ОБ ОДНОМ НЕОПУБЛИКОВАННОМ КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

Н. С. ЕРМОЛАЕВА (Ленинград)

Среди учебников для высшей школы наибольший интерес обычно представляют те из них, авторы которых сами внесли существенный вклад в развитие излагаемого предмета. В теории вероятностей особое значение имеет курс лекций П. Л. Чебышева, который читал его в Петербургском университете в 1860—1882 гг., несколько раз варьируя изложение. До сих пор этот курс был известен только по записи и обработке его лекций 1879/80 гг. А. М. Ляпуновым; он был издан А. Н. Крыловым в 1936 г. [1].

В библиотеке Ленинградского инженерно-строительного института (ЛИСИ) сохранился другой, рукописный вариант курса Чебышева 1876/77 и 1877/78 гг. [2], который до сих пор не привлекал внимания исследователей. В этом варианте лекции Чебышева представлены с почти стенографической точностью. Автор записей не указан. Есть основания утверждать, что рукопись принадлежала Н. А. Артемьеву (1855—1904), который по окончании университета был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию, но, вероятно, из-за отсутствия вакансий в университете стал учителем гимназии, а впоследствии директором 1-й Петербургской гимназии.

Среди слушателей Чебышева выпуска 1878 г. был А. А. Марков, сохранившиеся конспекты [3] которого подтверждают соответствие обнаруженных записей лекциям Чебышева. Однако конспекты Маркова не столь подробны, как у Артемьева, даже не все выкладки приведены полностью, а из дополнительных замечаний лектора записано лишь немногое.

Записи Артемьева во многом отличаются от текста Ляпунова, особенно по манере изложения, хотя и содержание, и структура их одинаковы. Кроме того, записи Артемьева почти в полтора раза больше по объему — более 24 а. л., тогда как в тексте Ляпунова чуть больше 15. Почти все лекции датированы (старым стилем), и это позволяет установить продолжительность всего курса: с 16.IX 1876 по 30.III 1878 г. Таким образом, весь курс был рассчитан на два учебных года. Курс теории вероятностей Чебышева состоял из трех частей: определенные интегралы, теория конечных разностей, теория вероятностей.

В некоторых официальных документах Петербургского университета, как и в записи Артемьева, первые две части назывались так же — «Введение в теорию вероятностей». «Введение» читалось студентам третьего курса. Что касается собственно теории вероятностей, то она излагалась студентам четвертого (последнего) года обучения. Неоднократно подчеркивая связь первых двух частей с теорией вероятностей, Чебышев добавлял, что так поступал еще П. Лаплас, и излагал их в объеме, далеко выходящем за пределы сведений, необходимых для третьей части курса. Записи Артемьева показывают, что на определенные интегралы и на конечные разности было отведено по 17 двухчасовых лекций в неделю, а на теорию вероятностей — 32 лекции, которые Чебышев иногда читал по 2 раза в неделю. Всего в конспекте Артемьева 303 страницы, написанные мелким почерком, почти без помарок: вероятно, он переписывал начисто записи, сделанные в аудитории. Изложение ведется от первого лица и в непринужденном стиле.

О манере чтения лекций Чебышева нам до сих пор было известно из воспоминаний его учеников К. А. Поссе и А. М. Ляпунова. Записи Артемьева воспроизводят живую речь Чебышева-лектора, тогда как опубликованные в 1936 г. лекции — это текст Ляпунова, а не прямая запись лекций Чебышева. Анализируя записи Артемьева, к упомянутым характеристикам Поссе и Ляпунова можно сделать некоторые добавления.

Чебышев не только излагал студентам математический материал, он учил их на конкретных примерах приемам математических исследований, в которых столь существенна строгость доказательства. Для этого он приводил неоднократно как строгое, так и нестрогое доказательство, указывая каждый раз, в чем именно заключалась нестрогость. Чебышев говорил, что нестрогие приемы нужны, когда нет других средств, и что иногда заметить новый факт бывает легче, чем доказать его, но математики не успокаиваются до тех пор, пока не будет найдено простое и строгое доказательство.

