

УДК 159.953.5

ЧУВСТВО ЧИСЛА И УСПЕШНОСТЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В МЛАДШЕМ ШКОЛЬНОМ ВОЗРАСТЕ: ПЕРЕКРЕСТНО-ЛОНГИТЮДНЫЙ АНАЛИЗ¹

© 2018 г. Т.Н. Тихомирова^{1)*}, С.Б. Малых^{2)**}

¹⁾ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, факультет психологии;
125009, г. Москва, ул. Моховая, д. 11, стр. 9, Россия.

²⁾ Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Психологический институт РАО”;
125009, г. Москва, ул. Моховая, д. 9, стр. 4, Россия.

* Член-корреспондент РАО, доктор психологических наук, профессор, ведущий научный сотрудник.
E-mail: tikho@mail.ru.

** Академик РАО, доктор психологических наук, профессор, зав. лабораторией.
E-mail: malykhsh@mail.ru.

Поступила 08.08.2017

Аннотация. Представлены результаты лонгитюдного исследования связи чувства числа и успешности обучения математике в младшем школьном возрасте. Анализировались данные 133 школьников — участников Российского лонгитюдного исследования академической успешности — по двум аспектам чувства числа, связанным с умением сравнивать несимволически и символически выраженные количества, и успешности в изучении математики на третьем и четвертом году школьного обучения. Средний возраст школьников во время первого измерения составил 9.82 ± 0.3 лет; во время второго измерения — 10.82 ± 0.3 лет. Для анализа взаимосвязей использовался метод перекрестно-лонгитюдного структурного моделирования. Показано, что наилучшим образом эмпирические данные описывает реципрокная модель, предполагающая наличие перекрестных связей между чувством числа и успешностью обучения математике в младшем школьном возрасте. Результаты лонгитюдного анализа выявили различия во взаимосвязях успешности обучения математике с двумя аспектами чувства числа. Так, академическая успешность учеников третьего класса является предиктором при обучении в четвертом классе только для показателя чувства числа, связанного с оценкой символически выраженных количеств. Напротив, для аспекта чувства числа, связанного с оперированием несимволически выраженными количествами, успешность обучения математике, измеренная годом ранее, не играет значимой роли. Выявлены различия и в возрастной динамике двух аспектов чувства числа в ходе начального обучения: наиболее стабильным во времени является показатель чувства числа, связанный с оперированием несимволически выраженными количествами. Результаты интерпретируются в контексте проблемы соотношения когнитивного развития и обучения.

Ключевые слова: чувство числа, успешность в обучении математике, младший школьный возраст, перекрестно-лонгитюдный анализ, обучение, развитие.

DOI: 10.31857/S020595920000831-0

Социально-экономическое значение индивидуальных достижений в математике обуславливает исследовательский интерес к проблеме поиска предикторов математической успешности среди целого ряда когнитивных характеристик [4; 11; 20; 24 и др.].

При этом наиболее “ориентированной” на математические достижения и наименее исследованной, по крайней мере, на российской выборке является такая когнитивная характеристика, как чувство числа (“*Number Sense*” [5; 9]). Под *чувством числа* понимается способность к приблизительной оценке количеств без счета [9]. Индивидуальные различия в чувстве числа проявляются уже в мла-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 17-78-30028.

денческом возрасте, у животных и птиц, а наблюдаемое сходство в обработке числовой информации подтверждает значение чувства числа в ходе эволюции [18].

В целом ряде исследований показано, что чувство числа тесно связано с успешностью обучения математике [4; 10; 14]. При этом в одних работах эти связи подтверждаются только на определенных возрастных этапах (например, в младшем школьном возрасте [15]), тогда как в других — сообщается об их отсутствии [23]. Эти наблюдаемые различия могут быть обусловлены гетерогенностью психологического конструкта "Чувство числа", связанной, в частности, с представлением количеств в символической и несимволической системе [2; 9]. Эти различные аспекты чувства числа, соответственно, и оцениваются с помощью разных тестовых заданий. Так, те аспекты, которые связаны с оперированием количествами в символической форме, измеряются с помощью стимульного материала в виде чисел [19], а аспекты, связанные с несимволически выраженными количествами, измеряются с помощью тестов со стимулами в виде множеств различающихся объектов [14].

При этом оценка множеств и в символической, и несимволической системах подчинена одним и тем же принципам. Так, один из принципов связан с расстоянием между множествами: труднее сравнивать множества в 8 и 5 объектов, чем в 7 и 3. Иными словами, чем ближе расстояние между множествами, тем сложнее их сравнивать. Второй принцип оценки связан с размерами множеств: труднее сравнивать большие множества, чем маленькие. Например, труднее сравнить 70 и 80, чем 10 и 20, даже при равном расстоянии между множествами [25]. При оценке позиции числа на числовой линии эти принципы выражаются в том, что вне зависимости от возраста респондентов ментальное расстояние между числами меньшей величины (в начале линии) переоценивается ими в сравнении с расстоянием между числами большей величины. Иными словами, к концу числовой линии происходит своего рода "компрессия" чисел: расстояние между 1 и 10 воспринимается как большее, чем между 70 и 80 [9; 25]. Несмотря на сходство принципов оперирования количествами в двух системах, успешность выполнения тестовых заданий на оценку символически и несимволически выраженных количеств может различаться у одного и того же человека, что, в свою очередь, может приводить к различиям во взаимосвязях чувства числа с математическими достижениями. Этот факт требует оценки обоих аспектов чувства числа — символического и несимволического — в единой исследовательской программе.

В срезовых исследованиях, в том числе, и на российской выборке, показано, что чувство числа

является весомым предиктором математических достижений в период школьного возраста [5; 7]. При этом среди различных аспектов чувства числа умение точно определять позицию числа на линии лучше предсказывает академическую успешность в математике; и этот результат воспроизводится в разных культурах [5; 8; 11]. Однако в ряде работ показано, что взаимосвязь чувства числа и успешности обучения математике может быть опосредована уровнем интеллекта. Так, в возрасте 8 лет индивидуальные различия в интеллекте связаны с точностью определения позиции числа на числовой линии, а также с логарифмическим (характеризующим менее точные репрезентации) или линейным (характеризующим более точные репрезентации) паттерном ответов [12]. Эти данные требуют учета уровня интеллекта при анализе связей между чувством числа и математической успешностью.

