

жении. Характерно, что Оккам отказывает этому компоненту, как и понятию движения, в реальном онтологическом статусе. Отрицание одновременности, по его мнению,— это логическая операция, имеющая лишь синкатегорематическое значение. «Тот факт, что части (части формы, в случае перемещения — положения.— Авт.) не приобретаются одновременно, не означает, что надо положить некоторую вещь, иную, чем эти части, но скорее, просто то, что некоторые части формы существуют в разные времена, а не в одно и то же время... Если же на наше утверждение, что «части не существуют одновременно», возразят, что эта неодновременность частей есть нечто, то следует ответить, что такое абстрактное имя есть фикция, сконструированная из наречий, союзов, предлогов, глаголов и синкатегорематических терминов... Неодновременность не есть некоторая вещь в добавление к тем вещам, которые могут существовать одновременно, но просто означает, что такие вещи не существуют одновременно» [5, с. 46—47].

Глубоко знаменателен тот факт, что самый основательный логический анализ понятия последовательности, предпринятый в средние века,— анализ, который был осуществлен Оккамом и его школой, привел к выводу, что это понятие не следует включать в число фундаментальных, неопределяемых научных понятий. Одна из центральных «неаристотелевских» интуиций, определивших строй средневекового мышления — интуиция последовательности — была логически узаконена в рамках аристотелизма путем интерпретации, выделявшей отдельные моменты последовательности в качестве единственно значимых компонентов этого понятия. Идея неизменных сущностей как логико-онтологической основы объяснения мира торжествовала здесь одну из самых блистательных своих побед. Но эта победа оказалась в каком-то смысле роковой: сведение последовательности, а тем самым и движения к отдельным статичным моментам привело к построению совершенно бессодержательной с физической точки зрения и поэтому бесперспективной теории движения.

Потребовалась радикальная ломка базисной схемы аристотелизма, чтобы зародыши неаристотелевских идей привели к построению новой концепции движения.

#### Литература

1. Maier A. Metaphysische Hintergrunde der spätscholastischen Naturphilosophie. R., 1955.
2. Grant E. Physical Science in the Middle Ages. N. Y. etc., 1971.
3. Koyré A. Metaphysics and measurement. Essays in scientific revolution. Cambr. 1968.
4. Аристотель. Физика. М., 1936.
5. The Tractatus de successivis attributed to William Ockham/Ed. by Boehner Ph. N. Y., 1944.
6. Thomas Aquinas. Commentaria in octo libros Physicorum Aristotelis, IV. lect. 12// A source book in medieval science. Cambr., 1974.
7. Thomas Aquinas. Summa theologiae. R., 1894. V. 4.
8. Murdoch J. E., Sylla E. D. The science of motion//Science in the middle ages. Chicago — L., 1978.
9. Godfrey of Fontaines. Quodlibet undecimum quaest. 3//Les philosophes Belges. V. 5. Louvain, 1924.
10. Ockham William. Summa logicae//A source book in medieval science. Cambr., 1974.
11. Зубов В. П. Развитие атомистических представлений до начала XIX в. М., 1965.

## СРЕДНЕВЕКОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИДЕИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В. С. ШИРОКОВ (Горький)

Математике средних веков посвящена значительная историко-математическая литература [1—6]. Наши представления об этом периоде развития математики сложились сегодня в достаточно законченную картину, хотя, конечно, как и при любом научном исследовании, на каждом его этапе возникают новые проблемы и вопросы. Интерес к этому периоду развития математики усилился в связи с дискуссиями о роли



средневековых представлений для формирования научных принципов Г. Галилея, И. Кеплера, Б. Кавальери, Р. Декарта, Г. В. Лейбница и др. [7, 8]. В главных чертах влияние средневековой науки связано с разработкой средневековыми учеными (Т. Брадвардин, У. Хейтесбери, Р. Сунсет, Ж. Буридан, Н. Орем, Григорий из Римини и др.) — правда, в начальной и притом кинематической или геометрической форме — понятий переменной величины и функциональной зависимости, в явном виде не выделенных, отсутствовавших в античной математике, а также с изучением инфинитезимальных свойств переменной величины [7, с. 128—130]. Но содержание средневековой математики значительно шире. Характерный для математиков XIII—XIV вв. логический подход к рассматриваемым проблемам, достаточно высокая степень абстрактности, стремление к логической строгости и тонкости позволили им сформулировать ряд положений, которые могут быть оценены только с позиций современной математики. Этот вопрос имеет, на наш взгляд, большее значение, чем ему до сих пор придавалось.

