

*Светлой памяти А. А. Маркова (1903—1979)
и Э. Бишоп (1928—1983)*

Amicus Plato, sed magis amica veritas.

«Платон мне друг, но истина дороже» —

Печален звук латыни сей... —

Ведь только Ты, Великий Боже,

Владеешь истиною всей.

А я прошу совсем немного —

Чтоб нам Твоим Подобьем быть —

Пусть будет истина у Бога,

У нас — умение любить...

Я знаю, трудно жить иначе,—

Дается знание борьбой,

Но друг, что предо мною плачет,

Дороже истины любой.

1. Мне трудно определить жанр настоящих заметок — наверное, это своего рода эссе о двух крупнейших творцах конструктивной математики нашего времени. В одном случае я пишу о своем Учителе, незабвенном и единственном для меня человеке, рядом с которым прошла счастливейшая пора моей жизни. С Э. Бишопом я практически не был знаком, но сейчас, когда судьба забросила меня на другой континент, на его творческую территорию, где жива его школа, я много думаю о нем и, постигая новую цивилизацию, вместе с тем постигаю и оригинальность этой уникальной личности, такой американской и такой общечеловеческой. Я вполне ощущал это творческое поле еще в Москве, но здесь, на его земле, появилось еще и персональное сопереживание, без которого любое писание было бы мертво.

2. К счастью для всех сторон, Великая Конструктивная революция в Математике не состоялась, и теперь, когда страсти успокаиваются, глава эта и творцы ее постепенно уходят в историю нашей науки. И Время приносит новое понимание размеров и величия их достижений и горечи их потерь, равно как и вечного величия того, с чем они так искренне боролись.

Латинская мудрость, вынесенная в заголовок маленького стихотворения-эпиграфа, всегда поражала меня своей холодной жестокостью. Сколько Платонов было истреблено поборниками истины! Какие высокие слова при этом произносились, как легко и блаженно было следовать этим словам, какое освобождение от обиденного, человеческого они приносили! Последствия во все времена подсказывала История и во все времена никого она не убеждала. Математика тоже не являла собой исключения — трагедия сотворения кумира из истины разворачивалась и здесь, как повсюду, и кумиру этому приносились подобающие жертвы, — конечно, не сопоставимые с жертвами, принесенными на алтарь Социальной Истины, но все же печальные и порой непоправимые. И теперь, когда я начинаю яснее и яснее слышать голос моей персональной истории, я не могу не согласиться с ним. Платон дороже Истины. Что же, лучше поздно, чем никогда...

3. Андрей Андреевич Марков очаровал меня с первой же встречи. Дело было в 1960 или 1961 г.¹, перед тем как мы, студенты-математики мехмата МГУ, должны были выбрать кафедру для дальнейшей специализации. Было устроено



А. А. Марков. 1967 г.

собрание в одном из амфитеатров 16-го этажа (16-10 или 16-24), и представители кафедр агитировали нас в пользу надлежащих дисциплин. До сих пор помню спокойное и очень весомое выступление академика Г. И. Петрова — единственного механика в той аудитории. С самого начала мое внимание привлек седой, загадочно красивый человек — он саркастически улыбался, слушая ораторов. Наконец, объявили: Андрей Андреевич Марков, заведующий кафедрой математической логики. До этого момента я видел его несколько сбоку, и теперь сочетание ослепительно голубых глаз и столь же ослепительного нимба седины, какое-то сияние, исходившее от него, поразили меня. Даже само имя его сияло упругим повторением — Андрей Андреевич... Необычайной оказалась и манера его речи — это была скорее декламация. Позже, когда я увидел, как он пишет, буквально вырисовывая каждую букву, отчего каждый знак в его рукописи приобретал персональное значение, я поразился полной гармонии между этой письменной декламацией и манерой его устной речи. Последняя не представляла собою ораторского приема — в беседе наедине или даже в телефонном разговоре почти всегда сохранялась эта торжественная манера, когда каждое слово представляло в специфической красоте своего звучания, а все говорение приобретало статус священнодействия. И я снова и снова поражался этому чуду — сотворению письменной и устной речи, языку, одним словом, реальному чуду, которое мы перестали замечать в погоне за чудесами воображаемыми. Но вернемся в ту давнюю аудиторию, в то ушедшее время. Андрей Андреевич говорил о новой, молодой науке — математической логике — и еще более молодой кафедре, призванной эту науку всячески развивать. Он сказал несколько слов о понимании логических связей, остановившись в особенности на дизъюнкции. Здесь он привел пример из толкового словаря — кажется, это была фраза вроде «или он ее любил, или она его любила»². Последовавший торжественный разбор этой любовной фигуры весьма развеселил аудиторию. Невозмутимым оставался только оратор. Перечисляя сотрудников кафедры, Андрей Андреевич особенно тепло упомянул С. А. Яновскую и В. А. Успенского. В последнем случае он заметил: «Правда, Владимир Андреевич — классик». Должен признаться, что я понял тогда эту характеристику почти буквально и вскоре был поражен, увидев

энергичного молодого человека без надлежащей бороды и седины. В нараставшем расположении аудитории, заворуженной его необычайной манерой, Марков продолжал говорить о своей кафедре. Коснувшись специальных курсов, он упомянул читаемый им курс конструктивной логики, который — здесь его голос, и без того торжественный, приобрел особую значительность, а паузы между словами стали еще весомее — «посещают студенты, ассистенты, доценты, профессора». В этот момент молчавший доселе старейший профессор Московского университета, представлявший одну из геометрических кафедр, не выдержал и буркнул: «Только ректор не ходит...». Андрей Андреевич вопросительно повернулся к нему. «Вот Вы сказали, что на Ваши лекции ходят студенты, аспиранты, ассистенты, доценты, профессора. Только ректор не ходит». — «Но ведь ректор — профессор!» Эта реплика потонула во всеобщем смехе, и судьба моя была решена: я покинул алгебру и начал свое странствие в математической логике. С тех пор произошло много событий, многие первоначальные увлечения умерли в разочаровании, многие потери болят и будут болеть, но я все так же счастлив, что встретил Учителя.