ПРОБЛЕМА ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННОЙ СВЯЗИ ЧУВСТВА ЧИСЛА И ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Для понимания механизмов взаимосвязи между анализируемыми психологическими конструктами особенно важно оценивать направление этой взаимосвязи, что может быть определено только в ходе лонгитюдного исследования, в котором показатели чувства числа и академической успешности измеряются у одних и тех же респондентов на протяжении определенного временного интервала [6; 16].

Так, в ряде лонгитюдных исследований показано, что индивидуальные различия в умении оперировать несимволически выраженными количествами в дошкольном возрасте являются прогностичными в отношении успешности обучения математике в старшем возрасте [11; 17]. В то же время для чувства числа, связанного с умением оперировать символически выраженными количествами, получены несколько иные данные, свидетельствующие о большей роли обучения понятию числа и арифметических операций. Так, индивидуальные различия в умении точно определить позицию числа на линии у детей старшего школьного возраста характеризуются меньшей вариативностью по сравнению с детьми младшего школьного возраста [21], а дети, которые получали обратную связь во время выполнения задания, точнее выполняли задания, чем их сверстники, не получавшие обратной связи [22].

В целом ряде исследований обсуждаются возрастные различия во взаимосвязях между несимволической и символической оценкой количеств, наблюдающиеся в ходе школьного обучения ма-

тематике по мере формирования понятия числа и приобретения ребенком опыта практической работы с числовым материалом [13; 19]. Так, постепенное улучшение в период школьного возраста наблюдается для показателя чувства числа, связанного с оценкой несимволически выраженных количеств [13]. В то время как улучшение показателя чувства числа, измеренного с помощью теста "Числовая линия", может происходить скачкообразно, под более существенным влиянием процесса обучения математике [19].

Особый интерес в этом плане представляет *младший школьный возраст*, на протяжении которого происходит процесс активного усвоения новых знаний, связанных с числом, геометрической формой, арифметическими операциями сравнения, сложения и вычитания. Возможно, что в ходе начального обучения для аспектов чувства числа, связанных с оценкой символически и несимволически выраженных количеств, будут выявлены разнонаправленные связи с успешностью в обучении математике. Действительно, как показано в срезовых исследованиях с участием российских школьников, характер взаимосвязей между показателями когнитивного развития и академической успешности изменяется на разных этапах школьного обучения [4], подтверждая зональный характер их взаимодействия. Так, согласно *концепции зонального взаимодействия* индивидуально-психологических признаков и социальных условий, разработанной А.Л. Журавлевым, соотношение влияния психологических и непсихологических факторов на разных этапах онтогенеза меняется [1]. Проверка *гипотезы* о направлении связи между показателями чувства числа и академической успешности в рамках лонгитюдного исследования позволит получить новые данные о взаимодействии когнитивного функционирования и обучения в период младшего школьного возраста, что, согласно Я.А. Пономареву, является наиболее адекватным способом понимания механизмов развития [3].

Таким образом, *целью* исследования является изучение причинно-следственных связей между чувством числа и академической успешностью по математике при контроле интеллекта в ходе обучения на начальной ступени общего образования. При этом в фокусе внимания оказываются два различных аспекта чувства числа, отражающих способность к оперированию количествами как в символической, так и несимволической форме. Участие в исследовании школьников, обучающихся в начальных классах, когда происходит наиболее интенсивное формирование понятия числа и связанных с ним операций, открывает возможность оценить, каким образом процесс обучения модулирует связь между чувством числа и академической успешностью по математике.

МЕТОДИКА

Участники исследования. Выборку исследования составили школьники муниципального общеобразовательного учреждения, участвующие в Российском лонгитюдном исследовании академической успешности школьников. В настоящей работе анализируются данные 133 обучающихся, собранные в конце третьего и четвертого годов обучения. Средний возраст участников на третьем году обучения составил 9.82 года (стандартное отклонение = 0.30, количество мальчиков — 45.1%), на четвертом году — 10.82 года (стандартное отклонение = 0.30, количество мальчиков — 45.1%). Анализ результатов осуществлялся на базе обезличенных персональных данных.

Методика и процедура исследования.

В исследовании применялись следующие методики:

1. *Чувство числа, способность оперировать несимволически выраженными количествами — тест "Чувство числа".*

На экране предъявляются массивы из желтых и синих точек, различающиеся по размеру. Школьникам требуется решить, предъявляемый массив содержит больше желтых или синих точек, и нажать на нужные клавиши на клавиатуре (С или Ж). Стимульный материал содержит 150 статических фотографий с массивами желтых и синих точек, число которых колеблется от 5 до 21 точки каждого цвета, отношения массивов в двух цветах составляют 1:3 и 6:7. Массив появляется на экране в течение 400 мс, максимальное время ответа составляет 8 секунд. Тест состоит из трех блоков по 50 заданий. Программа записывает точность ответов и время реакции.

2. *Чувство числа, способность оперировать символически выраженными количествами — тест "Числовая линия".*

На экране монитора представлена линия "0—1000" с определенным числом в верхней части экрана. Задача школьников состоит в том, чтобы разместить на линии то число, которое отображается в верхней части экрана. В этом задании имеется 22 числа, место которых на линии должно быть указано с помощью компьютерной мыши. Программа регистрирует показатель — среднее отклонение отмеченной школьником позиции на линии от действительной позиции каждого числа. Таким образом, чем больше значение показателя по этому тесту, тем хуже индивидуальный результат.

3. *Невербальный интеллект — тест "Стандартные прогрессивные матрицы".*

Задания сгруппированы в 5 серий, каждая из которых состоит из 12 заданий. Рассчитывается ко-

личество правильно решенных заданий по каждой серии и общее количество по всему тесту.

4. Успешность обучения математике.

В качестве показателей успешности обучения использовались четвертные оценки по математике, выставленные учителем начальных классов. В статистическом анализе использовалось среднее арифметическое четвертных оценок.

