7. *Клемент Ф. Д.* Исследование люминесценции щелочно-галоидных фосфоров: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Л.— Елабуга, 1941—1942.
8. *Клемент Ф. Д.* О новой разновидности щелочно-галоидных фосфоров.— Докл. АН СССР, 1945, т. 46, № 7.
9. *Клемент Ф. Д.* Некоторые исследования по люминесценции щелочно-галоидных фосфоров.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1945, т. 9, № 4—5.
10. *Клемент Ф. Д., Теренин А. Н.* Флуоресценция кристаллов солей, поверхностно активированных металлами.— Уч. зап. ЛГУ. Сер. физ., 1935, № 1.
11. *Klement F., Terenin A.* Fluorescence of salts surface — activated by condensed metals.— Acta physicochemica URSS, 1935, v. 1, № 6.
12. *Клемент Ф. Д.* Флуоресценция кристаллов солей, поверхностно активированных металлами. Дипломная работа. Л., 1936. 41 л.— ОРРК НБ ТГУ, ф. 72, ед. хр. 68.
13. См. [5] и *Лущик Н. Е., Лущик Ч. Б., Малышева А. Ф.* Исследования Ф. Д. Клемента по спектроскопии твердых растворов.— Тр. ИФ АН ЭССР, 1978, № 48.
14. Протокол Ученого совета ЛГУ о защите кандидатской диссертации Ф. Д. Клемента. 5.IV.1944.— ОРРК НБ ТГУ, ф. 72, ед. хр. 6.
15. *Клемент Ф. Д.* О получении люминесцирующих систем методом возгонки в вакууме. 1960.— ОРРК НБ ТГУ, ф. 72, ед. хр. 259. (По-видимому, черновик монографии или докторской диссертации).
16. *Клемент Ф. Д., Зеликин Я. М.* А. с. № 11201 от 22 сентября 1949 г.— ОРРК НБ ТГУ, ф. 72, ед. хр. 8.
17. *Клемент Ф. Д., Зеликин Я. М.* Описание изобретения к авторскому свидетельству. Опубл. в Б. И., 1968, № 26.— ОРРК НБ ТГУ, ф. 72, ед. хр. 8.
18. *Клемент Ф. Д., Малышева А. Ф., Ильева И. Л.* О многослойных люминесцирующих экранах для ультрафиолетовой микроскопии.— Тр. ИФА АН ЭССР, 1957, № 6.

ВОПРОСЫ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ В ПЕРЕПИСКЕ МАТЕМАТИКОВ XVIII В.

В. В. КУЗНЕЦОВА-ФЕТИСОВА

В XVIII в. бесконечные ряды стали одним из основных средств исследований в области математического анализа и его приложений. В частности, систематическое исследование огромного числа новых функций оказалось возможным только благодаря представлению их в виде сумм бесконечных степенных рядов. По-видимому, первую работу такого рода опубликовал в 1668 г. Меркатор (Ник. Кауфман), получивший разложение логарифмической функции $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ почленным интегрированием прогрессии $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$. Как мы увидим, к этой прогрессии не раз обращались математики XVII—XVIII вв. За публикацией Меркатора последовали многочисленные работы по бесконечным рядам Ньютона, Лейбница и их последователей.

Первые обращения к проблемам сходимости. Проблемы сходимости стояли для математиков XVII—XVIII вв. не на первом плане, но отдельные крупные математики подходили к ним вплотную. Настоящая работа основывается на переписке математиков XVIII в.; поскольку печатные работы того времени, касающиеся проблем суммирования рядов, достаточно подробно освещены (см., например, [1—3]), то к этим работам мы обращаемся лишь в тех случаях, когда они оказываются тесно связанными с вопросами, поднимаемыми в переписке, или отражены в самой этой переписке.

В 1689—1700 гг. Яков и Иоганн Бернулли обнаружили расходимость гармонического ряда $1+1/2+1/3+\ldots+1/n+\ldots$ и некоторых других рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ с бесконечно убывающими членами ($a_n \to 0$ при $n \to \infty$). Впрочем, о расходимости гармонического ряда и рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a+nb}$ (музыкальных) знал уже в 1650 г. П. Менголи (1625—1686) и еще ранее французский ученый Николь Орем (ум. в 1382 г.), однако в XVIII в. их результаты были малоизвестны.