Артистичность — вот одна из главных сторон личности А. А. Маркова. Он был артистом в самом широком и высоком смысле этого слова, когда сам жизненный процесс воспринимается как художественное действо. И сейчас у меня перед глазами эта величественно-смешная сцена: Андрей Андреевич закончил лекцию и идет по коридору 16-го этажа, чтобы вымыть руки. Руки эти торжественно вытянуты вперед, и он несет их перед собой с выражением хирурга, направляющегося к операционному столу. Шаги его почти недискретны, и он плывет в студенческом водовороте, как линкор на морском параде, не заботясь нимало, свободно ли пространство перед ним. И пространство действительно каким-то чудом оказывается свободным... Удивительным местом был мехмат в студенческие мои годы!

По-видимому, именно артистическое начало привлекало людей к Андрею Андреевичу. Оно же порой и пугало. Не каждый был в состоянии оценить его своеобразный юмор и постоянную готовность к мистификации³. Порою что-то мефистофельское ощущалось за всем этим. При всем своем опыте ученики его, включая и автора этих строк, раз за разом попадали в одну и ту же ловушку: «Вчера вечером я вышел из дома...» — начинал, бывало, Андрей Андреевич. Далее следовало *crescendo*, события (самой разной природы) становились все более невероятными. Мы застывали — что же дальше? «И здесь... я проснулся», — вдруг заявлял Андрей Андреевич и тут уж начинал улыбаться. Этот необычайный мир, столько раз сотворенный им на моих глазах, запечатлен в единственном известном мне прозаическом произведении Андрея Андреевича — рассказе «Случай с профессором Ивановым» (не могу, к сожалению, поручиться за точность заглавия).

Тем же своеобразным совершенством отмечены и стихи Андрея Андреевича, которые я впервые услышал (притом в авторском исполнении) в середине 60-х годов на даче на платформе 42-й км Казанской ж. д., где мы (А. А. Марков, И. Г. Башмакова, А. С. Кузичев и я) навещали Софью Александровну Яновскую. Сочетание архитектурной стройности стихов, их удивительной чисто звуковой выразительности (в частности, великолепное ощущение красоты русских гласных) со все той же неиссякаемой мистификацией, делающей самое обыденное волнующим и загадочным, подкрепленное уникальной авторской декламацией, производило совершенно необычайное впечатление⁴. Прочтение, нет, исполнение Андрея Андреевича было отмечено уникальным, только ему присущим чувством акустической и синтаксической структуры языка и взаимодействия этих структур. Позже, летом 1971 г., мне удалось записать одно из таких исполнений на магнитную ленту. Копии этой записи, имеющиеся у учеников Андрея Андреевича, в какой-то мере сохранили для нас этот артистический и художественный феномен.

Еще одним проявлением мистификационных наклонностей А. А. Маркова была его манера прочтения — нет, опять-таки исполнения — различных бюрократических документов. Многие участники и гости ученого совета мехмата, по-видимому, помнят это зрелище: Андрей Андреевич держит бумагу несколько поодаль, с глубоким почтением к ней, торжественно, как один восточный монарх держал бы послание другого столь же восточного монарха (я всегда в таких случаях думал, что не хватает одного прислужника для держания бумаги и другого прислужника с опахалом). Голос Андрея Андреевича переливается звонкими и величественными обертонами. Затертые бюрократические формулы, обычно проскальзывающие по самым окраинам нашего сознания, вновь сверкают во всей своей идиотской значительности. Аудитория от души смеется... и порою диссертанту тоже становится легче на его Голгофе. Здесь я не могу не вспомнить одно из таких давних заседаний в аудитории 14-08, трагическую защиту одного из учеников П. С. Александрова. Не знаю, кто там прав по так называемому существу, но, несомненно, нападавшие действовали по пресловутой латинской формуле. Думаю, что теперь, когда Павла Сергеевича нет с нами, по крайней мере, некоторые из этих молодых, энергичных и талантливых ученых вспоминают случившееся с печалью. Поведение Маркова в гуще этого скандала представлялось парадоксальным: тепло отозвавшись о диссертации и диссертанте, он затеял дискуссию с одним из официальных оппонентов, известным советским математиком, отзыв коего загадочным образом соединял абстрактные топологические конструкции диссертанта с возможным будущим решением проблем перевозки мяса и молока (о проблеме производства таковых в то время еще не принято было говорить). Трактую этот отзыв в духе обычного своего прочтения бюрократических бумаг, Андрей Андреевич со всех направлений неизменно возвращался к «перевозкам мяса и молока», каждое новое упоминание было еще более значительным и вызвало еще более мощный взрыв смеха в аудитории. Не могу забыть И. Р. Шафаревича, смеявшегося буквально до слез... И тогда мне казалось и теперь кажется, что Андрей Андреевич сознательно избрал эту парадоксальную линию, прошедшую контрапунктом через все трагическое действие, чтобы смягчить и сделать более человеческой сложившуюся ситуацию.