1. *Концепция строения континуума Ж. Буридана.* Буридан развивает взгляды Брадвардина, изложенные в трактате «О континууме», но в отличие от Брадвардина он исходит из физических соображений и в качестве исходного и основного понятия Буридан берет понятие тела как самоочевидное и наглядное. При этом он, как и другие номиналисты, полагает, что поверхности нам даны как границы тел, линии — как границы поверхностей, а мгновения — как границы отрезков времени. Следы этой концепции обнаруживаются в трудах Аристотеля. Но особенность трактовки такого подхода к основным математическим понятиям у Буридана — и в этом его отличие от концепций и Брадвардина и самого Аристотеля — состоит в том, что под термином «граница» он понимает сколь угодно тонкий слой тела, сколь угодно малую часть поверхности, линии, отрезка времени, а не «геометрические» поверхность, линию, точку. В теории Буридана континуум делим до бесконечности потенциально, но вместе с тем эта бесконечность, по выражению Аристотеля, «не проходится». Иными словами, континуум не состоит из точек или неделимых элементов, но он рассматривается состоящим из сколь угодно большого, но всякий раз конечного числа частей. В этом состоит оригинальность подхода Буридана к этой проблеме. Буридан, отрицая мгновения времени и возможность точного измерения величины — пространственной или временной — заменяет эти мгновения (точки континуума) некоторыми частями величины. Каждая такая часть может быть сколь угодно малой, но она всегда должна оставаться интервалом времени или пути, а не математической точкой. Эта концепция развита в четвертом вопросе (главе) шестой книги буридановских «Вопросов к восьми книгам „Физики“ Аристотеля» [9, 93va — 97vb; 10; 11].

Приведем итоговое заключение этого вопроса: «Восьмое заключение состоит в том, что в любом конечном континууме бесконечно мала его граница, поэтому в любой линии или величине бесконечно мала точка и в любом интервале времени бесконечно мало мгновение. Однако обратное неверно, т. е. что точка бесконечно мала потенциально (*punctum sit in infinitum parvum*). Напротив, можно сказать, что точкой является одна двенадцатая часть линии, которая не бесконечно мала; ...отсюда следует, что одна точка может быть больше другой точки в два, или в три, или в сто раз, или даже в каком угодно отношении, так как одна треть линии в два раза больше одной шестой, а одна сотая в сто раз больше одной десятичной части; а поскольку любая часть может быть названа границей линии, а значит, и точкой, то из рассуждений об этом термине „граница“ вытекает, что под „малым“ будет правильно понимать то, что говорилось о синкатегорематической бесконечности (т. е. потенциальной бесконечности. — В. Ш.), так как в любом континууме его граница бесконечно мала; то же самое о точке и мгновении, так что точка бесконечно мала в любой величине, а мгновение бесконечно мало в любом отрезке времени» [9, 97 va—b; 10, с. 256—257]. Дальше Буридан поясняет, что часть линии можно назвать точкой, если эта часть достаточно мала по сравнению со всей линией.

Эта концепция строения континуума замечательна во многих отношениях. Она напоминает некоторые современные физические представления; в частности, эти проблемы актуальны, с точки зрения попыток аксиоматизации квантовой механики [12, с. 175—177]. Идея точек разных порядков малости использована японским логиком С. Шираиши в попытке формализовать понятие движения и преодолеть трудности,



выраженные в апориях Зенона [13, с. 227—232]. С подобных Буридану посылок (принятие потенциальной бесконечности и отказ от актуальной, замена «математических» точек достаточно малыми интервалами времени и пути и т. п.) решает проблему формализации движения советский логик Е. К. Войшвилло [14]. Он же доказал непротиворечивость такого решения зеноновых апорий. Идея точек разных порядков используется и в одном из направлений комбинаторной топологии, в так называемой мультипликативной топологии.

Определенное сходство имеется также с брауэр-вейлевским континуумом — одним из основных понятий современной интуиционистской математики, построение которого завершено относительно недавно (1964 г. А. Гейтинг, Е. Бет, Л. Брауэр, С. Клини). Важность теории континуума неоднократно подчеркивали сами творцы этого направления современной математики; например, Бет писал, что «теория континуума занимает центральное место в интуиционистской математике» [15, с. 422].