Что касается своего курса, то Чебышев отмечал, что он вынужденно прибегает к нестрогим доказательствам только в разделе теории вероятностей, где «надо было бы изменить анализ». Чебышев давал советы слушателям, какие формулы надо помнить, а какие — нет; как угадать ту или иную подстановку при вычислении интеграла (для этого он иногда демонстрировал путь, которым шел исследователь). Он указывал на нерешенные проблемы и на интересные задачи; показывал взаимосвязь методов, применяемых в разных областях математики; рекомендовал литературу, более широкую, чем требовалось по программе; говорил, что не любая новая формула приносит пользу, и объяснял, чем именно замечательны те или иные встречающиеся формулы. Большую роль для расширения кругозора слушателей играли рассказы Чебышева как о его собственных исследованиях (он упоминал почти все свои работы, имеющие отношение к лекциям), так и о работах известных и малоизвестных математиков. Всего в записи Артемьева упоминается около 50 разных ученых, причем лектор часто высказывал о них свое мнение (есть небольшие характеристики О. Коши, С. Пуассона, Е. И. Бейера и др.). Он упоминал и о функциях, не имеющих производных (К. Вейерштрасс), о разрывных функциях (П. Г. Лежен-Дирихле), о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, о непрерывных дробях и т. д.

Уделял внимание Чебышев и приоритетным вопросам. Он, например, критиковал Ж. Бертрана за то, что тот называл интегралы абелевыми без должного основания. В одной из лекций Чебышев сообщил о своем высказывании на защите диссертации М. А. Тихомандрицкого против того, что диссертант приписал интегралы Л. Эйлера К. Ф. Гауссу. Сравнивая системы преподавания в России и за границей, Чебышев говорил: «Я убежден, что нигде в Европе так полно не читается математика, как у нас» [2, л. 42].

Курс теории вероятностей Чебышева не был первым в России, но был наиболее замечательным как по научному содержанию, так и по влиянию, оказанному им на ряд последующих руководств, авторы которых в той или иной мере были учениками Чебышева.

Здесь надо сказать несколько слов о развитии теории вероятностей и ее преподавании в России.

Первые отдельные исследования по теории вероятностей и ее приложениям в вопросах, связанных с демографической статистикой, начаты были в Петербургской Академии наук еще в XVIII в. Л. Эйлером и его учеником Н. И. Фусом. В «Записках» Академии был напечатан также ряд мемуаров по этим вопросам Д. Бернулли, работавшим в Академии в 1725—1733 гг., а затем состоявшим ее иностранным членом. Более регулярная работа в этой области началась в XIX в. в связи с развитием экономики страны и ускорением перехода от феодальных форм хозяйства к капиталистическим, а также с распространением страхового дела, усиленно поощрявшегося правительством. Важнейшей предпосылкой прогресса теории вероятностей в России явилось открытие в начале XIX в. ряда университетов и физико-математических факультетов в них. В Московском университете, основанном в 1755 г., такой факультет был организован в 1804 г.

Первый курс комбинаторного анализа и теории вероятностей был прочитан, по-видимому, в Дерптском (ныне Тартуском) университете в 1806 г. немецким математиком И.-В. Пфаффом, вскоре вернувшимся в Германию. Затем З. Ревковский прочитал в 1829/30 гг. курс теории вероятностей в Вильнюсском университете, который в 1832 г. был закрыт. Курсы эти представляли собой изолированные явления. Регулярное чтение курса теории вероятностей началось лишь с 1837 г. в Петербургском университете, где его в течение 10 лет читал В. А. Анкудович, занимавшийся также баллистикой. Ученые России не раз публично заявляли о неудовлетворительном положении с преподаванием теории вероятностей и выступали с речами, в которых пропагандировали эту теорию, разъясняя ее принципы и важность приложений. В 1821 г. было издано первое публичное выступление по этому вопросу на русском языке — речь профессора Харьковского университета А. Ф. Павловского «О вероятности». Позднее проф. Н. Д. Брашман, учитель Чебышева, на торжественном собрании Московского университета в речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей» (1841) подчеркнул «совершенное небрежение в учебных заведениях» теорией вероятностей, составляющей «одну из важнейших частей математики», и выразил сожаление по поводу отсутствия на русском языке сочинения по этому предмету. Два года спустя коллега Брашмана Н. Е. Зернов опубликовал пространное (85 страниц) выступление «Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию» (1843). Вскоре после того вышли одно за другим сразу два руководства на русском языке: Чебышева (1845) — краткое и элементарное, о котором будет сказано далее, и акад. В. Я. Буняковского (1846), фундаментальное,— «Основания теории вероятностей». С 1847 г. Буняковский стал читать лекции по этой дисциплине в Петербургском университете, где его с 1860 г. сменил Чебышев. Затем курс теории вероятностей вводится, хотя и не сразу, в университетах: в Харькове (Е. И. Бейер. 1849), Москве (А. Ю. Давидов, 1850), Киеве (М. Е. Ващенко-Захарченко, 1862), Одессе (К. И. Карастелев, 1865), не говоря уже о курсах, читавшихся специально для астрономов и геодезистов (А. Н. Савич и др.).