В начале 70-х годов Андрей Андреевич переживал своеобразную вторую молодость. В это время он сблизился со своими учениками и неизменно возглавлял наши совсем неформальные собрания и застолья. Один из наших стажеров, чудесный, добрый человек, изготовлял в своей родной Грузии изумительное домашнее вино, не имевшее никаких аналогов в торговой сети, и это делало наши дружеские встречи еще более шумными и неформальными. Трудно забыть, каким солнечным был Андрей Андреевич в Дилижане и в Обнинске весной-летом 1970 г. Две конференции последовали одна за другой почти без перерыва, и человеческое сближение школы и Учителя тоже оказалось необычайным. Однажды в Обнинске после многолюдного собрания в одном из тесных номеров местной гостиницы, с чтением стихов, вином, пением и спорами, мы отправились гулять по окрестным лесам далеко за полночь (прогулка была замечательная, и я даже потерял паспорт с командировочным удостоверением, каковые в 6 часов того же утра мне вернул мрачный работник одного из тамошних режимных учреждений). Когда на рассвете мы возвращались назад, горничные стыдили Андрея Андреевича: «... И с кем же Вы связались! Солидный, седой, пожилой...» Следующим вечером они употребили свою служебную власть (я всегда пытался понять таинственные истоки этой необъятной власти) и попросту не пустили Андрея Андреевича с нами, заперев с соответствующими декларациями все выходы с его этажа. Зато мы принесли ему ведро ландышей (да простят нас «зеленые» всех стран и народов).

В это же время Андрей Андреевич начал бывать у меня в доме. Визиты были вполне неформальные и подчас начинались и заканчивались поздно вечером. Домой он всегда возвращался пешком, он вообще любил длинные прогулки (однажды мы прошли с ним вдвоем 18 км от нашего Юго-Запада до Внуково,

обуждая всю дорогу обобщенные индуктивные определения; в аэропорту мы выпили кофе и, пожалев, что нет времени для такой же обратной прогулки, сели в автобус. Тем не менее наша дискуссия еще долго продолжалась уже на квартире Андрея Андреевича). Вспоминаю один из таких летних вечеров. Мы ждали Андрея Андреевича. Пришли Н. М. Нагорный с женой, извлечено было из тайников неслыханное наше вино, а Андрей Андреевич все не появлялся. И гут разразился чудовищный, тропический дождь. В низине, там где кончается проспект Вернадского и начинается улица Лобачевского, немедленно образовалось огромное озеро (какое и лужей-то не назовешь!). Весь транспорт застыл по берегам этого творения стихии. Мы решили, что Андрей Андреевич уже не придет. И напрасно. Вскоре раздался звонок — за дверью улыбался Андрей Андреевич, с которого текли потоки воды... Мы переодели его в какие-то случайные мои одежды, и он рассказал нам свою «одиссею»: «Я вышел из дома и был на углу Ленинского проспекта, когда начался дождь. Я решил идти вперед и вскоре оказался перед этой гадкой лу-жей. Что делать? Решил пересечь ее под землей и пошел в метро (станция „Прспект Вернадского“.— Б. К.). Но там оказалось, что у меня совсем нет денег. Ни копейки. Тогда я остановил одну даму, снял шляпу (на Андрее Андреевиче была соломенная шляпа, с поляй которой тоже текли ручьи.— Б. К.) и попросил: „Мадам, извините, пожалуйста, не могли бы Вы дать мне пять копеек?“ Дама испугалась и немедленно ссудила мне требуемую сумму». Вообразите себе эту сцену...

Андрей Андреевич любил и умел чувствовать себя молодым. И перед надвигающимся семидесятилетием шутил, что, пока нет семидесяти, он — молод, а там сразу станет старым. Но вот «роковая» дата наступила, и на юбилейном заседании (опять-таки в одной из больших аудиторий 16-го этажа) он выступил в своей обычной необычной манере. Запомнилось завершение этой юбилейной речи: «Говорят, что в 70 лет человек стар. Но я совсем не стар. Более того, я только что сдал в печать восемь статей!» Последние слова и особенно слово «восемь» Андрей Андреевич почти выкрикнул к особому восторгу аудитории. Кстати, «Доклады Академии наук» вначале не хотели брать столько статей сразу под предлогом, что это одна большая статья, разбитая на части. Помогло вмешательство акад. А. Н. Тихонова. Молодым и веселым был Андрей Андреевич и на праздничном банкете (или, как он предпочитал выражаться, праздничном ужине). Почетным гостем был А. Н. Колмогоров. Здесь мне хочется сказать несколько слов об отношениях между этими двумя выдающимися личностями. Околломатематический фольклор сохранил ряд случаев (порою анекдотических) взаимной их пикировки. Похоже, что отношения и в самом деле были непростыми. Однако я всегда чувствовал огромное уважение, которое Андрей Андреевич испытывал к личности и к научным достижениям Колмогорова. Несомненно, Андрей Андреевич был задет, когда впервые введенный на мехмате обязательный курс математической логики был отдан для первого прочтения Колмогорову. Тем не менее он с явным интересом посещал все лекции (что, кажется, даже несколько нервировало Колмогорова). Однажды, отвечая на незаданный вопрос, Андрей Андреевич сказал мне: «Вы, верно, удивляетесь, почему я не протестовал, не боролся. В математике есть царство света и царство тьмы. Андрей Николаевич из первого. И это всего важнее». Должен сказать, что уважение было взаимным — во всех случаях моего общения с Колмогоровым это ясно ощущалось. И еще один, главный, по-моему, штрих: после смерти Андрея Андреевича Колмогоров буквально заслонил собою его осиротевшую кафедру.

