В. С. КИРСАНОВ

ОБ ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ПОПРАВКЕ НЬЮТОНА К III КНИГЕ «НАЧАЛ»

Известно, что Дэвид Грегори принимал активное участие в подготовке 2-го издания «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона (об этом см., например, в [1]). В процессе этой работы им были написаны многочисленные поправки и разъяснения к тем фрагментам ньютоновского текста, понимание которых было затруднено либо краткостью объяснения, либо его отсутствием. Эти заметки были затем сведены в так называемые «Memoranda» и «Notae», первые из которых были опубликованы (в большинстве своем) Тернболлом в многотомной «Переписке И. Ньютона» [2], а вторые никогда не издавались (см. рукопись [3], хранящуюся в библиотеке Королевского общества). Впрочем, в XVIII в. было намерение напечатать Грегориевы «Notae», но оно так и не осуществилось (об этом см. [4, с. 26—34]). Позднее исследователями высказывалось мнение, что 2-е издание «Начал», в котором текст подвергся значительной правке, устранило необходимость в таком комментарии, каким являются «Notae» [там же, с. 33].

Но для историка науки эти записи Грегори останутся важным материалом при изучении интеллектуальной атмосферы Англии конца XVII в., тем более что в них содержатся интересные указания на взгляды самого Ньютона относительно проблем, так или иначе рассматриваемых в «Началах». С этой точки зрения публикация, перевод и критический анализ «Notae» представляются мне по-прежнему актуальными.

Интересным примером, проливающим свет на характер ньютоновских рассуждений в «Началах», является комментарий Грегори к задаче, обсуждаемой в предложении VI книги III, частично опубликованный в третьем томе «Переписки И. Ньютона» [2].

В этом предложении Ньютон рассматривает важный вопрос об универсальности физических законов во Вселенной, а именно, об универсальности закона тяготения (это место замечательно также и тем, что здесь описывается опыт, подтверждающий пропорциональность между массой и весом).

С самого начала Ньютон заявляет: «...не может быть сомнения, что природа тяжести на других планетах такова же, как и на Земле» [5, с. 409]. Доказательство ведется от противного: сперва определяются траектории небесных тел в предположении, что тяжесть на разных планетах различна, а затем — в результате несоответствия полученных траекторий действительно наблюдаемым движениям — делается вывод о справедливости исходной посылки. Несмотря на отсутствие общности построение Ньютона отличается остроумием и наглядностью.

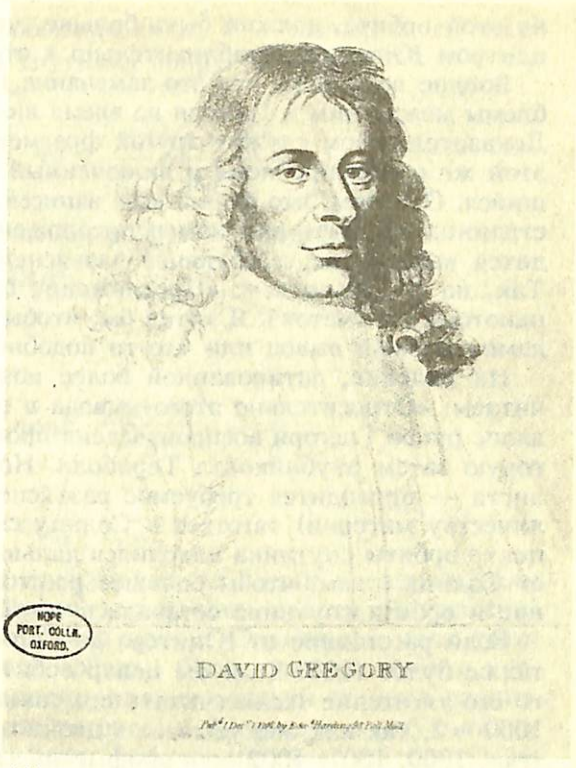
Рассмотрим, говорит он, два небесных тела, скажем, Юпитер и его спутник, и пусть спутник тяготеет к Солнцу сильнее, чем Юпитер. Как в этом случае будет выглядеть орбита спутника относительно Юпитера? Легко убедиться, что центр орбиты спутника не будет совпадать с центром Юпитера, а сдвинется в сторону, противоположную направлению к Солнцу. На самом же деле мы этого не наблюдаем: «орбиты спутников концентричны с Юпитером, поэтому ускорительные силы тяготения Юпитера и спутников к Солнцу равны между собой» [5, с. 410].

