Philosophiae naturalis principia mathematica».