О математических трудах А. А. Маркова (а он был уникальным по разносторонности ученым) много писали и, несомненно, много будут писать. Я был рядом с ним в последний период его жизни, когда его интересы концентрировались вокруг созданного им конструктивного направления в математике. Я не пишу сейчас подробно об этом его детище — существуют великолепные авторские изложения (см., например, [1—6]), кроме того, мною написана специальная статья на этот счет, и я все же надеюсь увидеть ее опубликованной (см. также

Введение к [7] и [8]). Скажу только, что конструктивная математика Маркова была, как и его стихи, удивительно похожа на своего творца⁵. И в ней, и в нем было что-то от классического храма, образованного прямыми линиями, которые, казалось бы, должны сталкиваться в углах, но... мягко и гармонично сочетаются друг с другом. Первоначальная концентрация конструктивного процесса и конструктивного объекта, лежащая в основе марковского конструктивного мировоззрения, в моем представлении непосредственно происходит из его «дискретной» манеры письма — одного из самых впечатляющих конструктивных процессов, которые мне довелось наблюдать... И удивительно, как много успевал сделать Андрей Андреевич при этой торжественной неторопливости!⁶ Уже после кончины А. А. Маркова я начал редактировать неоконченную его рукопись, впоследствии великолепно развитую Н. М. Нагорным в уже упоминавшуюся монографию [6]. Рукопись по большей части была посвящена семиотике, и, хотя многие начальные идеи вызвали у меня чувство протеста (я не видел, в частности, существенной разницы между тем, что доказывалось и что предполагалось очевидным), тем не менее развитие этих идей, его последовательность, ясная мощь производили огромное впечатление. Увы, — уже и в почерке Андрея Андреевича ощущалась мучительная болезнь, в конце концов разлучившая нас...

Многие годы своей жизни Андрей Андреевич посвятил построению конструктивной логики. Это было нелегкое, порою мучительное занятие — по-видимому, крест любого творца конструктивной математики⁷. В конечном счете он создал великолепную концепцию ступенчатой семантической системы, призванной, в частности, объяснить феномен импликации в конструктивной математике. Теория эта, начавшаяся там, где заканчивались многие попытки истолкования конструктивного смысла математических суждений, — достойный памятник его подвижнической деятельности в математической науке... Должен сказать, что использование им обобщенных индуктивных определений (аналогичных знаменитым брауэровским конструкциям) в качестве семантического средства оказалось для меня (да и не только для меня) абсолютно неожиданным. Многие участники нашего семинара в Вычислительном центре Академии наук СССР помнят горячие дискуссии вокруг этих проблем. И здесь я должен вспомнить еще об одной прекрасной человеческой черте Андрея Андреевича: при всей разнице нашего опыта, возраста и положения я никогда не чувствовал ни малейшего его намерения использовать в дискуссии между нами свой авторитет как таковой. Он всегда был готов слушать и пытаться понять меня. Порою он раздражался, сердился, в какой-то момент наши личные отношения даже стали портиться, но... затем неистощимое чувство юмора возвращало улыбку на его лицо, и мы смеялись вместе, когда он преуспевал с очередной своей мистификацией...⁸ Платон был для него дороже истины...

Последние годы жизни Андрей Андреевич боролся с тяжелой болезнью и с трагедиями, обрушившимися на его семью. Поразительным было его мужество — что бы ни происходило, он всегда был вежлив, внимателен, и посторонний наблюдатель вряд ли смог бы почувствовать, как безжалостна была к нему в эти годы судьба. Он работал до последней физической возможности, даже тогда, когда мир буквально рушился вокруг него...⁹

В конце сентября 1979 г. я пришел к нему в больницу перед своим отъездом в Варшаву. Я чувствовал, что больше не увижу его, хотя, конечно, отталкивал эту мысль... Может быть, и к лучшему, что судьба уберегла меня и в последний раз, когда я видел его, я видел его живым... И этот первый сияющий Марков из солнечного мехмата моей юности и прощальная его улыбка в серой палате больницы АН СССР, как две фотографии из семейного архива, — между ними жизнь.

4. В 1966 г. в Москве проходил Международный математический конгресс. Я хорошо помню то нежаркое лето и совершенно непривычную атмосферу в главном здании МГУ. Приезд огромного числа иностранных коллег, возможность непосредственного общения с ними — все это было чем-то абсолютно из ряда