Руководство Чебышева «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» [4, т. 5, с. 26—87], явившееся его магистерской диссертацией, было написано с целью дать изложение предмета с минимальным применением средств математического анализа, из которых он использовал лишь разложение ln $(1+x)$ в степенной ряд. В самом начале своего труда Чебышев, охарактеризовав теорию вероятностей как одну из труднейших отраслей «трансцендентного анализа», писал: «Здесь искомое, кроме самых простых случаев, определяется уравнениями в конечных разностях, которых исследование представляет несравненно более трудностей, чем исследование уравнений дифференциальных. Из этих уравнений искомое получается выраженным с помощью определенных интегралов, большей частью весьма сложных: таков способ Лапласа, до сих пор единственный» [4, т. 5, с. 27]. При этом Чебышев имел в виду основополагающий труд Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» (1-е издание 1812 г.), ставший отправным пунктом исследований и руководств ученых XIX в. Как видно, приведенные слова Чебышева как бы предвещают структуру его будущего университетского курса, который он начал читать 15 лет спустя.

Первая часть курса «Определенные интегралы» могла бы явиться предметом особого исследования, здесь же мы ограничимся лишь несколькими замечаниями. Теория определенных интегралов постепенно формировалась в трудах Л. Эйлера, П. Лапласа, Ж.-Л. Лагранжа, О. Коши, С. Пуассона и других математиков. Задачей этой теории было вычисление в конечной форме различных определенных интегралов, включая и несобственные — с бесконечными пределами или от разрывных функций, в тех случаях, когда соответствующие неопределенные интегралы не выражаются в элементарных функциях (как, например, интегралы Эйлера). Для вычисления использовались различные приемы: комплексные подстановки, изменение порядка интегрирования двойных интегралов и др. К 30-м годам XIX в. в этой области было получено много результатов, и впервые систематический курс определенных интегралов ввел Лежен-Дирихле, читавший его в Берлинском университете в 1835—1854 гг. и в Геттингене в 1858 г. (обработанные записи этого курса были изданы в 1871 и переизданы в 1904 г.). В России аналогичный курс впервые прочитал в 1858/59 г. в зале Инженерной академии М. В. Остроградский. Выбор материала ввиду его чрезвычайного разнообразия, а также соответствующих методов, естественно, зависел от лекторов. Курс Остроградского, широко использовавшего теорию вычетов Коши, существенно отличался от курса Дирихле (который вряд ли мог быть сколько-нибудь известен Остроградскому), и наиболее оригинальную его часть составляли лекции о кратных интегралах. Чебышев в своих лекциях применял комплексные подстановки, хотя и не пользовался теорией интегральных вычетов, как это делал Остроградский. В те же годы теорию определенных интегралов читал в Казанском университете А. Ф. Попов, курс которого был опубликован в 1865 г.

Часть рассматриваемого курса Чебышева, касающаяся определенных интегралов, построена оригинально и существенно отличается от упомянутых выше курсов, хотя во всех них рассматривались и одинаковые интегралы. Заметим, что отдельный курс теории определенных интегралов сохранялся в Петербургском университете около 40 лет. Читал его Ю. В. Сохоцкий — один из выдающихся учеников Чебышева.