Казалось бы, существование расходящихся рядов с монотонно стремящимися к нулю членами должно было предостеречь математиков против безоговорочного перенесения на бесконечные ряды свойств конечных многочленов; на самом же деле многие существенные открытия конца XVII и начала XVIII в. в анализе бесконечно малых покоились именно на некритическом обращении с рядами.

Один из самых интересных результатов Якова Бернулли связан с рядом $1+1/2^n+$ $+1/3^n+\ldots$. Бернулли показал, что сумма нечетных членов ряда относится к сумме четных членов, как 2^n-1 к 1. Это действительно верно для $n\geqslant 2$. Однако Я. Бернулли применил это отношение и к случаям $n=1$ и $n=1/2$. Эти последние случаи он находит парадоксальными. Об этом также писал, например, Иоганн Бернулли Л. Эйлеру 31 августа 1740 г. [4, т. 2, с. 44].

«Парадокс» Якова Бернулли. В 1696 г. Яков Бернулли в 3-й части «Арифметических предложений о бесконечных рядах и их конечной сумме» [5], применив меркаторов прием деления l на $m+n$ и приняв затем $m=n$, получил $l/2m=l/m-l/m+$ $+l/m-l/m+\ldots$. Здесь, писал он, возникает не лишенный изящества парадокс (paradoxon non inclegans). При $l=m=1$ получается, что $1/2=1-1+1-\ldots$. Он дает тут же и объяснение этого парадокса: при конечном числе делений всегда получается остаток, равный $\pm l/2m$. Этот остаток и дополняет или убавляет сумму в правой части, которая равна то 0, то $+l/m$, так что в сумме всякий раз получается $l/2m$, отсюда при $l=m=1$ получаем 1/2.

Это объяснение не помешало тому, чтобы вокруг «парадокса» Я. Бернулли вскоре разгорелся оживленный спор.

В 1703 г. Гвидо Гранди в «Геометрически изложенной квадратуре круга и гиперболы при помощи бесчисленных квадрируемых гипербол и парабол» [6] снова указывает, что равенство $1/2=1-1+1-\ldots$ можно получить из разложения выражения $1/(1+x)$ в ряд $1-x+x^2-\ldots$ и последующей подстановки $x=1$. Группируя члены попарно, он получил равенство $0+0+0+\ldots=1/2$ и истолковал его как символ «сотворения мира из ничего».

Тот же Гранди, чувствуя, видимо, слабость своей интерпретации, прибег позднее к другой: отец оставляет в наследство двум сыновьям драгоценный камень, которым один год владеет один сын, на следующий год камень переходит ко второму сыну и т. д. Продать его сыновья не могут. Таким образом, сокровище фактически разделено пополам, тогда как, например, первый из братьев обладает последовательно суммой 1; $1-1$; $1-1+1$; $1-1+1-1$ и т. д. [3, с. 365—367].

После этих соображений Гранди, высказанных им в печати, завязалась переписка между учеными, в которой выступили Гранди, Лейбниц, Вариньон, Николай I Бернулли и др. Так, в письме к Хр. Вольфу от 26 сентября 1713 г. [7, т. V, с. 382] Лейбниц, отметив, что сумма ряда $1-1+1-1+\ldots$ равна 0, если бесконечное число членов четно, и 1 — если нечетно, указал, что нет разумных оснований считать число всех членов ряда четным или же нечетным и вместе с тем, что сумму следует принять равной 1/2 как арифметическому среднему между 0 и 1. В пользу такого решения, по его мнению, свидетельствует теория вероятностей, которая учит принимать в расчет среднее арифметическое равнодостижимых величин; в данном случае, говорил он, действует присущий природе вещей закон справедливости. «Этот способ аргументации, хотя и кажется более метафизическим, чем математическим, все же надежен,— писал Лейбниц,— впрочем, правила истинной метафизики гораздо более употребительны в точных науках, в анализе, даже в геометрии, чем обычно считают».

Подобными аргументами пользовались в XVIII в. и Даниил Бернулли, и даже Лагранж и Эйлер. Правда, математики того времени пытались избегать подобных аргументов там, где это было возможно.

Отрицательный подход Вариньона и Николая I Бернулли. Вариньон, разбирая вопрос о биномиальном выражении для любых целых отрицательных показателей, высказал сомнение в допустимости рядов, которые мы называем расходящимися.