Сам Брауэр определил свой принцип (для чисел) посредством непрерывно развивающейся последовательности выбора (за исходную систему взята система рациональных чисел, представленных двичными разложениями), причем сопоставляемое с этой последовательностью число становится эффективно определенным на некоторой конечной стадии развития последовательности (напоминает буридановское «точка достаточно мала по отношению ко всей величине»). Подробнее об этой теории см. [16, с. 100] и указанную там литературу.

2. *Понятие бесконечности.* Рассматриваемое средневековыми учеными (Григорий из Римини, И. Бассоль, Т. Брадвардин, П. д'Альи и др.) парадоксальное свойство бесконечного множества (часть бесконечного множества равна в смысле взаимно однозначного соответствия элементов всему множеству), хотя и спорадически привлекало внимание математиков (Галилей, Лейбниц и др.), но перестало быть парадоксальным только в теории множеств, разработанной Б. Больцано, Р. Дедекиндом и особенно Г. Кантором в конце XIX в. Средневековые труды к концу XVI в. были суммированы в многочисленных сводных трудах, из них (наряду с комментариями к «Сентенциям» Петра Ломбардского) широкое распространение получили «Комментарии Кониимбренской коллегии», изданные в 1592—1606 гг. в Лионе [17]. На эту книгу ссылался Кантор. Как известно, введенное Кантором понятие трансфинитного числа как математическое выражение актуально бесконечного было понято и принято математиками далеко не сразу, поэтому Кантор стремился выяснить его исторические корни. С этой целью он штудировал средневековую научную литературу. После выхода из печати первой части своего основного труда «К обоснованию учения о трансфинитных множествах» Кантор писал одному из своих корреспондентов (письмо от 13 октября 1895 г.): «Вы тем временем должны получить от меня первый номер журнала со статьей „К обоснованию учения о трансфинитных множествах“, которая в первую очередь обращена к математической публике, но также и к философской. Когда я обращаюсь к трансфинитному, то я не имею в виду актуально бесконечное, которое существует в виде чистой актуальности (*actus purus*) и простейшей сущности (*ens simplicissimus*), не способной ни к увеличению, ни к уменьшению... Бесконечность, с которой я имею дело в своем исследовании, скорее следующее» [18, с. 257—258]. Далее Кантор приводит отрывок из «Комментариев Кониимбренской коллегии» [17, т. I: сар. 8, q. 1, art. 1] со своими вставками, поясняющими средневековое определение (взяты нами в скобки): «Я имею в виду бесконечность категорематическую, т. е. она состоит из актуально бесконечного числа частей (т. е. частей, число которых не равно никакому конечному числу), каждая из которых равна определенной части (т. е. каждая из этих частей имеет определенную меру); эти части взаимно не пересекаются и существуют одновременно». Далее Кантор добавляет, что это — именно то, что он называет трансфинитным [18, с. 259]. Об этом труде Кантора см. также [19, с. 171—178].

Одной из средневековых теорий, в которой проявилось понятие бесконечности, была так называемая теория *maximum et minimum* переменной величины (об этой и родственном ей проблемам *de incipit et desinit* и *forma fluens et fluxus formae* см. [4, с. 133—168]. В рамках этой теории значения переменной величины рассматривались как бесконечное множество (собрание, совокупность). Эта теория, истоки которой (как и многих других средневековых теорий) — в трудах Аристотеля, получила значительное развитие в трактатах Хейтесбери, Суисета и др. Приведем пример, рас-