Все изучаемые интегралы Чебышев разбивает на четыре группы, отмечая при этом, что такое деление обусловлено лишь методическими, а не научными соображениями, и что классификация определенных интегралов — очень трудная задача, не решенная до сих пор, хотя некоторые академии даже объявляли конкурсы для ее решения. В первую группу Чебышев включает интегралы, получающиеся из общей формулы

$$\int_0^\infty \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx = \int_\alpha^\beta dy \int_0^\infty f'_x(x, y)\, dx,$$

где $f(x, y)$ такова, что $f(+\infty)=0$. Вторая группа характеризуется тем, что выражения интегралов содержат $\sqrt{\pi}$, причем отправным пунктом чаще всего является некоторый двойной интеграл. Так, в частности, выводится знаменитый интеграл Эйлера $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, который есть и в курсе Остроградского. В третью группу входят интегралы, содержащие функции, «на вид алгебраические, а на самом деле трансцендентные», например $\int\limits_0^\infty x^\lambda (1+x^2)^{-1} dx$, где λ — любое число между -1 и $+1$. Четвертая группа — интегралы, имеющие пределы интегрирования 0, $\pi/2$, π, ..., а также формулы Фурье. В отдельную группу выделены интегралы Эйлера, куда входят и интегралы, выражающиеся при помощи логарифма от гамма-функции. Заканчивая лекции по этой части, Чебышев говорит о некоторых изменениях, вносимых им каждый год при чтении курса: «Вы знаете, что за границей есть лекции общего курса обязательные и специального — необязательные; у нас этого нет, так я и заменяю специальный курс развитием особых статей. Так, нынешний год я останавливался долго на эйлеровых интегралах в теории определенных интегралов и на простых числах в теории чисел» [2, л. 57 об.].

Вторую часть курса «Теория конечных разностей» Чебышев считает не представляющей особого интереса в теоретическом отношении, но важной для многих практических вопросов, особенно в теории вероятностей. В теории конечных разностей в отличие от дифференциального исчисления не вводится никаких новых понятий, так что этот раздел можно было бы присоединить и к алгебре. Эта теория, по словам Чебышева, элементарна, но формулы в ней получаются очень сложные. Далее, рассмотрев конечные разности, он решает прямую и обратную задачи нахождения зависимостей между данными значениями функций и ее разностями какого-нибудь порядка и переходит к задачам интерполяции. При определении конечных разностей простейших функций проводится параллель между дифференциальным исчислением и теорией конечных разностей. Самым трудным Чебышев считает интегрирование уравнений в конечных разностях, поэтому он заканчивает эту часть курса решением уравнений в конечных разностях только первого порядка и линейных уравнений—любого порядка, отмечая, что и здесь есть недоказанные теоремы, которые могли бы составить предмет для исследования. На последней лекции Чебышев иллюстрирует необходимость использования уравнений в конечных разностях на примере решения задачи Г. Ламэ о нахождении наибольшего количества делений, которые надо произвести при отыскании общего наибольшего делителя двух чисел. Эта задача сводится к решению уравнений в конечных разностях.

Рассматривая связь между конечными разностями и дифференциалами, Чебышев пользуется приемами символического исчисления, указывая, что при их употреблении надо быть осторожным и что эти приемы полезны лишь для упрощения записи и «для облегчения памяти». Значительное внимание Чебышев уделяет формуле Валлиса, так как она используется в теории вероятностей, а потому дает для нее два вывода, причем первый из них основан на использовании расходящегося ряда. Чебышев здесь и на других лекциях высказывал свое отношение к таким рядам, считая вполне возможным их использование в анализе.

В этой части курса Чебышев также делает различного рода попутные замечания. Так, после вывода интерполяционных формул Ньютона и Лагранжа, он говорит, что формула типа формулы Лагранжа была еще у Ньютона. Изложив вопросы интерполирования, он объясняет идею метода наименьших квадратов и рассказывает о споре по этому вопросу между О. Коши и И.-Л. Бьенэме. Впрочем, это же он повторяет и в соответствующем разделе курса теории вероятностей. Чебышев приводит также содержание и критический разбор статей разных авторов: Ж. Лиувилля, В. Я. Буняковского, М. В. Остроградского, Д. М. Перевощикова, Е. И. Бейера (которого он очень ценил и как преподавателя, и как ученого), а также своих работ. Впоследствии курс теории конечных разностей как отдельную дисциплину читал многие годы А. А. Марков, руководство которого по этому предмету, изданное впервые в 1889 г., получило широкое распространение. Еще одно известное руководство по этому предмету издал Д. М. Селиванов, слушавший лекции Чебышева одновременно с Марковым и Артемьевым. Книга Селиванова вышла в 1904 г. в Лейпциге на немецком языке, а в 1908 г. она была издана на русском.