Статистический анализ. На первом этапе был проведен корреляционный анализ показателей чувства числа, невербального интеллекта и успешности обучения математике, зафиксированных в конце третьего и четвертого годов обучения. Рассчитывались коэффициенты корреляции Спирмена.

На втором этапе было проведено перекрестно-лонгитюдное структурное моделирование для анализа временной структуры причинно-следственных связей между показателями чувства числа и успешности в математике, измеренными дважды на протяжении младшего школьного возраста, при контроле интеллекта.

В ходе анализа произведена оценка трех типов связей: 1) авторегрессивные связи, отражающие стабильность каждого изучаемого признака во времени, 2) одновременные взаимосвязи, оценивающие общую вариацию переменных внутри каждого из двух замеров, и 3) перекрестно-лонгитюдные связи, показывающие, насколько вариация предшествующего измерения одного признака объясняет вариацию последующего измерения другого признака.

Последовательно сравнивались четыре конкурирующих модели связи двух аспектов чувства числа и успешности обучения математике.

Модель 1, предполагающая наличие связей между чувством числа и успешностью в обучении математике только внутри каждого из измерений (М 1).

Модель 2, предполагающая, что от индивидуальных различий в чувстве числа в третьем классе зависит успешность в обучении математике в четвертом классе (М 2).

Модель 3, напротив, предполагала, что от успешного обучения математике в третьем классе зависит успешное выполнение тестовых заданий на чувство числа (М 3).

Модель 4, реципрокная, предполагала, что успешность в математике, измеренная в третьем классе предсказывает успешность в выполнении теста чувства числа, измеренную в четвертом классе, и, наоборот, чувство числа, измеренное в более раннем возрасте, предсказывает успешность в математике в более позднем возрасте (М 4).

РЕЗУЛЬТАТЫ

В табл. 1 представлены описательные статистики по показателям чувства числа, связанным с оперированием множеств объектов (“Чувство числа”) и определением позиции числа на линии (“Числовая линия”), невербального интеллекта (“Стандартные прогрессивные матрицы”) и успешности обучения математике.

В табл. 1 для показателей по тестам “Чувство числа” и “Стандартные прогрессивные матрицы” указано среднее значение количества правильных ответов при максимуме в 150 и 60 заданий соответственно. Для показателя “Числовая линия” — среднее значение отклонения отмеченной позиции числа от действительной позиции. При этом меньшее значение соответствует лучшему, более точному, выполнению задания. Успешность обучения математике оценена как среднее значение четвертных оценок и варьирует в пределах от 2 до 5.

Согласно табл. 1 в ходе начального обучения показатели чувства числа улучшаются при уменьшении стандартного отклонения. Напротив, успешность обучения математике не изменяется при сохранении диапазона вариативности.

Корреляционный анализ: взаимосвязи чувства числа и успешности обучения математике в третьем и четвертом классах.

В ходе корреляционного анализа изучалась структура взаимосвязей двух аспектов чувства чис-

Таблица 1. Описательные статистики анализируемых показателей, зафиксированных на третьем и четвертом годах обучения

Год обучения	Тестовый показатель	Среднее значение	Стандартное отклонение
3-й год	“Чувство числа”	95.66	13.33
	“Числовая линия”	93.44	68.93
	Успешность обучения математике	4.17	0.61
	“Стандартные прогрессивные матрицы”	40.63	7.86
4-й год	“Чувство числа”	100.13	14.25
	“Числовая линия”	77.80	51.30
	Успешность обучения математике	4.17	0.63

ла (“Чувство числа” и “Числовая линия”), невербального интеллекта (“Стандартные прогрессивные матрицы”) и успешности обучения математике на третьем и четвертом годах обучения. В табл. 2 представлены коэффициенты корреляции Спирмена для анализируемых показателей, зафиксированных на третьем (нижний левый “треугольник”) и четвертом (верхний правый “треугольник”) годах обучения.

Согласно данным табл. 2 между показателями когнитивного развития и успешности обучения математике наблюдаются статистически значимые умеренные корреляции — от 0.33 до 0.45 при $p < 0.01$. Сравнительный анализ корреляционных коэффициентов, полученных на третьем и четвертом годах обучения, показал, что для такого аспекта чувства числа, как сравнение несимволически выраженных количеств, взаимосвязь с успешностью обучения математике в четвертом классе становится менее выраженной по сравнению с третьим классом (0.33 против 0.38 при $p < 0.01$). Сходная тенденция выявлена и для показателя невербального интеллекта: 0.42 в четвертом классе против 0.45 в третьем классе. Напротив, такой аспект чувства числа, как определение позиции числа на

числовой линии, оказался теснее взаимосвязан на четвертом году обучения ($r = -0.42$; $p < 0.01$), чем на третьем году ($r = -0.40$; $p < 0.01$).

Корреляционная взаимосвязь между двумя анализируемыми аспектами чувства числа является более выраженной на третьем году обучения ($r = 0.45$; $p < 0.01$) по сравнению с четвертым годом ($r = 0.41$; $p < 0.01$).

В целом, согласно корреляционному анализу, структура взаимосвязей показателей когнитивного развития и успешности обучения математике в третьих и четвертых классах остается неизменной.

Перекрестно-лонгитюдное структурное моделирование: причинно-следственные связи чувства числа и успешности обучения математике.

В ходе перекрестно-лонгитюдного анализа сравнивались четыре конкурирующих модели связи двух аспектов чувства числа и успешности обучения математике при контроле невербального интеллекта в младшем школьном возрасте.