19 ноября 1712 г. он писал Лейбницу: «Рассматривая бесконечное деление $1/(1+1)$ получим $1-1+1-\ldots=0$ и $1-1+1-\ldots=1$ в зависимости от того, четное или нечетное число членов мы возьмем в этом биномиальном ряду; я сделал вывод, что подобное деление здесь ничего не дает, и так как всякая операция уничтожает каждый раз предшествующую операцию, то всегда после бесконечного числа операций приходится

начинать заново, как если бы мы не сделали ни одной операции, если число членов является четным, или сделали всего одну операцию, если их число является нечетным».

Николай I Бернулли (1687—1759) занял сходную с Вариньоном позицию.

В письме к Лейбницу от 7 апреля 1713 г. [7, с. 982—984] Николай I Бернулли подчеркнул, правда в недостаточно четкой форме, что следует учитывать остаток ряда, который он обозначил буквой R от слова residuum. В этом же письме, рассматривая примеры биномиальных разложений $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots$ с дробным показателем n, Николай I Бернулли употребил термин «расходящийся ряд» (*series divergens*), не дав, впрочем, ни этому понятию, ни понятию сходимости отчетливого определения. В ответном письме от 28 июня 1713 г. [7, с. 985] Лейбниц применил в современном смысле термин «сходящийся ряд» (*series advergens*), дав такое пояснение: это ряд, «который можно настолько продолжить, чтобы он отличался от какой-нибудь возможной (т. е. действительной.— *К.-Ф.*) величины на величину, меньшую заданной». Лейбниц выразил согласие с Николаем I Бернулли в том, что *non-advergens* ряд может иметь мнимое или бесконечно большое значение суммы. Впоследствии в употребление вошел, впрочем, не термин *advergens*, а имеющий тот же смысл термин *convergens*, который наряду с термином *divergens* (расходящийся) в 1667 г. применил к последовательностям Дж. Грегори [8, с. 149] и затем употреблял Ньютон [9].

Таким образом, уже Лейбниц явно высказал определения сходящегося ряда и его суммы, сформулированные позднее (1821) в терминах теории пределов О.-Л. Коши.

В письме к Иоганну Бернулли от 10 января 1714 г. Лейбниц сформулировал признак сходимости ряда с знакочередующимися членами, носящий ныне его имя. Это письмо было опубликовано в их переписке 30 лет спустя. Еще ранее об этом же признаке сообщается в письме Лейбница к Я. Герману от 26 июня 1705 г. [7].

Методы преобразования рядов Х. Гольдбаха и Д. Бернулли. За употребление расходящихся рядов выступил в переписке с Николаем I и Даниилом Бернулли Христиан Гольдбах. В письмах к Д. Бернулли 4 ноября 1723 г. и 23 июля 1724 г. [4, т. 2, с. 183, 210] Гольдбах писал о побудительных причинах, в силу которых он заинтересовался бесконечными рядами. Он не видел оснований отказываться от употребления расходящихся рядов, поскольку их можно иногда преобразовать в сходящиеся. Смысл такого преобразования, с современной точки зрения, состоит в том, что исходный и преобразованный ряды имеют общую сумму в пересечении их областей сходимости; второй ряд в современной терминологии дает аналитическое продолжение первого. Таким образом, у Гольдбаха мы находим один из первых в XVIII в. примеров «аналитического продолжения» [2, с. 31—32].

Свой первый способ преобразования рядов, доложенный Конференции Академии наук в Петербурге 20 ноября 1725 г. («О преобразовании рядов» [10, (1727) 1729, т. II]), Гольдбах изложил еще раньше в письмах к Я. Герману от 29 января 1721 г. [8, с. 192 и 196]. Речь идет о преобразовании ряда A в другой ряд, имеющий ту же сумму. Способ состоит в почленном сложении или вычитании ряда A и ряда C, сумма которого равна нулю. В случае сходимости рядов A и C такое преобразование законно. Аналогично при почленном вычитании двух рядов с одинаковыми суммами получается ряд, сумма которого равна нулю. 23 июля 1724 г. Гольдбах писал Д. Бернулли [4, т. 2, с. 210] о своем несогласии с Вариньоном, отвергавшим ряды вида $1-2+$ $+4-8+\ldots$ как возникающие при порочном (vitiosa) делении. Он полагал, что для них тоже можно найти конечное значение, только более необычным способом: «Представляется верным, что если умножить их на ряд с суммой, равной единице, то можно преобразовать их в новые ряды, состоящие только из положительных констант». Тем самым уже в этом письме Гольдбах выразил основную идею своего второго метода преобразования рядов, который подробно изложил несколько позднее.