сма­три­вае­мый Хейтес­бе­ри. Как опре­де­лить спо­соб­ность Со­кра­та под­нять опре­де­лен­ный вес: по мак­си­маль­но­му ве­су из тех, ко­то­рые он может под­нять, или по ми­ни­маль­но­му ве­су из тех, ко­то­рые он не сможет под­нять? Или — дру­гой при­мер — спо­соб­ность Со­кра­та уви­деть опре­де­лен­ный пред­мет на не­ко­то­ром рас­сто­янии: по ми­ни­маль­но­му пред­мету, ко­то­рый он спо­собен уви­деть, или же по мак­си­маль­но­му пред­мету из тех, ко­то­рые он не в со­сто­янии уви­деть? [20, 30v]. Эти во­про­сы ро­ди­ли мно­го­чис­лен­ную ли­те­ра­ту­ру, в ко­то­рой рас­сма­три­ва­лось че­ты­ре ви­да гра­ниц: верх­няя и ниж­няя, внут­рен­няя (т. е. при­над­ле­жа­щая са­мо­му мно­же­ству) и гра­ница внеш­няя (т. е. мно­же­ству не при­над­ле­жа­щая). На­при­мер, Хейтес­бе­ри так опре­де­лил внут­рен­ний мак­си­мум (maximum quod sic): «Внут­рен­ний мак­си­мум суть наи­боль­шее зна­че­ние, ко­то­рое ве­ли­чина может дос­тичь (res potest attingere) или при ко­то­ром она может су­ще­ст­во­вать (sub qua potest esse), но при лю­бом боль­шем зна­че­нии она не может су­ще­ст­во­вать, т. е. ве­ли­чина может при­ни­мать это зна­че­ние, но не может его пре­взой­ти» [20, 29 rb—va]. Ана­ло­гич­но опре­де­ля­ются и ос­та­ль­ные ви­ды гра­ниц ве­ли­чины.

В ис­сле­до­ва­тель­ской ли­те­ра­ту­ре от­ме­ча­лось опре­де­лен­ное сход­ство сред­не­ве­ко­вых опре­де­ле­ний с из­вест­ны­ми дис­тин­к­ци­ями Де­де­кинда, в ча­ст­но­сти с ак­си­омой не­прерыв­но­сти [2, с. 196; 4, с. 166—167]. При­н­ци­пи­аль­ная раз­ни­ца ме­жду ни­ми со­сто­ит в том, что сред­не­ве­ко­вые уче­ные и не по­мы­шля­ли об об­щем опре­де­ле­нии кон­ти­ну­ума дей­ст­ви­тель­ных чисел, что было глав­ной це­лью Де­де­кинда, ко­то­рый стро­ил сече­ния вполне опре­де­лен­ной чис­ло­вой си­сте­мы — мно­же­ства ра­цио­наль­ных чисел.

3. *Сред­не­ве­ко­вая ло­гика и со­вре­мен­ные ма­те­ма­ти­че­ские ло­гики.* Се­ман­ти­че­ская по своей фор­ме сред­не­ве­ко­вая ло­гика имеет мно­го об­ще­го с со­вре­мен­ны­ми ма­те­ма­ти­че­ски­ми ло­ги­ка­ми. Особенно это от­но­сится к сред­не­ве­ко­вым ло­гиче­ским те­о­ри­ям de suppo­si­tionis (о под­ста­нов­ках), de con­se­quen­tiis (о сле­до­ва­нии), de in­solu­biliis (о не­раз­ре­ши­мых пред­ло­же­ни­ях) и др. Под­бор­ки сред­не­ве­ко­вых ло­гиче­ских тек­стов, опуб­ли­ко­ван­ные К. Пра­нт­лем и И. Бо­хен­ским [21, 22], не­смот­ря на су­ще­ст­вен­ные про­бе­лы, до сих пор по­ра­жа­ют своей фун­да­мен­таль­но­стью. Фак­ти­че­ски до сих пор не ис­сле­до­ва­на с дос­та­точ­ной пол­но­той «Бо­ль­шая ло­гика» («Logica magna») Па­в­ла Ве­не­ци­ан­ско­го [23] — сво­е­об­раз­ная ло­гиче­ская эн­ци­кло­педия сред­не­ве­ко­вья. На нее, кста­ти, ссы­ла­лись Га­ли­лей и Лейб­ниц.

Уже на­чи­ная с XII в. в тра­кта­тах сред­не­ве­ко­вых ло­ги­ков можно об­на­ру­жить по­ло­же­ния, ко­то­рые мы от­но­сим к те­о­рии мо­даль­но­стей, к ин­дук­тив­ной ло­гике, к те­о­рии рав­но­си­л­но­сти вы­ска­зы­ва­ний, ис­сле­до­ва­нию се­ман­ти­че­ских ан­ти­но­мий и мно­гое дру­гое.