В табл. 3 представлены показатели соответствия четырех тестируемых моделей эмпирическим данным: М 1 — чувство числа и успешность обучения

Таблица 2. Результаты корреляционного анализа анализируемых показателей, зафиксированных на третьем и четвертом годах обучения

	“Чувство числа”	“Числовая линия”	Успешность обучения математике	“Стандартные прогрессивные матрицы”
“Чувство числа”	1	−0.41**	0.33**	0.30**
“Числовая линия”	−0.45**	1	−0.42**	−0.23*
Успешность обучения математике	0.38**	−0.40**	1	0.42**
“Стандартные прогрессивные матрицы”	0.24*	−0.33**	0.45**	1

Примечание. * $p < 0.05$; ** $p < 0.01$

Таблица 3. Индексы соответствия моделей связи чувства числа и успешности обучения математике

Показатели		М 1	М 2	М 3	М 4
<i>AIC/BIC</i>	<i>AIC</i>	3663	3666.2	3656.6	3659.9
	<i>BIC</i>	3725.8	3739.4	3728.8	3738.4
	<i>adj. BIC</i>	3650	3650.9	3641.4	3643.6
χ^2	<i>value</i>	16.9	12.09	2.5	1.79
	<i>df</i>	9	5	5	3
	<i>p-value</i>	0.049	0.033	0.78	0.62
<i>RMSEA (CIs)</i>	<i>Estimate</i>	0.093	0.118	0.00	0.00
	<i>90% CI</i>	0.002–0.16	0.03–0.21	0.00–0.09	0.00–0.04
<i>CFI/TLI</i>	<i>CFI</i>	0.98	0.98	1.00	1.00
	<i>TLI</i>	0.95	0.92	1.03	1.01

Примечание. *AIC* — Информационный критерий Акаике; *BIC* — Байесовский информационный критерий; *adj. BIC* — Байесовский информационный критерий, скорректированный на размер выборки; χ^2 (*value*, *df*, *p-value*) — статистики хи-квадрат (значение, степени свободы, уровень значимости); *RMSEA (Estimate, 90% CIs)* — среднеквадратическая ошибка аппроксимации (значение, 90% доверительные интервалы); *CFI* — сравнительный показатель соответствия; *TLI* — показатель Такера–Льюиса

математике связаны только внутри каждого из измерений; М 2 — чувство числа в третьем классе предсказывает успешность обучения математике в четвертом в классе; М 3 — успешность обучения математике в третьем классе предсказывает чувство числа в четвертом классе; М 4 — реципрокная.

Согласно табл. 3 наилучшим образом описывает эмпирические данные реципрокная модель (М 4), предполагающая, что показатели чувства числа, измеренные в третьем классе, предсказывают успешность обучения математике в четвертом классе и наоборот, успешное обучение математике в третьем классе предсказывает тестовые показатели чувства числа в четвертом классе.

Эта модель представлена на рис. 1, где “Матем_3” и “Матем_4” — показатели успешности обучения математике в третьем и четвертом классах; “Числ.линия_3” и “Числ.линия_4” — показатели чувства числа, связанные с определением позиции числа на линии, измеренные в третьем и четвертом классах; “Ч.числа_3” и “Ч.числа_4” — показатели чувства числа, связанные с оперированием несимволически выраженными количествами, измеренные в третьем и четвертом классах; “Интел_3” — показатель невербального интеллекта. Указаны стандартизированные регрессионные коэффициенты ($p < 0.05$).

Согласно диаграмме реципрокной модели, представленной на рис. 1, все ауторегрессивные связи, отражающие стабильность анализируемых признаков во времени, являются статистически значимыми.

Оценка перекрестно-лонгитюдных связей показала, что статистически значимой оказалась связь между успешностью обучения математике в третьем классе с показателем чувства числа, связанным

с определением позиции числа на числовой линии в четвертом классе (-0.33 при $p < 0.05$). Иными словами, ни один из аспектов чувства числа, измеренный в третьем классе, не вносит статистически значимого вклада в вариацию успешности обучения математике к концу обучения в начальной школе ($p > 0.05$).

Среди одновременных связей статистически значимые связи между всеми переменными были получены только на первом измерении, на втором — статистически достоверная связь получена только между двумя аспектами чувства числа. Вместе с тем, корреляционный анализ, выполненный на данных четвертого года обучения, выявил умеренные взаимосвязи чувства числа с успешностью обучения математике ($0.33 < |r| < 0.42$). Кроме того, обращает на себя внимание высокий регрессионный коэффициент между двумя измерениями успешности обучения математике (0.96 при $p < 0.05$), что может являться причиной искажения одновременных связей [16].

В связи с высокой временной стабильностью показателя успешности обучения математике, основанной на учительских оценках, для оценки перекрестно-лонгитюдных связей проверялись две модифицированные теоретические модели. В этих моделях в соответствии с принципами структурного моделирования успешность обучения представлена одним измерением — только в третьем или только в четвертом классе. Этот методический прием позволил провести оценку перекрестно-лонгитюдных связей между чувством числа и академической успешностью при выявленной высокой временной стабильности показателя успешности обучения математике.

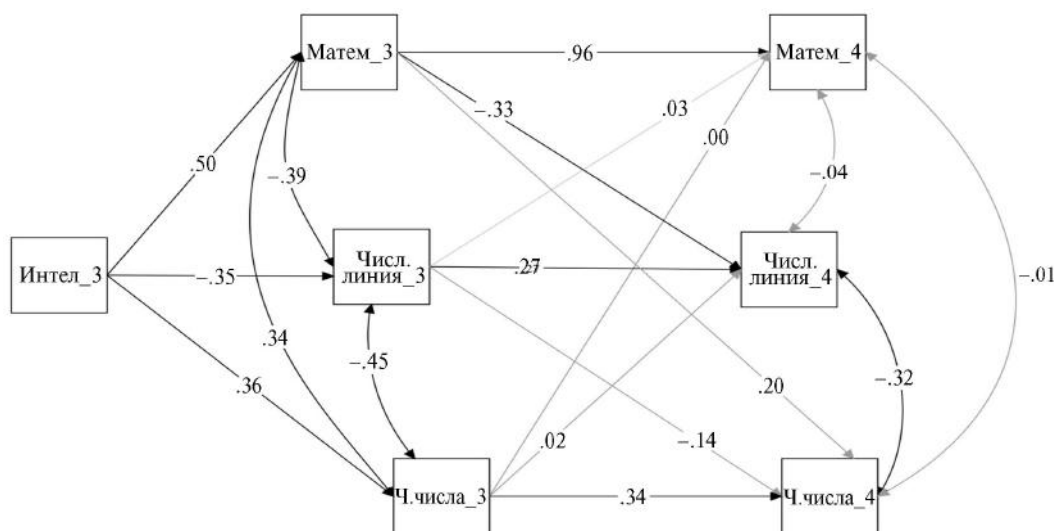


Рис. 1. Стандартизованная перекрестно-лонгитюдная модель связи чувства числа и успешности в математике в двух временных измерениях

Согласно анализу обе модифицированные модели имеют сходные индексы, которые подтверждают удовлетворительное соответствие моделей эмпирическим данным ($RMSEA \leq 0.06$, $0.00 \leq 90\% CI < 0.08$; $CFI \geq 0.95$; $SMRM \leq 0.06$; $TLI \geq 0.90$). Оценка перекрестно-лонгитюдных связей показала, что наибольшим регрессионным весом обладает связь, согласно которой успешность обучения математике в третьем классе вносит вклад в индивидуальные различия в чувстве числа, измеренном тестом “Числовая линия” в четвертом классе ($\beta = -0.33$).