В письме от 12 августа 1724 г. [4, т. 2, с. 213—219] Д. Бернулли ответил ему, что возникающие из формулы $1/(1+x)=1-x+x^2-\ldots$ при $x=2$ или $x=-2$ равенства $1/(1+2)=1-2+4-8+\ldots$ и $1/(1-2)=1+2+4+8+\ldots$ абсурдны, поскольку величина их будет возрастать тем более, чем дальше будет продолжен ряд, а само деление $1/(1+x)$ он назвал в подобных случаях несовершенным (*imperfecta*). Он дал определение сходящегося ряда, подобное данному Лейбницем, и показал, что для рядов вида $1+2+4\ldots$ такое представление о бесконечной сходимости не подходит. Далее

Д. Бернулли указал, что если принять методы чисто формального преобразования рядов за истинные, то «нетрудно дать в подражание им другой метод, гораздо более универсальный, с помощью которого может быть определена сумма многих рядов, состоящих из целочисленных членов с постоянно чередующимися положительными и отрицательными знаками». Суть этого метода он резюмировал в следующих словах: «Общее же правило для суммирования произвольного ряда данного типа таково: берется выражение для нечетного числа членов ряда, выражение для четного числа и вычисляется их среднее арифметическое». Затем Бернулли продемонстрировал свой метод на различных числовых рядах.

В ответном письме от 12 сентября 1724 г. [4, т. 2, с. 219—222] Гольдбах попытался объяснить смысл равенства типа $1/(1+2)=1-2+4-8+\ldots$ или $1/(1-2)=1+2+$ $+4+8+\ldots$, считая, что здесь следует отличать выражения $1/(1+2)$ от $1/3$; $1/(1-2)$ от -1. В некоторых замечаниях Гольдбаха при этом можно усмотреть ростки идей, которые впоследствии развил Эйлер [11, ч. 1, § 100 и далее].

В том же письме на примере числового ряда $1-2+4-8+\ldots$ Гольдбах изложил свой второй метод преобразования рядов, который был доложен на той же конференции Академии наук, что и первый. Он основан на почленном умножении исходного ряда на ряд $1+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\ldots$, в котором положительные члены α, β, γ, ... монотонно убывают к нулю, так что его сумма равна единице.

Заслуживает упоминания еще одно наблюдение, сделанное Гольдбахом: члены последовательности 1, 1/2, 1/3, ... можно так соединить знаками «+» и «—», чтобы сумма возникшего ряда оказалась равной любому действительному числу. Об этом Гольдбах дважды писал Эйлеру: 1 октября 1742 г. и в июне-июле 1752 г. [12, с. 123, 350].

В 1853 г. Риман доказал теорему о возможности так переставить члены неабсолютно сходящегося ряда, чтобы новый ряд приобрел любую сумму или же стал расходящимся (опубликовано в 1867 г.).

В своих более поздних трудах Даниил Бернулли переменил отношение к расходящимся рядам; он изложил взгляды в статье «О суммировании парадоксально-правильных рядов и их истолковании и применении» [10, Novi Commentarii, 1771—1772]. В несколько метафизическом плане Д. Бернулли привел соображения в пользу употребления расходящихся рядов и их сумм, которые хотя и неверны, взятые конкретно (in concreto), но вовсе не нелепы, взятые отвлеченно (in abstracto).

Характерной чертой изысканий Бернулли тех лет является четкое понимание того, что тригонометрический ряд представляет собой функцию лишь на некотором вполне определенном промежутке [13, с. 474—480].

Интересен новый метод суммирования, который Бернулли приложил к периодическим колеблющимся рядам вида $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, где при некотором p и любом k имеет место $u_{k+p}=u_k$, причем $u_0+u_1+\ldots+u_{p-1}=0$. Сумма такого рекуррентного ряда вычисляется как предел среднего арифметического частных сумм $s_n=u_0+u_1+\ldots+n_n$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n}$. Именно этот прием в сущности применил Лейбниц к ряду $1-1+1-\ldots$. Бернулли отметил, что к рассматриваемому виду относятся ряды по синусам и косинусам кратных дуг при частном значении дуги.