В третьей части курса, собственно теории вероятностей, Чебышев прежде всего говорит о границах применимости этой теории, выступая против обывательских мнений. Он подчеркивает, что эта наука может быть изложена столь же строго, как и другие отделы математики, так как «математика может быть приложена только к тому, что может быть измеряемо» [2, л. 94]. Далее он высказывает мысль о том, что математика вообще, и теория вероятностей в частности, занимается, говоря современным языком, построением и изучением моделей, и случаи, встречающиеся на практике, объясняются построенными моделями.

Затем он вводит понятие «события», отмечая необходимость рассмотрения условий, при которых происходят события, дает их классификацию и классическое определение вероятности события. Он показывает, что вероятность ожидаемого события есть функция дроби m/n, где m — число благоприятных и равновозможных событий, а n — общее число всех событий, однако выбор в качестве определения именно самого отношения m/n является произвольным и объясняется его простотой.

Основные вероятностные законы Чебышев формулирует и доказывает в виде четырех теорем, поясняя каждую примерами, в том числе и известной «задачей Чебышева» о вероятности наугад взятой дроби быть несократимой. Так как по ходу решения этой задачи Чебышеву надо было вывести известное представление $\sin x$ в виде бесконечного произведения, то он дал краткий, но нестрогий его вывод, отметив, в чем именно нестрогость вывода, и порекомендовав слушателям познакомиться со строгим выводом в «Алгебраическом анализе» Коши (русский перевод А. А. Ильина, Ф. Ф. Эвальда и В. В. Григорьева). Отметим, что, получив результат, содержащий иррациональное число π, Чебышев обращает внимание на тот факт, что «это будет первый случай, где число равновозможных и благоприятных случаев бесконечно велико» [2, л. 99]. Решение этой задачи подверг критическому анализу С. Н. Бернштейн в своем докладе на Всероссийском съезде математиков в 1927 г. Первые две теоремы, сложения и умножения, дают возможность находить вероятности a priori, тогда как две следующие, об условных вероятностях событий, относятся к так называемым вероятностям a posteriori. Чебышев не считает две последние теоремы достаточно строгими и старается по возможности ими не пользоваться, хотя ему и приходится применять их, например при изложении метода наименьших квадратов.

Попутно Чебышев сообщает мнения Буняковского и Остроградского об основных вероятностных законах и рекомендует слушателям «Курс внешней баллистики» (СПб., 1870) Н. В. Маиевского, в последней главе которого — «Способ наименьших квадратов и приложение его к исследованию результатов стрельбы» приведены начала теории вероятностей. Эта глава составлена по лекциям Чебышева, которые слушал Маиевский. Поскольку теперь эти вопросы Чебышев стал излагать несколько иначе, чем в магистерской диссертации [4, т. 5, с. 26—87], он рекомендует не ее, а книгу Маиевского.

Введя понятие математического ожидания и объяснив его на примерах, Чебышев переходит к задаче о нахождении вероятности того, что сумма случайных величин заключается между известными пределами, и к доказательству «неравенства Чебышева—Бьенэме», в котором он также изменил некоторые детали по сравнению со статьей «О средних величинах» [4, т. 1, с. 203—230]. Лектор подчеркивает искусственность используемого приема, с помощью которого, однако, решаются многие задачи и который был им придуман для исследования вопроса о распределении простых чисел. Чебышев признает недостаточную мощность этого приема для получения более интересных результатов.

Здесь же Чебышев говорит об истории этого знаменитого неравенства. Чебышев высокого ценил Бьенэме, с которым познакомился еще в 1852 г. Бьенэме, знавший русский язык, перевел статью Чебышева «О непрерывных дробях» (1855 г., франц. пер. 1858 г.). Получив для перевода и статью «О средних величинах», Бьенэме сразу обнаружил, что Чебышев пользовался тем же методом, что и он сам в одном мемуаре 1853 г. Поэтому Чебышев, который не был ранее знаком с этим мемуаром Бьенэме, при издании своей статьи на французском языке, счел необходимым дать ссылку на эту работу своего французского коллеги. Однако редактор журнала Ж. Лиувилль решил перепечатать весь мемуар Бьенэме в том же номере непосредственно перед статьей Чебышева, переведенной Н. В. Ханыковым, и не давать предлагаемой ссылки. Позднее, в статье «О предельных величинах интегралов» [4, т. 2, с. 183—185], опубликованной в 1874 г. в том же журнале, Чебышев упоминает эту работу Бьенэме.