вон выходящим. В особенности для нас, аспирантов. Именно в эти дни превратились в живых симпатичных людей многие имена, дотоле казавшиеся просто символами. Мне, например, посчастливилось увидеть таких легендарных ученых, как А. Черч, С. Клини, А. Гейтинг, А. Тарский. Уверен, что подобные открытия выпали и на долю моих друзей по аспирантуре. Просматривая программу конгресса, я натолкнулся на пленарный доклад американского математика Э. Бишоп, посвященный конструктивизации математического анализа. В то время уже в течение примерно 15 лет вокруг А. А. Маркова росла и развивалась новая школа конструктивной математики со всей своеобразной философией и техникой. Многие результаты в эти годы были, в частности, получены в конструктивном математическом анализе, который с традиционной точки зрения мог приближенно трактоваться как последовательно алгорифмическая версия классического анализа. Само имя Бишоп, не говоря уже о его конструктивистских концепциях, было мне незнакомо. В тот же день ко мне подошел однокурсник (ныне известный советский математик) и с изумлением на лице поведал, что Бишоп — выдающийся аналитик с первоклассной репутацией и что его обращение в конструктивизм рассматривается коллегами как большое несчастье. Учитель моего друга, тоже великолепный аналитик, пытался даже отговорить Бишоп от этой затеи. Но, видимо, «высокая болезнь» конструктивизма трудно излечима домашними средствами. К несчастью, мой тогдашний английский (в самом лучшем случае письменный) помешал мне составить ясное впечатление о докладе Бишоп. Его часовая лекция была встречена с вежливой сдержанностью, обычной, впрочем, для таких международных аудиторий. У меня не хватило духу подойти к нему и поговорить хотя бы с помощью моих двуязычных друзей. Сейчас об этом можно только жалеть. Зато последнее мимолетное персональное соприкосновение с Бишопом запомнилось навсегда. Это было на все том же 16-м этаже главного здания МГУ, около кафедры математической логики. Я что-то хотел взять из кафедральных бумаг, но из-за двери доносились голоса, шло какое-то обсуждение, и я решил подождать. Вскоре дверь распахнулась, и через коридор в лифтовой холл стремительно прошел, почти пробежал Бишоп. Его лицо выглядело утомленным и отрешенным. Затем появился как всегда невозмутимый Марков с его обычной загадочно-ясной улыбкой. И наконец, в коридор ворвался один из ближайших марковских сподвижников. «Но у него нет позиции, у него нет позиции», — повторял он возбужденно, имея в виду, очевидно, Бишоп. Возмущение было вполне понятным, поскольку позиция Бишоп, в двух словах, состояла в предпочтении живой математической деятельности поискам какой-то специальной позиции, в то время как упомянутый ученый многие годы искал именно позицию и каждый круг этих поисков заканчивался очередным этапом «непонимания математических суждений»¹⁰. Читатель догадался, что я присутствовал при окончании первой (и, насколько мне известно, единственной) встречи лидеров двух важнейших конструктивных направлений нашего столетия. В те годы я еще сильно ощущал дистанцию между собою и Марковым и не решился спросить его о том, что же, в сущности, произошло. И как-то не спросил позже. Еще одно горькое из многих «не успел». Думаю, что эта дипломатическая неудача, обусловленная, по-видимому, личностными барьерами и чрезмерной одушевленностью и истинноискательством («Платон мне друг»...) участников имела решающее воздействие на дальнейшее совершенно раздельное существование этих двух школ. А ведь сколько было общего, о стольком можно было поговорить, столькому научиться друг у друга! Вскоре после конгресса я получил на рецензию из журнала «Новые книги за рубежом» монографию Бишоп [11] и был поражен его энергией и творческой мощью. Передо мною был беспрецедентный случай, когда мыслитель, декларирующий свою оригинальную концепцию математики, немедленно подтверждал ее плодотворность огромной работой по развитию конкретных математических дисциплин, включая далеко продвинутые и, казалось бы, слишком абстрактные для конструктивизации области математического анализа. Вдохновенный (иного слова не подберешь) «Конструк-

тивистский манифест», которым открывалась книга, ясно и изящно излагал авторское кредо. Тогда же в своей рецензии я рекомендовал перевести монографию. Позже к этой идее возвращался известный логик Вл. Лифшиц, но... Между тем Э. Бишоп в сотрудничестве с Д. Бриджесом предпринял существенную переработку своего труда — по существу была создана новая книга, увидевшая свет в 1985 г., уже после безвременной кончины Бишопа. Быть может, эта монография [10] найдет переводчиков в России?

Сейчас, когда я пишу эти строки, среди мягких холмов Аппалачей, на которых уже горит непривычно багровея Пенсильванская осень, передо мною лежит еще один и, видимо, последний конструктивистский манифест Бишопа с необычайным титулом «Шизофрения в современной математике» — запись лекции, прочитанной им для Американского математического общества в 1973 г. [12]. Эта работа была позже перепечатана в мемориальном выпуске того же общества [13] вместе с воспоминаниями коллег Бишопа¹¹. Чтение этой речи Бишопа, этой еще одной, возможно, последней попытки убедить «неверующих» — волнующее и печальное занятие. Сколь явственно здесь то особое отчаяние, отчаяние человека, ощущающего себя пророком, перед лицом простого равнодушного непонимания! Между тем истина так ясна, так очевидна, и, кажется, достаточно нескольких слов, жестов даже, чтобы сообщить ее этим милым и интеллигентным людям вокруг... Но ... Иррациональность этого сопротивления рождает апокалипсическую картину мира, сошедшего с ума. Думаю, что этот эмоциональный накал и ответствен за беспрецедентное название лекции Бишопа — ни один конструктивист до него все же не решался ставить диагноз «шизофрения» традиционной математике (или, правду сказать, традиционным математикам, ибо, в моем представлении, эмоции Бишопа вырастают скорее из общения с коллегами, нежели из чтения их математических трактатов). В первых же строках автор говорит о безуспешных десятилетних усилиях сообщить коллегам реальное ощущение вовлеченных в математику первостепенных философских проблем. Его усилия и идеи попросту не принимались всерьез. Хуже того, издание его первой конструктивной монографии [11], сейчас признаваемой теми же коллегами выдающейся, встретило серьезные препятствия — один из рецензентов прямо писал, что публикация монографии сослужила бы плохую службу математике. Ученики и сотрудники Бишопа встречали серьезные затруднения в развитии своей профессиональной карьеры — по этим причинам Бишоп перестал принимать новых студентов¹². Можно представить, что чувствовал при этом этот благородный и одухотворенный человек!

Я не могу в этих заметках сколько-нибудь подробно излагать конструктивную концепцию Бишопа, тем более что она представлена так ярко и художественно в оригинальных его работах. Я лишь кратко остановлюсь на психологически интересных взаимоотношениях бишоповского конструктивизма с интуиционизмом Брауэра и конструктивной математикой А. А. Маркова.

В своей «Шизофрении в современной математике» Бишоп формулирует четыре основных принципа конструктивного математического мировоззрения.