Бернулли признавал, что не может в общем виде обосновать свой метод. Очевидно, он не усматривал в нем, как мы теперь, *определения* обобщенной суммы расходящегося ряда. Э. Чезаро (1890 г.) вновь пришел к этому регулярному методу суммирования, изучая вопрос об умножении рядов; Л. Фейер применил метод Бернулли — Чезаро в теории тригонометрических рядов (1904).

Расходящиеся ряды у Л. Эйлера. О роли Эйлера в теории суммирования расходящихся рядов писалось неоднократно (см., например, [1], предисловие Выгодского в [11; 9, с. 121—126; 14, гл. 20; 15]). Небезынтересно проследить, как отражались его взгляды на этот предмет в переписке с современными ему математиками, в первую очередь с Ник. I Бернулли и Хр. Гольдбахом в 1743—1745 гг.

Эйлер в XVIII в. выступил главным сторонником применения расходящихся рядов; он разработал некоторые общие принципы их теории и эффективные приемы суммирования.

В самой постановке вопроса Эйлер занял позицию, отличную от точки зрения его современников. Он не спрашивал, чему равна сумма 1—1+1—..., как если бы такая сумма была некоей заранее данной вместе с рядом сущностью. Он считал нужным выяснить, как надлежит — если это возможно и целесообразно — определить понятие суммы для расходящихся рядов. Свои соображения Эйлер прежде всего изложил в письмах к Николаю I Бернулли (в 1743 г.), который выдвинул некоторые возражения. Бернулли подчеркивал, что использование Эйлером в его работах 1734—1735 гг. ряда $\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\ldots$ дает $\frac{\pi^2}{6} = 1 - 1/2^2 + 1/3^2 - - 1/4^2 + \ldots$, но доказательство сходимости основного ряда у Эйлера отсутствует. В письме от 6 апреля 1743 г. [4, т. 2, с. 701] он писал, что не представляет себе, как Эйлер может верить в то, что расходящиеся ряды дают точные значения некоторой величины или функции. Эйлер в письме от 14 мая 1743 г. возразил ему [16, т. 1, с. 536], что он сам имел серьезные сомнения относительно использования расходящихся рядов, но что он никогда не получал ошибки, пользуясь своим определением. 29 ноября 1743 г. [4, т. 2, с. 708—713] Ник. I Бернулли заметил, что один и тот же ряд может возникать из разложения двух различных функций, а если это так, то сумма не будет единственной (об этих вопросах в переписке Ник. I Бернулли и Л. Эйлера см. также [16, т. 1, с. 538—541 и 545—549]. В другом письме 1743 г. [4, т. 1, с. 324] Бернулли пишет, что Эйлер должен различать сумму конечного и бесконечного числа членов. Во втором случае нет последнего члена. Итак, нельзя использовать для бесконечных многочленов (как это делал Эйлер) отношения между корнями и коэффициентами многочлена конечной степени. В случае многочлена с бесконечным числом членов нельзя говорить также и о сумме его корней. Ответ Эйлера на эти письма Бернулли неизвестен. В послании Гольдбаху от 7 августа 1745 г. [4, т. 1, с. 324] Эйлер ответил на аргументы Бернулли, соглашаясь, что расходящийся ряд, такой, как 1—2+ +6—24+120—720+..., не имеет суммы, поскольку с этим словом связывают такое понятие, как если бы сумма получалась в результате действительного суммирования, а для расходящихся рядов это не имеет места. Однако, с точки зрения Эйлера, каждому ряду должно соответствовать некоторое определенное значение. Он приводит свой основной принцип: «Чтобы устранить все указываемые при этом трудности, следовало бы называть это значение не словом „сумма", так как с этим словом обыкновенно связывают то понятие, что сумма получается посредством действительного суммирования: а это для расходящихся рядов не имеет места. Но так как всякий ряд возникает из разложения конечного выражения, то я дал следующее новое определение суммы всякого ряда: „Сумма какого-либо ряда есть значение того конечного выражения, из которого возникает этот ряд"».

Далее Эйлер написал, что Бернулли не привел примеров, он сам же не верит в возможность того, чтобы один и тот же ряд мог возникнуть из двух каких-либо действительно различных конечных выражений. «Отсюда следует, несомненно, что всякий ряд, как сходящийся, так и расходящийся, должен иметь определенную сумму».