Новое понятие сходимости по вероятности и его сравнение с понятием предела в анализе в записях Артемьева объясняются более подробно, чем в конспекте Ляпунова, в котором также нет изложенных у Артемьева замечаний Чебышева о его доказательствах различных вариантов закона больших чисел.

Следующие лекции посвящены повторению событий. После введения производящей функции Лапласа Чебышев делает отступление, чтобы рассказать о критике Ю. Гене-Вронским работы Лапласа (отсутствие доказательства сходимости рядов), и высказывает свое мнение о том, что для строгих теоретических доказательств надо указывать пределы, между которыми заключается данная величина, а не ее приближенное значение. (Как известно, это характерно для всех работ Чебышева.) Поэтому, по словам Чебышева, античные математики поступали более строго, указывая пределы, в которых заключается число π, а не его приближенную величину.

Пожалуй, наиболее интересным является мнение Чебышева о предельных теоремах, которым он придавал большое значение. Чебышев дважды говорит об обобщении этих теорем: при втором выводе теоремы Пуассона и при определении вероятности того, что сумма случайных величин заключается в данных пределах. Приведем его слова по поводу доказательства теоремы Пуассона: «Вы скажете, что все это очень элементарно, но из этого выходит общий закон, и как ни странны эти суждения, из них можно составить общую теорию, и я этим занимался, хотя еще не публиковал этого» [2, л. 118 об.]. Критикуя приводимое им доказательство второй предельной теоремы, он говорит, что это больное место теории вероятностей, и что тут требуется другой метод, но за неимением лучшего он дает нестрогое решение вопроса. «В настоящее время,— продолжает свою мысль Чебышев,— я имею особый прием, более рациональный, но не вполне рациональный. Я могу только сказать, что мои приближенные выражения будут лучше, а надо собственно сказать, что это приближенное выражение с такой-то степенью точности [там же, л. 136] ... Если бог даст, я поживу подольше, то я надеюсь тут кое-что сделать: у меня есть для этого метода, и я только ожидаю случая высказать ее публично, но в ней есть и затруднения» [там же, л. 141]. Таким образом, из записей лекций Артемьева видно, что еще в 1877 г. за 10 лет до появления статьи «О двух теоремах относительно вероятностей» [4, т. 2, с. 481—492], Чебышев обдумывал формулировку и доказательство второй предельной теоремы.

Доказательство второй предельной теоремы в статье 1887 г. было неполным. Содержащиеся в ней пробелы были устранены различными методами А. А. Марковым (1898) и А. М. Ляпуновым (1901). Вообще предельные теоремы теории вероятностей в их различных вариантах стали предметом глубоких исследований многих отечественных и зарубежных математиков.

Последние пять лекций Чебышев отводит методу наименьших квадратов. Он сообщает, что можно рассматривать различные комбинации из наблюденных величин, но он будет использовать только самую простую из них — линейную комбинацию. При изложении Чебышев следует в основном Лапласу, считая его выводы более строгими по сравнению с выводами Гаусса. Этот материал в записи Артемьева мало отличается от текста Ляпунова; есть различия только в приводимых примерах, обозначениях и объяснениях. Если в лекциях 1880 г. вид функции, определяющей вероятность того, что погрешность имеет данную величину, указан сразу из некоторых соображений в виде $\varphi(z)= Ae^{-\rho z^2}$ (A и ρ — некоторые постоянные), то в лекциях 1878 г. эта же функция ищется в виде $\varphi(z)=e^{-\psi(z)}$. Чебышев приводит сначала самый грубый способ для нахождения $\psi(z)$, основанный на предположении об одинаково возможных значениях z и $-z$, а затем излагает метод Гаусса, исходящий из того, что наивероятнейшим значением будет средняя арифметическая из трех наблюденных величин. При определении двух величин по наблюдаемой их линейной комбинации Чебышев дает придуманный им способ, позволяющий, не решая выведенную систему уравнений, показать, что получаемая из этих уравнений искомая величина будет иметь вид уже найденной ранее линейной комбинации. Далее он не только приводит числовой пример, но и показывает, что рассмотренная им задача может иметь и аналитический интерес, когда, например, решается переопределенная система уравнений. Вопрос определения из наблюдений нескольких величин в лекциях 1878 г. не рассматривается.