Для при­ме­ра при­ве­дем не­ко­то­рые ло­гиче­ские фор­му­лы (са­мо со­бой раз­у­ме­ет­ся, что сред­не­ве­ко­вые ав­то­ры да­ва­ли сло­вес­ные фор­му­ли­ров­ки, адек­ват­ные сим­во­личес­ким):

$$(A \cap B) \equiv \neg \{ (A \rightarrow B) \cup (B \rightarrow A) \} \quad (\text{Абеляр, XII в.})$$

$$A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B) \quad (\text{Д. Скотт, XIV в.})$$

$$\forall x A(x) \equiv \overline{\forall x \bar{A}(x)} = \overline{\exists x \bar{A}(x)} \quad (\text{У. Шервуд, XIV в.})$$

$$A \supset (A \cup B), A \cap B \rightarrow A \quad (\text{М. Инген, XIV в.})$$

4. *Дру­гие те­о­рии. За­клю­че­ние.* От­ме­тим крат­ко еще одну идею сред­не­ве­ко­вой ма­те­ма­тики, ко­то­рая ис­поль­зу­ется в со­вре­мен­ной ма­те­ма­ти­ке. В одной из сред­не­ве­ко­вых те­о­рий стро­е­ния кон­ти­ну­ума пред­по­ла­га­лось, что кон­ти­ну­ум со­сто­ит из точек двух ви­дов: «ре­аль­ных» точек и точек «мни­мых» (или точек «ве­щей» и «пу­сто­го» про­стран­ства ме­жду ни­ми). Этой иде­ей (как и мно­гими дру­гими) ин­те­ре­со­вался Лейб­ниц [24, с. 615]. Она по­ло­же­на в ос­но­ву со­вре­мен­ной ком­би­на­тор­ной ге­омет­рии [25].

Та­ким об­разом, фак­ти­че­ское бо­гат­ство сред­не­ве­ко­вой ма­те­ма­тики зна­чи­тель­но шире, чем пред­став­ля­лось до сих пор. Число вы­ше­при­ве­ден­ных при­ме­ров можно зна­чи­тель­но уве­ли­чить. Особенно это от­но­сится к сред­не­ве­ко­вым со­чи­не­ни­ям по ло­гике и к тра­кта­там XV—XVI вв., ис­сле­до­ван­ным до сих пор не­дос­та­точ­но.

#### Литература

1. Duhem P. Etudes sur Léonard de Vinci. V. 3. P., 1913.
2. Maier A. Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert. Roma, 1949.
3. Clagett M. The science of mechanics in the middle ages. Madison: The univ. of Wisc. press. 1959.



4. *Зубов В. П.* Развитие атомистических представлений до начала XIX века. М., 1965.
5. *Crombie A. C.* Medieval and early modern science. V. 2. Cambridge (Mass.): Harvard univ. press. 1963.
6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/Под ред. А. П. Юшкевича. Т. 1. М., 1970.
7. *Юшкевич А. П.* О развитии понятия функции//Историко-математические исследования. Вып. XVII (1966). С. 123—150.
8. *Юшкевич А. П.* О революции в математике Нового времени//Вопр. истории естеств. и техн. 1968. 2 (27); 1971. 4 (33).
9. *Buridan J.* Subtilissime questiones super octo Physicorum libros Aristotelis. Parisiis. 1509.
10. *Широков В. С.* Инфинитезимальная концепция Ж. Буридана//Историко-математические исследования. 1978. Вып. 23. С. 250—269.
11. *Широков В. С.* Жан Буридан об апориях Зенона//Филос. науки. 1982. № 4. С. 94—101.
12. *Бом Д.* Квантовая теория. М., 1965.
13. *Яновская С. А.* Методологические проблемы науки. М., 1972.
14. *Войшвилло Е. К.* Еще раз о парадоксе движения, о диалектических и формально-логических противоречиях//Филос. науки. 1964. № 4. С. 103—112.
15. *Beth E. W.* The foundations of mathematics. Amsterdam, 1959.
16. *Клини С., Весли Р.* Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций/Пер. с англ. *Кабакова Ф. А. и Кушнера Б. А.* М., 1978.
17. *Commentarii Collegii Conimbricensis.* V. 1—5. Lugduni, 1592—1606.
18. *Meschkowski H.* Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig, 1967.
19. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX в. М., 1965.
20. *Hentisberus Guilelmus.* Regule solvendi sophismata. Venetiis, 1494.
21. *Prantle K.* Geschichte der Logik im Abendlande. B. 1—4. Lpz., 1855—1870.
22. *Bocheński I. M.* A History of formal logic. N. Y., 1970.
23. *Venetius Paulus.* Logica magna. Venetiis, 1501.
24. *Couturant L.* Opusculs et fragments inédits de Leibniz. P., 1903.
25. *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия на различных выпуклых множествах. Кишинев, 1978.