Таким образом, даже при наличии высокой временной стабильности академической успешности показано, что обучение математике в третьем классе является важнейшим фактором, формирующим индивидуальные различия по такому аспекту чувства числа, как умение точно определять позицию числа на числовой линии на четвертом году обучения. Оценка параметров всех теоретических моделей показала, что в ходе начального обучения второй анализируемый аспект чувства числа — умение оперировать несимволически выраженными количествами — не связан причинно-следственными отношениями с успешностью обучения математике.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе связи между чувством числа и успешностью обучения математике изучались в ходе двухлетнего лонгитюдного исследования.

Согласно результатам корреляционного анализа к четвертому году обучения в начальной школе взаимосвязь успешности обучения математике с показателем чувства числа, характеризующим умение оперировать несимволически выраженными количествами, ослабевает по сравнению с предыдущим, третьим годом обучения. Сходная тенденция выявлена и для показателя невербального интеллекта. Эти результаты хорошо согласуются с выводами исследований с участием российских школьников, в которых сообщается о постепенном снижении роли целого спектра когнитивных характеристик — от скорости переработки информации до невербального интеллекта — в показателях академической успешности в ходе школьного обучения [4]. В частности, показано, что самые тесные взаимосвязи между чувством числа, характеризующим умение сравнивать несимволически выраженные количества, и годовой оценкой по математике выявлены на начальном уровне общего образования.

Напротив, чувство числа, основанное на умении точно определять позицию числа на числовой линии, в большей мере взаимосвязано с успешностью обучения математике на четвертом году

в сравнении с третьим. Иными словами, чем дольше учатся дети на начальной ступени общего образования, тем в меньшей степени их успешность обучения математике зависит от умения оперировать несимволически выраженными количествами и в большей степени — от чувства числа, связанного с оперированием символически выраженными количествами. В то же время справедлива интерпретация полученных результатов и в обратном направлении: в четвертом классе в сравнении с третьим классом от успешности обучения математике в меньшей мере зависит уровень развития чувства числа, связанного с несимволически выраженными количествами, и в большей мере — чувства числа, характеризующего умение оперировать числовым материалом. Такие разнонаправленные тенденции во взаимосвязях успешности в математике с показателями восприятия количеств в несимволической и символической системах связаны со спецификой процесса обучения на начальном уровне общего образования, в первую очередь, с содержанием школьного курса математики [19].

В ходе перекрестно-лонгитюдного структурного моделирования сравнивались четыре конкурирующих модели связи двух аспектов чувства числа и успешности обучения математике. Согласно анализу, наилучшим образом описывает эмпирические данные реципрокная модель, предполагающая, что показатели чувства числа и успешность обучения математике в начальной школе связаны перекрестно-лонгитюдными связями даже при контроле невербального интеллекта. При этом оценка перекрестно-лонгитюдных связей внутри модели показала, что единственно статистически значимой является связь успешности обучения математике в третьем классе с показателем чувства числа, отражающим умение точно определить позицию числа на числовой линии в четвертом классе. Иными словами, от успешности усвоения в ходе начального обучения учеником понятия числа и арифметических операций зависит точность определения позиции числа на числовой линии: чем выше успеваемость школьника в третьем классе, тем лучше он в четвертом классе выполняет задания на чувство числа, связанное с оценкой символически выраженных количеств. Напротив, для аспекта чувства числа, связанного с умением оперировать несимволически выраженными количествами к концу начального обучения, успешность обучения математике, измеренная в более раннем возрасте, является статистически не значимой.

Эти выявленные, в том числе и при анализе модифицированных моделей, различия для двух показателей чувства числа свидетельствуют о существенном влиянии обучения на показатель точности определения позиции числа на числовой линии, что согласуется с имеющимися в литературе

данными [21]. Согласно исследованиям, чувство числа является многомерным конструктом, в котором можно выделить низко- и высокоуровневые характеристики [9]. Как правило, низкоуровневые характеристики связываются с умением приблизительно оценивать и оперировать несимволически выраженными количествами и обозначаются как эволюционно сохраненные признаки, а высокоуровневые — отождествляются с символическим обозначением объектов, понимание которого формируется под влиянием обучения. Отсутствие четких границ между чувством числа, особенно связанным с оценкой символически выраженных количеств, и математическими навыками оставляет открытым вопрос о том, *что* определяет успешность выполнения задания “Числовая линия”: уровень усвоения образовательной программы по математике или чувство числа.

Вместе с тем, как было описано выше, процесс оценки символически и несимволически выраженных количеств опирается на одинаковые принципы, что дает возможность анализировать оба тестовых задания как диагностирующие чувство числа, но рассматривать их необходимо как более (в случае числовой линии) или менее связанные с арифметическими навыками [9]. С этой точки зрения, полученные в данной работе результаты о роли успешности обучения математике на протяжении третьего класса в формировании индивидуальных различий по чувству числа, основанному на определении позиции числа на линии, выглядят логично: чем успешнее освоена школьная программа третьего года обучения, включающая, в том числе, знание числового ряда до 1000, тем точнее выполняется задание “Числовая линия”. Дополнительным аргументом является выявленная в корреляционном анализе тенденция к усилению взаимосвязи академической успешности и точности определения позиции числа на линии к концу обучения в начальной школе. Так, по мере формирования арифметических знаний, умений и навыков дети начинают чаще применять более точные линейные репрезентации, а не логарифмические [12].