Здесь же Эйлер в качестве примера вычислил для ряда 1—1+2—6+24—... значение 0,5963, причем сделал это двумя способами: при помощи интегрирования и при помощи непрерывных дробей.

Гольдбах, отвечая на это письмо в августе или сентябре 1745 г. (точная дата ответа неизвестна) [4, т. 1, с. 330], а также в последующих письмах к Эйлеру [4, т. 1, с. 333, 367 и др.], высказал полное согласие с Эйлером, который гораздо более четко, чем он сам, выразил его давние мысли, и сделал несколько дополнительных замечаний по этому же вопросу. В частности, Гольдбах изложил свой способ преобразования расходящегося знакопеременного ряда в сходящийся и пояснил его на примерах, а также привел для расходящихся рядов такого типа способ вычисления произвольного члена по предыдущим. В ответном письме от 23 октября 1745 г. Эйлер одобрил этот метод [4, т. 1, с. 333].

27 октября 1746 г. Эйлер представил Берлинской академии статью о расходящихся рядах, которая была напечатана лишь в 1760 г., через 5 лет после выхода в свет его трактата по дифференциальному исчислению. В статье он правильно вычислил значение ряда $1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + \ldots$ при $x=1$ (см. [1; 2, с. 43—47; 256—257; 15]).

«Парадокс» Кайе. Совершенно ясно, что Эйлер подразумевал ограничить свою доктрину только степенными рядами. Однако явно он этого не сделал, и у этого спора есть интересное продолжение. Эйлер полагал, что сумма такого ряда, как $1-1+1-\ldots$, должна быть величиной функции, из которой выходит этот ряд; поскольку ряд возникает из $1/(1+x)$ при $x=1$, то он имеет величину $1/2$. Однако спустя примерно 40 лет Жан-Шарль (Франсуа) Кайе (1744—1799) рассмотрел соотношение

$$\frac{1+x+\ldots+x^{m-1}}{1+x+\ldots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}=1-x^n+x^n-x^{m+n}+x^{2n}-\ldots, \qquad (1)$$

где m и n — произвольные натуральные числа; $m<n$. Так как при $x=1$ левая часть соотношения равна $\frac{m}{n}$, то и сумма ряда $1-1+1-1+\ldots$ в правой части должна быть равна $\frac{m}{n}$. Лагранж представил эту работу Кайе к публикации в «Memoires» Парижской академии наук, но она так никогда и не была опубликована.

Лагранж писал, что математики должны быть благодарны Кайе за то, что он обратил их внимание на этот парадокс. Объяснение парадокса было предложено Лагранжем [17]. Пусть $m=3$ и $n=5$. Тогда ряд в правой части (1) можно записать в виде

$$1+0\cdot x+0\cdot x^2-x^3+0\cdot x^4+x^5+0\cdot x^6+0\cdot x^7-x^8+\ldots. \qquad (2)$$

Теперь, если взять при $x=1$ 1-й член, сумму первых двух, первых трех и т. д., то из каждых пяти таких сумм три равны 1, а две равны 0. Отсюда наиболее вероятная сумма есть 3/5, и это есть величина ряда (1) при $m=3$ и $n=5$ (здесь Лагранж использовал вероятностный аргумент Лейбница).

Но ведь ряд (2), рассматриваемый как степенной, не есть $1-x+x^2-x^3+\ldots$, и нет никаких оснований ожидать, пишет Лагранж, что они имеют одинаковые суммы. И действительно, утверждение Эйлера, если его надлежащим образом истолковать, верно, ибо сходящийся степенной ряд действительно имеет единственную порождающую его функцию.

Как справедливо отметил в одном из своих писем Эйлер, споры относительно применения расходящихся рядов носили по существу словесный характер. Затруднения при их использовании возникали большей частью не столько из-за особой таинственности расходящихся рядов, сколько за счет несклонности давать формальные определения и недостаточной разработанности теории функций. Сам Эйлер не только испытывал затруднения из-за встречающихся в расчетах расходящихся рядов (см., например, письмо к Байи от 26 сентября 1766 гг. [18, с. 8—11]), но и допускал прямые ошибки. Например, в 1753 г. в переписке с Г. В. Крафтом он обсуждал тот парадокс, что сумма любой геометрической прогрессии, продолженной в обе стороны, равна 0, т. е. $\sum_{n=-\infty}^{1} x^n+\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1-x}=0$. Крафт, наоборот, полагал, что такая сумма бесконечно велика ([19], л. 330—330 об.; см. также [10, XI (1739) 1750]).