(А) Математика есть здравый смысл;

(В) Не спрашивай, истинно ли данное суждение, до того, как ты понял, в чем его смысл;

(С) Доказательством является всякое убедительное рассуждение;

(D) Осмысленные различия заслуживают рассмотрения.

Разумеется, подобные перечни никогда не следует воспринимать слишком буквально и слишком всерьез — это всегда лишь попытки немногими словами очертить круг идей и концепций, попытки, уязвимые по самому своему существу. Подчас они определяются привходящими обстоятельствами — настроением автора в момент создания того или иного произведения, характером дискуссий в предшествующее время и т. д. Мне, например, нравится тезис (В), тезисы (А) и (С) представляются слишком расплывчатыми, тезис же (D), взятый сам по себе, тавтологичным. Трудно избежать впечатления, что столь сильный акцент на (А)

и (С) проистекает из горячего отрицания формалистской концепции, свойственной крайним последователям Гильберта (но, по моему мнению, ни в коем случае ему самому) и практически полностью изгоняющей интуицию и смысл из математики¹³. Более умеренное математическое большинство, по-видимому, вполне согласится с принципами (А) и (С), добавив при этом, что ежедневный здравый смысл (или, выражаясь изящнее, первоначальная интуиция) достаточен лишь как базис нашей математической активности. В ходе таковой развивается специфическая многоступенчатая математическая интуиция, здравый смысл вышших порядков, позволяющий нам (точнее, некоторым из нас), например, свободно ориентироваться в многомерных пространствах и «видеть» геометрические образы в них или, скажем, ощущать реальность далеких трансфинитов с такой же или подчас большей силой, чем действительные реалии нашей физической жизни. Возможность развития таких вторичных интуиций (физической, химической, математической, технической, музыкальной, шахматной и т. д.) является одной из самых плодотворных и волнующих способностей человека. Никто, кроме самых убежденных формалистов, не станет оспаривать и (С) — беда только в том, что объективизация сугубо субъективной категории «убедительного», ощущающаяся в (С), слишком оптимистична (см. [14]). Один из исторических уроков состоит в том, что восприятие истины даже самыми честными и талантливыми людьми может быть поразительно различным, порою просто противоположным. Мы можем проследить это и в кризисах оснований математики, последний из которых продолжается на наших глазах. Кто, например, был прав в столь плодотворной, но и столь трагической в персональном плане дискуссии между Гильбертом и Брауэром? И конечно же, любой разумный человек, вообще говоря, подпишется под декларацией (D). Иное дело, что не всегда готовы мы проследивать всякое, даже вполне разумное различие, и, действительно, классическое обращение с экзистенциальными суждениями не учитывает несомненно существенного различия между конструктивными и неконструктивными методами. Вознаграждением за эту потерю нюансов, за это абстрагирование от реального разнообразия математического мира является красота, сила и совершенство теории. Подобную картину можно наблюдать и в естественных науках, например в физике, оперирующей с концепциями типа концепций материальной точки, абсолютно твердого тела, несжимаемой жидкости и т. д., да и вообще использующей математические модели точечного континуума, весьма идеальные с точки зрения реального восприятия действительности¹⁴. В ответ на тезис (D), подразумевающий в нашем контексте игнорирование в классической математике различия между конструктивными и неконструктивными теоремами существования, традиционный математик мог бы сказать то же, что и физик в подобной ситуации: различия эти, конечно, существенны, и мы будем работать над теориями, учитывающими их, но, как ни печально, мы не в состоянии создать гармоничную и обозримую картину мира, сразу же трактуя явления во всем их разнообразии. Далее он добавил бы, что изучение эффективных теорем существования возможно и в рамках классической математики, имеющей все необходимые средства для этого. В подобной аргументации много того самого здравого смысла из (А), хотя более развитый здравый смысл и шепчет нам о глубокой и неслучайной самоценности конструктивных мировоззренческих концепций, обогативших наше понимание природы математики и подаривших нам ряд общематематических достижений (таких, например, как интуиционистская логика, теория последовательностей выбора, конструктивные модели континуума и т. д.). Сказанное показывает не только ограниченность перечней, вроде (А)—(D), но и несовершенство всякого пересказа — Бишоп, конечно, развивает эти тезисы в другом направлении. И все же трудно не почувствовать глубокого и трагического различия между «Конструктивистским манифестом» 1967 г. [10, 11] и «Шизофренией в современной математике». Первое произведение исполнено оптимизма, оно просто излучает моцартовский свет. Препятствия как будто бы не существуют, и полемика не является, похоже, даже второстепенной его задачей. Сущность

бишоповской конструктивной математики выражена уже в самом начале «Манифеста» ярко и афористично: «Всякое математическое утверждение в конечном счете выражает тот факт, что, если мы выполним определенные вычисления внутри множества положительных целых чисел, мы получим тот или иной результат»¹⁵. Именно в недостатке нумерического смысла состоит главная претензия, которую конечное существо может предъявить классической математике¹⁶. Той же оптимистической и революционной интонацией пронизано и предисловие к монографии 1967 г. [11]: «Настоящая книга имеет тройное назначение: представить конструктивную точку зрения, продемонстрировать, что конструктивная программа может быть успешной, и заложить фундамент для дальнейшей работы. Эти непосредственные цели тяготеют к финальной цели — приблизить тот неминуемый день, когда конструктивная математика станет общепризнанной нормой». Увы (или не ув?), сегодня этот день представляется столь же далеким (если вообще верить в его реальность), как и в 1967 г., несмотря на усилия конструктивистов всех ориентаций и направлений. По-видимому, нарастающее чувство собственного одиночества в математическом мире и равнодушие (сколь оно страшнее самых резких возражений!) коллег ответственные за полную горечи полемическую интонацию лекции 1973 г.