Относительно чувства числа, отражающего способность к оперированию несимволически выраженными количествами, в данном исследовании не выявлено перекрестно-лонгитюдных связей с успешностью обучения математике. Этот результат согласуется с имеющимися в литературе данными об отсутствии прогностических связей между чувством числа и математической успешностью, в том числе, на протяжении младшего школьного возраста [15].

В ходе анализа различия выявлены и в динамике двух аспектов чувства числа на протяжении начального обучения: наиболее стабильным во време-

ни является показатель чувства числа, связанный с оперированием несимволически выраженными количествами. Этот результат согласуется с имеющимися данными о различиях во временной стабильности двух анализируемых аспектов чувства числа [13; 19]. Наблюдаемые различия в динамике также могут обуславливать специфику связей между разнообразными показателями чувства числа и успешностью обучения математике.

Следует подчеркнуть, что согласно результатам настоящего исследования, ни один из аспектов чувства числа, измеренный в третьем классе, не вносит статистически значимого вклада в вариацию успешности обучения математике к концу обучения в начальной школе, что отличается от результатов, полученных на других выборках. Так, в большинстве лонгитюдных проектов показатели чувства числа, связанные с оценкой количеств в символической и несимволической системах, рассматриваются в качестве ранних, дошкольных, предикторов школьной математической успешности [10; 17].

Возможно, расхождения в результатах связаны со спецификой российской системы образования, в частности, с оценением успешности в обучении школьным дисциплинам. Как правило, в российском образовании учительская оценка является единственным критерием оценивания академической успешности младших школьников и основывается на субъективном видении объема усвоенного школьником учебного материала по совокупности контрольных работ и ответов у доски в течение всего года. В исследованиях с участием школьников, например, из США, Великобритании и Западной Европы, академическая успешность тоже оценивается учителем, но на основании итоговых стандартизированных тестовых заданий, включающих не только учебный материал, но и задания, требующие нестандартных, не объясняемых в ходе учебного года решений и умения применять полученные знания в реальной жизни [5; 14]. Так, в исследовании на российской выборке старших школьников выявлены лишь умеренные корреляционные взаимосвязи (от 0.41 до 0.56 при $p < 0.01$) между тремя различными показателями академической успешности по математике в девятих классах — учительской оценкой, государственным экзаменом и компьютеризированным тестом [4]. Подобные расхождения в показателях академической успешности могут быть причиной изменения связей между чувством числа и успешностью обучения математике, наблюдаемые в результатах опубликованных исследований.

В то же время, полученные данные о причинно-следственных отношениях чувства числа и успешности обучения математике в период младшего

школьного возраста могут отражать зональный характер взаимодействия психологических и непсихологических факторов [1, с. 30–33], в данном исследовании — разнообразных когнитивных характеристик и показателей академической успешности. Так, подобная взаимосвязь может быть характерна только для начальной ступени школьного обучения, когда закладываются основы математического знания, необходимые для оперирования символически выраженными количествами. В ряде исследований, например, сообщается, что чувство числа, измеренное в младшем школьном возрасте, является предиктором “более поздней” математической успешности, измеренной в среднем или старшем школьном возрасте [8; 14]. В настоящей работе оба конструкта — и чувство числа, и успешность обучения математике — измерялись в период начального обучения. Возможно, иные результаты будут получены при анализе чувства числа, измеренного в начальной школе, как более раннего предиктора академической успешности на основной или полной ступени образования. Однако проверка этой гипотезы осталась за пределами настоящей работы и является предметом дальнейшего лонгитюдного исследования.

Таким образом, в настоящей работе показано, что процесс обучения может оказывать влияние на формирование причинно-следственных связей между показателями когнитивного функционирования и академической успешности по математике. В контексте важнейшей проблемы соотношения когнитивного развития и обучения установлено, что для такого аспекта чувства числа, как умение точно обозначать позицию числа на линии, наблюдается эффект обучения. Для аспекта чувства числа, связанного с оперированием несимволически выраженными количествами, успешность обучения математике, измеренная годом ранее, не играет значимой роли. Полученные результаты подчеркивают важность изучения эффектов влияния национальных образовательных систем на индивидуально-психологическое развитие и обуславливают необходимость кросскультурного лонгитюдного анализа взаимодействия когнитивного функционирования и обучения на всем протяжении школьного возраста.

ВЫВОДЫ

1. При контроле невербального интеллекта показатели чувства числа, измеренные на третьем году обучения, не предсказывают академическую успешность по математике к концу четвертого года на выборке российских школьников.

2. В ходе начального обучения наблюдаются разнонаправленные тенденции во взаимосвязях между двумя аспектами чувства числа и невербальным ин-

теллектом: связь невербального интеллекта уменьшается с “символическим” аспектом чувства числа, тогда как с “несимволическим” — увеличивается.

3. Выявлены диссоциации взаимосвязей двух аспектов чувства числа — символического и несимволического — с успешностью обучения математике: эффекты обучения наблюдаются только для аспекта чувства числа, связанного с умением точно определять позицию числа на линии.

4. На протяжении начального обучения наиболее стабильным во времени является показатель чувства числа, связанный с оперированием несимволически выраженными количествами, по сравнению с показателем, характеризующим умение оперировать символически выраженными количествами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев А.Л. Взаимодействие социально-психологических и социально-экономических феноменов в изменяющемся обществе // Социально-психологическая динамика в условиях экономических изменений / Отв. ред. А.Л. Журавлев, Е.В. Шорохова. М.: Изд-во “Институт психологии РАН”, 1998. С. 11–37.
2. Малых С.Б., Тихомирова Т.Н., Жоу С., Вей В., Родич М., и др. Структура взаимосвязей когнитивных характеристик и успешности в арифметике у дошкольников: кросскультурный анализ // Вопросы психологии. 2012. № 5. С. 133–143.
3. Пономарев Я.А. Перспективы развития психологии творчества // Психология творчества: школа Я.А. Пономарева. М.: Изд-во “Институт психологии РАН”, 2006. С. 145–276.
4. Тихомирова Т.Н., Малых С.Б. Когнитивные основы индивидуальных различий в успешности обучения. М.; СПб.: Нестор-История, 2017.
5. Тихомирова Т.Н., Малых С.Б., Тосто М.Г., Ковас Ю.В. Когнитивные характеристики и успешность в решении математических заданий в старшем школьном возрасте: кросскультурный анализ // Психологический журнал. 2014. Т. 35. № 1. С. 41–53.
6. Тихомирова Т.Н., Мисожникова Е.Б., Кузьмина Ю.В., Малых С.Б. Взаимосвязь невербального интеллекта и успешности в математике в младшем школьном возрасте: лонгитюдное исследование // Теоретическая и экспериментальная психология. 2016. Т. 9. № 4. С. 6–22.
7. Тихомирова Т.Н., Модяев А.Д., Леонова Н.М., Малых С.Б. Факторы успешности в обучении на начальной ступени общего образования: половые различия // Психологический журнал. 2015. Т. 36. № 5. С. 43–54.
8. Booth J.L., Siegler R.S. Numerical magnitude representations influence arithmetic learning // Child dev. 2008. V. 79 (4). P. 1016–1031.