В заключение следует сказать, что все парадоксы с расходящимися рядами, которые волновали величайшие математические умы начиная с конца XVII в., получили свое разрешение на рубеже XIX и XX вв. в работах Э. Чезаро, Э. Бореля, Л. Файера, Г. Ф. Вороного и др. Вместе с тем поднятые проблемы послужили одним из стимулов, благодаря которым росло и перестраивалось здание анализа в начале XIX в., поскольку они настоятельно требовали создания теории сходимости рядов и развития теории аналитических функций.

Литература

1. *Петрова С. С.* О суммировании Л. Эйлером ряда...— В кн.: Вопр. истории естествознания и техники, 1969, вып. 26(I), с. 30—33.
2. *Харди Г. Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951.
3. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968.
4. *Fuss P. N.* Correspondance mathematique et physique de quelques celebres. V. 1, 2. St.-Petersbourg, 1843.
5. Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eorumque summa finita. Pt III. Basilae, 1696.
6. Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas geometrice exhibita. Pisis, 1703.

7. *Leibniz G.* Mathematishe Schriften. V. 3. Halle, 1858.
8. *Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Е.* Христиан Гольдбах. М., 1983.
9. *Петрова С. С.* О суммировании расходящихся рядов у Ньютона.— В кн.: Проблемы истории математики и механики. Вып. 1. М., 1972, с. 10—14.
10. Commentarii Academiae scientiarum imp. Petropolitanae.
11. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.— Л., 1949.
12. *Euler L., Goldbach Cr.* Briefweichsel 1729—1764. B.: Acad. Verl., 1965.
13. *Бернулли Д.* Гидродинамика. Л., 1959.
14. *Kline M.* Mathematical thought from anscient to modern times. N. Y., 1972.
15. *Tucciarone J.* Eulers 1760 paper of divergent series. Hist. math., 3 (1976), May, p. 141—160.
16. *Euler L.* Opera postuma matematica et physica. T. I, II. Petropoli, 1862.
17. Memoires de l'Acad. des Sci. Inst. de France, 3, 1796, I—II, pub. 1799.
18. *Эйлер Л.* Письма к ученым. М.— Л., 1963.
19. ЛОА АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3.

РАЗВИТИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ НЕВОДНЫХ РАСТВОРОВ (ПЕРИОДИЗАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ)

Ю. Я. ФИАЛКОВ (Киев)

Подавляющее большинство процессов, известных современной химии, протекает в жидкой фазе — в растворах (расплавах). Поэтому изучение закономерностей химического взаимодействия — это главным образом исследование процессов в растворах. Вот почему учение о растворах в ходе развития физической химии было центральным разделом этой науки.

Большую часть времени теория растворов — и в экспериментальном, и в теоретическом планах — развивалась исключительно в приложении к водным системам. Первым на необходимость изучения неводных растворов как обязательном условии развития общей теории растворов достаточно четко указал Д. И. Менделеев [1]. Будущее полностью подтвердило справедливость этого положения.

Развитие химии неводных растворов стимулировалось рядом обстоятельств. Прежде всего, исследование воды и водных растворов показало, что вода как растворитель характеризуется настолько уникальной совокупностью аномалий практически всех физических и химических свойств [2, 3], что это не позволяет конструировать общую теорию растворов лишь на ее основе. С другой стороны, неводные растворы уже в первые десятилетия XX в. начали проникать в технологию. Ныне большое число широко распространенных технологических процессов основаны на применении разнообразных неорганических и органических растворителей. Наконец, еще в 20-х годах именно неводные растворы позволили скоррелировать точки зрения представителей физической и химической теорий растворов [2]. В последние десятилетия в основном завершен синтез этих двух главных направлений в теории растворов. Показано, что химическая теория справедливо отстаивала тезис о химическом взаимодействии между компонентами жидкой системы как необходимом условии образования раствора; физическая же теория бесспорно доказала плодотворность распространения положений молекулярно-кинетической теории и классической термодинамики на жидкие системы.

Все это привело в настоящее время к положению, которое даже десятилетие назад вряд ли могло быть прогнозируемо: химия неводных растворов — и по числу, и по масштабу разработок — опережает «водную» теорию растворов. Косвенной, но достаточно выразительной иллюстрацией этого положения может служить создание в 1981 г. в системе АН СССР Института химии неводных растворов (г. Иваново).