Что можно сказать об отношении Бишоп к «другим» конструктивистам? Приведем выразительное место из воспоминаний А. Нероды: «Мы спросили его, насколько большое влияние оказали на него работы Брауэра. Он сказал, что на него повлияла книга Вейля и что он кратко заглянул в Брауэра, избегая, однако, детального изучения из опасения потерять свои естественные линии развития» [13, с. 81—82]. Позиция, понятная для такой могучей творческой индивидуальности как Бишоп. Однако в свете этой позиции особенно печально его почти не скрываемое пренебрежение к интуиционистской математике. Воздавая должное Брауэру за его критику классических концепций, в частности универсального характера закона исключенного третьего, а также за установление конструктивной интерпретации логических операторов, Бишоп без права обжалования отвергает концепции и построения Брауэра, направленные на создание неточечной теории континуума и использующие идею свободно-становящихся последовательностей (последовательностей выбора). Между тем проблема соотношения дискретного и непрерывного имеет огромную историю, и «атомистические» теории континуума (в том числе и бишоповская) не столь уж безупречны концептуально. Более того, можно еще спросить о том, какая интуиция развита у Homo sapiens сильнее: интуиция непрерывной протяженности или интуиция натурального числа (последняя является краеугольным камнем большинства конструктивных течений). Я припоминаю одну из публичных лекций А. Н. Колмогорова, где он явно отдавал приоритет интуиции непрерывного. Словом, здесь неплохо бы применить принцип (D) и хотя бы не отвергать с порога изучение упомянутого различия. Что же касается свободно-становящихся последовательностей (их рассмотрение восходит, кстати сказать, к Э. Борелю), то, несмотря на известные трудности в восприятии брауэровских идей, развитие науки вполне подтвердило оригинальность и плодотворность этой концепции. Заодно еще раз подтвердилась необычайная проницательность Брауэра, создавшего, среди прочего, удивительную математическую теорию незавершенных объектов (см., например, [15]; историческую и философскую трактовку брауэровской теории континуума можно также найти в моей работе [16]).

Еще большим пренебрежением пронизано отношение Бишоп к конструктивной школе А. А. Маркова. Он фактически не замечает таковой в монографии 1967 г. и отводит (не упоминая явно) несколько уничижительных фраз в лекции 1973 г. По-видимому, в том давнем московском споре не родилась истина. Вообще, если таковая в спорах и рождается когда-нибудь, то гораздо чаще рождаются в них совсем другие субстанции и сопутствующие им чувства. Как жаль, что эти две школы так и прожили лучшие свои годы, не познав радости дружеского общения. Между тем родство их несомненно: когда, например, Бишоп говорит о классическом

употреблении квантора существования, то я буквально слышу Маркова. То же относится и к бишоповской характеристике эзотерического характера классической математики как таковой. Правда, Андрей Андреевич с его насмешливым отношением ко всяческим мудрствованиям выразился бы здесь попроще (и нет ли чего-то эзотерического в самом употреблении этого термина?). Что же касается первородного греха отождествления интуитивной концепции алгорифма с одним из точных его понятий — греха, свойственного школе Маркова и, по-видимому, составляющего главное ее отличие от бишоповского подхода, то в пользу этого решения можно привести много вполне серьезных аргументов. Должен сказать, что антирекурсивная аргументация Бишопа не производит на меня сильного впечатления и отнюдь не убеждает в роковом характере сделанного А. А. Марковым выбора. Математика весьма долго и весьма безуспешно обходилась интуитивными представлениями о действительных числах, функциях, непрерывности, пределах, бесконечно малых и т. д. и т. д. Не думаю, однако, что ей повредило уточнение (хотя неизбежно и относительное) этих понятий, достигнутое в XIX в. Точно так же невозможно отрицать огромное воздействие теории рекурсивных функций на глубину и точность наших представлений о том, что такое алгорифм. Упрек же в недостигнутой абсолютной точности восходит к застарелому предрассудку, наделяющему математику особым статусом идеальной, вечной, единственно точной и пр., и пр. науки¹⁷. Абсолютная истина принадлежит не нам, но все же мы несем в себе ее образ и подобие. И способны чувствовать движение к ней. Обе замечательные личности, с которыми я сейчас расстаюсь, были в высшей степени наделены этим даром при всех противоречиях между ними. В этом суть, остальное уносит время.

Мир им.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ По понятным причинам я иногда опускаю персональные имена и заранее приношу извинения, если память подведет меня иногда в деталях и (особенно) в датах.

² Позже я не раз встречал подобный разбор статей из энциклопедий и т. д. в публичных выступлениях Маркова. Неизбежные изъяны соответствующих дефиниций обнаруживали себя под его острым глазом, и противоречие случившегося с серьезностью самого издания неизменно вызывало оживление в публике.

³ Он вполне уважал эту склонность и в других. Однажды несколько озорных моих знакомых стали звонить по различным номерам и просить к телефону Бетховена. Обычной реакцией было возмущение. Андрей Андреевич, как ни в чем не бывало, ответил, что позвать Бетховена к телефону он не может, поскольку таковой здесь не проживает. В ответ на еще более нахальную просьбу передать Бетховену привет он вполне спокойно заявил, что, к сожалению, не может сделать и этого, так как Людвиг ван Бетховен умер в Вене в 1827 г. «Извините, пожалуйста, мы, видимо, не туда попали». — «Пожалуйста. Всего доброго». Они попали в самую точку...

⁴ Интересно, что стихов было сравнительно немного. В отличие от многих профессионалов Андрей Андреевич не писал без крайней необходимости.