9. *Dehaene S.* The Number Sense: How the mind creates mathematics. Oxford: Oxford University Press USA, 2011.
10. *Desoete A., Ceulemans A., De Weerd F. & Pieters S.* Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study // *Brit. J. Educ. Psychol.* 2012. V. 82(1). P. 64–81.
11. *Geary D.C.* Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study // *Dev. psychol.* 2011. V. 47(6). P. 1539.
12. *Geary D.C., Hoard M.K., Nugent L., Byrd-Craven J.* Development of number line representations in children with mathematical learning disability // *Dev. neuropsychol.* 2008. V. 33(3). P. 277–299.
13. *Halberda J., Ly R., Wilmer J., Naiman D., Germine L.* Number sense across the lifespan as revealed by a massive internet-based sample // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2012. V. 109 (28). P. 11116–11120.
14. *Halberda J., Mazocco M.M., Feigenson L.* Individual differences in nonverbal estimation ability predict maths achievement // *Nature.* 2008. V. 455. P. 665–668.
15. *Inglis M., Attridge N., Catchelor S., Gilmore S.* Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: but only in children // *Psychon. Bull. Rev.* 2011. V. 18(6). P. 1222–1229.
16. *Little T.D., Preacher K.J., Selig J.P., & Card N.A.* New developments in latent variable panel analyses of longitudinal data // *Int. J. Behav. Dev.* 2007. V. 31(4). P. 357–365.
17. *Mazzocco M.M.M., Feigenson L., Halberda J.* Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance // *PLoS ONE.* 2011. V. 6(9). P. 1–8.
18. *Merritt D.J., DeWind N.K., Brannon E.M.* Comparative cognition of number representation // T.R. Zentall, E.A. Wasserman (Eds.). *The Oxford Handbook of Comparative Cognition.* New York, NY: Oxford University Press, 2012. P. 451–476.
19. *Opfer J.E., Siegler R.S.* Representational change and children's numerical estimation // *Cogn. Psychol.* 2007. V. 55. P. 169–195.
20. *Rodic M., Zhou X., Tikhomirova T., Wei W., Malykh S., Ismatulina V., Sabirova E., Davidova Y., Tosto M., Lemeilin J-P. & Kovas Y.* Cross-Cultural Investigation into Cognitive Underpinnings of Individual Differences in Early Arithmetics // *Dev. Sci.* 2015. V. 18(1). P. 165–174.
21. *Siegler R.S., Booth J.L.* Development of numerical estimation in young children // *Child dev.* 2004. V. 75(2). P. 428–444.
22. *Siegler R.S., Ramani G.B.* Playing linear number board games — but not circular ones — improves low-income preschoolers' numerical understanding // *J. Educ. Psychol.* 2009. V. 101 (3). P. 545.
23. *Soltész F., Scöz D., Scöz L.* Relationship between magnitude representation, counting and memory in 4- to 7-year old children: A developmental study // *Behav. Brain Funct.* 2010. V. 6(13). P. 1–14.
24. *Tikhomirova T.N.* Spatial thinking and memory in Russian high school students with different levels of mathematical fluency // *Procedia Soc. Behav. Sci.* 2017. V. 237. P. 1260–1264.
25. *Whalen J., Gallistel C.R., Gelman R.* Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation // *Psychol. Sci.* 1999. V. 10(2). P. 130–137.

NUMBER SENSE AND MATHEMATICAL ACHIEVEMENT ACROSS PRIMARY SCHOOL YEARS: CROSS-LAGGED ANALYSIS¹

T.N. Tikhomirova^{1)*}, S.B. Malykh^{2)**}

¹⁾ *Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “M.V. Lomonosov Moscow State University”; 125009, Moscow, Mokhovaya, 11, 9, Russia.*

²⁾ *Federal State Budget Scientific Institution “Psychological Institute of Russian Academy of Education”; 125009, Moscow, Mokhovaya, 9, 4, Russia.*

* *Corresponding member of Russian Academy of Education, Sc.D. (Psychology), Professor, Leading Researcher. E-mail: tikho@mail.ru.*

** *Member of Russian Academy of Education, Sc.D. (Psychology), Professor, Director of Laboratory. E-mail: malykhbs@mail.ru.*

Received 08.08.2017

Abstract. The current article presents the results of a longitudinal investigation of the relationship between number sense and mathematical achievement across the primary school years. We analyzed the data of 133

¹ The study was supported by the Russian Science Foundation, project No. 17-78-30028.

participants from the Russian Longitudinal Study of Academic Achievement on symbolic and non-symbolic number sense ability and mathematical achievement in Grades 3 and 4. The mean age at Grade 3 was 9.82 years ($SD = 0.3$) and 10.82 years at Grade 4 ($SD = 0.3$). We used the cross-lagged analysis to explore the causal relationship between number sense and mathematical achievement. Our analysis revealed that the reciprocal model best described the empirical data suggesting the cross-lagged relation between number sense accuracy and academic achievement in Math. The results of our longitudinal study have shown differences in the association the mathematical achievement with the two aspects of number sense — symbolic and non-symbolic representation. Thus, mathematical achievement in Grade 3 predicted only the symbolic estimation ability in Grade 4. On the contrary, mathematical achievement at Grade 3 had no significant effect on another aspect of number sense, non-symbolic estimation ability, by the end of primary school. We also found differences in the stability of the two aspects of number sense at primary school age. Thus, non-symbolic number sense ability was the most stable over time. The results were discussed in the context of a theoretical problem of the association of cognitive development and school education.