Отметив роль А.-М. Лежандра (а не К. Ф. Гаусса) как первооткрывателя метода наименьших квадратов и Лапласа, посвятившего отдельный мемуар вопросу о влиянии предположения, что закон погрешностей остается одним и тем же для всех искомых величин, Чебышев заканчивает тему определением средней арифметической из суммы квадратов погрешностей и упоминает в связи с этим исследования астрономов И. Энке и Дж. Эри.

Лекции Чебышева оказали влияние и на другие читаемые в России курсы теории вероятностей, и прежде всего на лекции А. А. Маркова, который неизменно вел этот предмет после ухода своего учителя из университета. Так, при составлении своего курса лекций М. А. Тихомандрицкий руководствовался прежде всего своими записями лекций Чебышева, которые он слушал в 1865 г. В предисловии к изданному им «Курсу теории вероятностей» (Харьков, 1898) он пишет, что показывал рукопись своего курса еще в 1887 г. Чебышеву, который нашел его отличающимся от своих лекций и сказал, что позднее (т. е. после 1865) он сам читал этот курс иначе и что теперь он считает нужным «перестроить всю теорию вероятностей».

Доказательство теоремы Я. Бернулли излагается по Чебышеву не только в учебнике М. А. Тихомандрицкого, но и в более раннем учебнике В. П. Ермакова (1879) и в популярной «Энциклопедии математики» Д. А. Граве (1912).

Как уже было сказано, в дальнейшем курсы теории определенных интегралов и конечных разностей стали считаться отдельными дисциплинами, но еще в 1885 г. А. В. Васильев предваряет свою «Теорию вероятностей» теорией конечных разностей.

В заключение приведем мнение Маркова о распространенном в XIX в. взгляде на работы Чебышева по теории вероятностей [5, л. 1—3]. Марков считал, что эти работы Чебышева были недостаточно оценены современниками, так как они не видели в них новых результатов, а только новые методы для доказательств основных положений теории вероятностей. Эти же положения многие считали вполне доказанными Лапласом и Пуассоном. Возможно, поэтому ни Ж. Бертран, ни А. Пуанкаре в своих руководствах по теории вероятностей даже не упоминают Чебышева. Марков сообщает, что его докторская диссертация «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей», защищенная им в 1884 г. (в ней были доказаны и обобщены неравенства Чебышева в учении о предельных величинах интегралов, и она стала отправным пунктом для появления последующих работ Маркова по теории моментов), «побудила Чебышева вернуться к намеченной им задаче, с которой связана большая часть работ последних десяти лет его жизни» (там же, л. 2). Марков предполагает, что эти работы составляли только часть намеченного Чебышевым плана относительно предельных теорем, который он не успел осуществить.

Из всех известных курсов лекций по теории вероятностей, читавшихся в России до А. А. Маркова, обнаруженная рукопись представляет особый интерес для истории отечественной математики. Она дает возможность более полного изучения творческого пути П. Л. Чебышева — основателя Петербургской математической школы.

Литература

1. *Чебышев П. Л.* Теория вероятностей: лекции 1879—1880 гг. по записи А. М. Ляпунова (изданы акад. А. Н. Крыловым). М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 252 с.
2. *Чебышев П. Л.* Теория вероятностей: лекции, читанные в Петербургском университете в 1876/77 и 1877/78 гг. Рукопись, Б-ка ЛИСИ, 152 л.
3. Архив АН СССР (Ленинград). Ф. 173. оп. 1, д. 104, 105, 107, 108, 110—112.
4. *Чебышев П. Л.* Полн. собр. соч. Т. 1—5. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944—1951.
5. Архив АН СССР (Ленинград). Ф. 173. оп. 1, д. 60.