⁵ Таков же был и математический стиль Андрея Андреевича. Он не любил разговоров об «идеях доказательств», порою вообще отрицая существование таковых (в чем, несомненно, был элемент присущей ему мистификации). Все детали, включая самые незначительные, должны были быть представлены. И подчас именно в этих деталях он обнаруживал пробелы и даже ошибки. На «Это же очевидно!» он любил отвечать: «Тем легче будет доказать». Иногда казалось, что он дремлет на семинарах — детали все же не такое веселое дело, но можно было не сомневаться, что он проснется при первых же признаках ошибки.

⁶ Ср. воспоминания Н. М. Нагорного в его предисловии к монографии [6].

⁷ Интересно, что и Э. Бишоп, вначале отрицавший увлечение философией за счет конкретной математической активности, в конце концов погрузился в глубокие размышления о сущности импликации (см. [9; 10, с. 13]).

⁸ Нелишне заметить, что при всей его наружной ортодоксальности, революционных конструктивных декларациях представители самых различных направлений и школ вполне уживались и спокойно работали на возглавлявшейся им кафедре математической логики МГУ.

⁹ «Мне кажется, что я падаю, все падает...» — однажды сказал он мне. Болезнь привела к тяжелому расстройству вестибулярного аппарата.

¹⁰ Конечно, это мимолетное наблюдение в сущности дефектно. Я глубоко уважаю его горячую честность и подвижничество и сознаю ценность его достижений, хотя и подозреваю, что истина лежит где-то далеко за пределами тех формальных троп, на которых он ее ищет.

¹¹ Э. Бишоп скончался 14 апреля 1983 г., а уже 24 сентября того же года Университет Сан-Диего (Калифорния), многолетним профессором которого был Бишоп, провел мемориальную конференцию, материалы которой вошли в цитированный сборник. Трудно здесь не провести печальной параллели: насколько мне известно, ни Московское, ни Ленинградское математические общества так и не провели мемориальных заседаний памяти Маркова.

¹² См. воспоминания А. Нероды (A. Nerode) в том же сборнике. Он также пишет, что, когда Бишоп пригласили в 1982 г. прочесть лекцию в Летнем институте по рекурсивной теории, он отказался, сказав, что бесплодные усилия найти общий язык с коллегами десятилетием раньше заочились сердечным приступом. Все заверения и уговоры были напрасны.

¹³ Мне кажется, что, ругая формалистов, Бишоп имеет в виду не только и даже не столько формализм как философско-математическое течение, сколько использование его в качестве психологического укрытия, своего рода истины в последней инстанции (подчас без детального понимания соответствующей доктрины) практическими математиками, не желающими иметь дела с щекотливыми вопросами типа «что такое математика, чем она занимается, каков статус математических объектов и т. д. и т. д.» «Вину» за такое положение дел Бишоп возлагал на «логиков», к коим относился с подозрением (см. уже упоминавшиеся воспоминания Нероды).

¹⁴ Достаточно, например, спросить, является ли скорость света (скажем, в км/с) рациональным или иррациональным числом, чтобы стало ясным, как далеко уводит от реальности (или абстрагируется от нее) традиционная концепция действительного числа. Брауэровские «развивающиеся» числа лучше соответствуют природе физических констант, однако физические теории, оперирующие с ними, насколько мне известно, не созданы.

¹⁵ Здесь и далее перевод цитат с английского мой. — Б. К.

¹⁶ Можно, однако, посмотреть на всю ситуацию иначе и спросить, а так ли уж «конечно» существо, способное создать классическую математику? Тезис о «конечности» человека как такового принимается как самоочевидный практически всеми конструктивистскими течениями.

¹⁷ Ср. интересное обсуждение этого круга вопросов в [14].

Список литературы

1. Марков А. А. О конструктивной математике // Тр. Математического ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. Т. 67. М.; Л., 1962. С. 8—14.
2. Марков А. А. Комментарий редактора перевода // Гейтинг А. Интуиционизм / Пер. с англ. М., 1965.
3. Марков А. А. О логике конструктивной математики. М., 1972.
4. Марков А. А. Конструктивная математика. БСЭ. 3-е изд. Т. 13. М., 1973. С. 148—151.
5. Марков А. А. Конструктивное направление в математике // Там же. С. 151—152.
6. Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгоритмов. М., 1984.
7. Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973.
8. Кушнер Б. А. Конструктивная математика // Математическая энциклопедия. Т. 2. М., 1979. С. 1051—1053.
9. Bishop E. Mathematics as a numerical language // Intuitionism and proof theory. Amsterdam: North-Holland, 1970. P. 53—71.
10. Bishop E., Bridges D. Constructive analysis. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1985.
11. Bishop E. Foundations of constructive analysis. N. Y.; McGraw-Hill, 1967.
12. Bishop E. Schizophrenia in contemporary mathematics // Errett Bishop: reflections on him and his research / Ed. Rosenblatt M. Amer. Math. Soc. Contemporary mathematics. V. 36. Providence: Rhode Island, 1984.
13. Errett Bishop: reflections on him and his research / Ed. Rosenblatt M. Amer. Math. Soc. Contemporary mathematics. V. 39. Providence: Rhode Island, 1984.
14. Успенский В. А. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики. М., 1987. С. 106—155.
15. Troelstra A., van Dalen D. Constructivism in mathematics. An introduction. V. 1—2. Amsterdam; New York; Oxford; Tokyo: North-Holland, 1988.
16. Кушнер Б. А. Принцип бар-индукции и теория континуума у Брауэра // Закономерности развития современной математики. М., 1987. С. 230—250.