Keywords: number sense, mathematical achievement, primary school years, cross-lagged analysis, education, development.

REFERENCES

1. Zhuravlev A.L. Vzaimodejstvie sotsial'no-psikhologicheskikh i sotsial'no-ehkonomicheskikh fenomenov v izmenyayushhemsya obshchestve. Sotsial'no-psikhologicheskaya dinamika v usloviyakh ehkonomicheskikh izmenenij. Ed. A.L. Zhuravlev, E.V. Shorokhova. M.: Izd-vo "Institut psikhologii RAN", 1998. P. 11–37. (in Russian)
2. Malykh S.B., Tikhomirova T.N., Zhou X., Wei W., Rodic M., et al. Struktura vzaimosvyazey kognitivnykh kharakteristik i uspehnosti v arifmetike u doskol'nikov: krosskul'turnyj analiz. Vopr. psikhol. 2012. № 5. P. 133–143. (in Russian)
3. Ponomarev YA.A. Perspektivy razvitiya psikhologii tvorchestva. Psikhologiya tvorchestva: shkola YA.A. Ponomareva. M.: Izd-vo "Institut psikhologii RAN", 2006. P. 145–276. (in Russian)
4. Tikhomirova T.N., Malykh S.B. Kognitivnye osnovy individual'nykh razlichij v uspehnosti obucheniya. M.; SPb.: Nestor-Istoriya, 2017. (in Russian)
5. Tikhomirova T.N., Malykh S.B., Tosto M.G., Kovas Y.V. Kognitivnye kharakteristiki i uspehnost' v reshenii matematicheskikh zadaniy v starshem shkol'nom vozraste: krosskul'turnyj analiz. Psikhologicheskii zhurnal. 2014. V. 35. № 1. P. 41–53. (in Russian)
6. Tikhomirova T.N., Misozhnikova E.B., Kuz'mina Yu.V., Malykh S.B. Vzaimosvyaz' neverbal'nogo intellekta i uspehnosti v matematike v mladshem shkol'nom vozraste: longitudnoe issledovanie. Teoreticheskaya i ehksperimental'naya psikhologiya. 2016. V. 9. № 4. P. 6–22. (in Russian)
7. Tikhomirova T.N., Modyaev A.D., Leonova N.M., Malykh C.B. Faktory uspehnosti v obuchenii na nachal'noj stupeni obshhego obrazovaniya: polovye razlichiya. Psikhologicheskii zhurnal. 2015. V.36. № 5. P. 43–54. (in Russian)
8. Booth J.L., Siegler R.S. Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. Child dev. 2008. V. 79 (4). P. 1016–1031.
9. Dehaene S. The Number Sense: How the mind creates mathematics. Oxford: Oxford University Press USA, 2011.
10. Desoete A., Ceulemans A., De Weerd F. & Pieters S. Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. Brit. J. Educ. Psychol. 2012. V. 82(1). P. 64–81.
11. Geary D.C. Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study. Dev. psychol. 2011. V. 47(6). P. 1539.
12. Geary D.C., Hoard M.K., Nugent L., & Byrd-Craven J. Development of number line representations in children with mathematical learning disability. Dev. neuropsychol. 2008. V. 33(3). P. 277–299.
13. Halberda J., Ly R., Wilmer J., Naiman D. & Germine L. Number sense across the lifespan as revealed by a massive internet-based sample. Proc. Natl. Acad. Sci. 2012. V. 109 (28). P. 11116–11120.
14. Halberda J., Mazocco M.M., Feigenson L. Individual differences in nonverbal estimation ability predict maths achievement. Nature. 2008. V. 455. P. 665–668.
15. Inglis M., Attridge N., Catchelors S., Gilmore S. Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: but only in children. Psychon. Bull. Rev. 2011. V. 18(6). P. 1222–1229.
16. Little T.D., Preacher K.J., Selig J.P., & Card N.A. New developments in latent variable panel analyses of longitudinal data. Int. J. Behav. Dev. 2007. V. 31 (4). P. 357–365.
17. Mazocco M.M., Feigenson L., Halberda J. Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. PLoS ONE. 2011. V. 6 (9). P. 1–8.
18. Merritt D.J., DeWind N.K., Brannon E.M. Comparative cognition of number representation. T.R. Zentall, E.A. Wasserman (Eds.). The Oxford Handbook of Comparative Cognition. New York, NY: Oxford University Press, 2012. P. 451–476.

19. *Opfer J.E., Siegler R.S.* Representational change and children's numerical estimation. *Cogn. Psychol.* 2007. V. 55. P. 169–195.
20. *Rodic M., Zhou X., Tikhomirova T., Wei W., Malykh S., Ismatulina V., Sabirova E., Davidova Y., Tosto M., Lemelin J.-P. & Kovas Y.* Cross-Cultural Investigation into Cognitive Underpinnings of Individual Differences in Early Arithmetics. *Dev. Sci.* 2015. V. 18(1). P. 165–174.
21. *Siegler R.S., Booth J.L.* Development of numerical estimation in young children. *Child dev.* 2004. V. 75 (2). P. 428–444.
22. *Siegler R.S., Ramani G.B.* Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *J. Educ. Psychol.* 2009. V. 101(3). P. 545.
23. *Soltész F., Scőz D., Scőz L.* Relationship between magnitude representation, counting and memory in 4- to 7-year old children: A developmental study. *Behav. Brain Funct.* 2010. V. 6 (13). P. 1–14.
24. *Tikhomirova T.N.* Spatial thinking and memory in Russian high school students with different levels of mathematical fluency. *Procedia Soc. Behav. Sci.* 2017. V. 237. P. 1260–1264.
25. *Whalen J., Gallistel C.R., Gelman R.* Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychol. Sci.* 1999. V. 10 (2). P. 130–137.