Современная химия неводных растворов включает ряд самостоятельных разделов: а) физическая химия и химическая физика жидкого состояния; б) термодинамика и строение растворов; в) теория кислот и оснований; г) общая теория равновесий в растворах; д) физико-химический анализ жидких систем; е) электрохимия; ж) кинетика процессов.

Границы между перечисленными разделами, как, кстати, и дифференциация физической химии вообще, в значительной степени условны. Поэтому часто выглядит условным и отнесение конкретной работы к определенному разделу. Эволюция каждого из разделов характеризуется закономерностями, общими, по-видимому, для любого раздела естествознания. Первый, качественный период развития соответствующего раздела сопряжен с перебором ряда моделей и с выбором, как правило, одной из них. Полуколичественный период, начинающийся с момента обоснования адекватности модели, заключается обычно в накоплении экспериментальных фактов и оконтурировании границ применимости модели. Достижения на этом этапе позволяют делать качественные прогнозы о соответствующем свойстве либо характеристике изучаемого круга объектов. И, наконец, количественный этап развития каждого из разделов заключается в введении соотношений, открывающих возможность для количественного прогноза.

Развитие теории жидкого состояния вообще и физической химии неводных растворов, в частности, долгое время сдерживалось отсутствием удовлетворительной модели строения жидкости. На протяжении десятилетий появлявшиеся модели сводились к поискам компромисса между крайними точками зрения, согласно которым, особенности строения жидкости определяются закономерностями либо газового, либо кристаллического состояния. Методологическая несостоятельность этих попыток, исключающая признание за жидким состоянием качественных отличий от газового или кристаллического состояний, определилась довольно поздно: даже после создания Дж. Берналом первой удовлетворительной модели жидкой воды [3] потребовались значительные усилия и время для разработки отвечающей современному состоянию физики теории жидкого состояния. Этот этап развития теории жидкого состояния подытожен в известных монографиях Я. И. Френкеля [4] и Г. Эйринга [5] [1].

Начиная с 60-х годов появляются исследования, формирующие новое направление в изучении природы жидкости, которое правильнее всего назвать химической физикой жидкого состояния. Эти исследования обобщены в монографиях И. З. Фишера, И. Пригожина, Д. Роулинсона [3]. Важный этап в формировании химической физики жидкого состояния, основанный на количественном учете энергетики и стехнометрии межмолекулярных взаимодействий в жидкостях, связан с работами М. И. Шахпаронова [7].

Становление и развитие как физики, так и химической физики жидкого состояния могли быть реализованы лишь с привлечением большого числа неводных растворителей. Так, например, закономерности вязкого течения — важнейшего свойства жидкой фазы, наиболее тесно связанного с межмолекулярным взаимодействием,— были установлены лишь при обобщении данных о множестве индивидуальных неорганических и органических жидкостей и их смесей.

Термодинамика растворов — раздел учения о растворах, посвященный термодинамическому описанию равновесных и неравновесных (транспортных) процессов в растворах. Среди равновесных процессов основное внимание в исследованиях по термодинамике растворов уделялось растворимости и термодинамическим эффектам, которыми сопровождается образование растворов.

Хотя полуколичественное описание зависимости растворимости кристаллических фаз от температуры (уравнение идеальной растворимости) было обосновано еще в прошлом веке, потребовалось значительное время, прежде чем были обоснованы полуколичественные теории, позволяющие оценивать влияние природы растворителя на растворимость: теория регулярных растворов Гильденбранда [8] и теория молекулярных силовых полей В. К. Семенченко [9]. Количественная теория растворимости, которая позволяла бы с уверенностью прогнозировать растворимость данной кристаллической фазы в данном растворителе, до сих пор отсутствует. Вообще проблема количественной теории растворимости из-за недостаточной разработки ряда вопросов физики жидкого состояния оказывается наиболее сложной в современной общей теории растворов.

Полуколичественное описание избыточных термодинамических функций образования растворов было реализовано еще в рамках теории регулярных растворов. В настоящее время литература по физической химии неводных растворов изобилует моделями, связывающими различные свойства растворов (давление насыщенного пара, вяз-

---

[1] Для сокращения библиографии в ряде случаев будут проводиться ссылки на обзорные монографии [2, 5], в которых приведены соответствующие литературные источники, а также на библиографическую сводку [6].