В своих расчетах, устанавливающих, где, согласно предположению, будет находиться центр орбиты спутника относительно центра Юпитера, Ньютон заменяет сложное движение спутника вокруг Солнца круговым движением центра его орбиты, считая, что вся масса спутника сосредоточена в этой точке. Таким образом, в первом приближении он рассматривает движение Юпитера и его спутника вокруг Солнца как движение двух независимых планет. Это важно иметь в виду для понимания дальнейшего изложения.

© В. С. Кирсанов

Итак, суть задачи в следующем. Предполагается, что сила тяготения (на единицу массы) спутника Юпитера к Солнцу больше, чем сила тяготения самого Юпитера к Солнцу в отношении $d : e$. Утверждается, что тогда расстояние от Солнца до центра орбиты спутника R будет больше, чем расстояние до центра Юпитера r, причем $R : r = \sqrt{d} : \sqrt{e}$. («Как найдено было мною при помощи некоторых расчетов», — добавляет Ньютон в соответствующем месте «Начал» [5, с. 409].)

Во фрагменте, опубликованном Тернболлом, Грегори так поясняет это утверждение Ньютона: «Расчеты, на которые ссылается автор в конце с. 409, основаны на том, что если спутник имеет тяготение к Солнцу более сильное, чем Юпитер*, то орбита спутника отклонится к Солнцу. Следовательно, для того чтобы спутник находился там, где он находится, его орбита должна стать более эксцентрической и центр эксцентра должен быть дальше от Юпитера и, соответственно, дальше от Солнца так, чтобы большее расстояние от Солнца уравновесило большее тяготение» [2, с. 326].



Единственный сохранившийся портрет Д. Грегори (Музей истории науки, Оксфорд)

В тексте «Начал» Ньютон не дает никаких расчетов, из которых следовало бы решение поставленной задачи, но, согласно А. Н. Крылову (см. [6, с. 462]), этот результат можно пояснить таким образом.

Пусть $r = a$, $R = a + \varepsilon$, а сила притяжения Солнцем единицы массы Юпитера на расстоянии, равном единице, будет μ. Тогда сила притяжения Юпитера будет μ / a^2, а сила притяжения спутника — $d / e(a + \varepsilon)^2$. Эти величины равны, т. е.

$$\frac{\mu}{a^2} = \frac{d}{e(a + \varepsilon)^2} .$$

Откуда

$$\frac{(a + \varepsilon)^2}{a^2} = \frac{d}{e} .$$

или

$$R : r = \sqrt{d} : \sqrt{e} .$$

Однако на обороте того же листа, где содержится вышеприведенное пояснение Грегори, имеется также запись, сделанная самим Ньютоном, в которой дается иная, чем в «Началах», форма зависимости от расстояния: «<Расстояние между центром Солнца> и центром орбиты спутника, для того чтобы спутник оставался

* В этом месте в английском переводе фрагмента допущена ошибка: переведено, что «спутник имеет тяготение к Солнцу более сильное, чем к Юпитеру»

на этой орбите, должно быть больше, чем расстояние между центром Солнца и центром Юпитера, приблизительно в отношении $\sqrt[3]{d} : \sqrt[3]{e}$» [2, с. 327].

Вполне возможно, что это замечание Ньютона было вызвано обсуждением проблемы между ним и Грегори во время визита последнего в Кембридж в мае 1694 г. Доказательством служит другой фрагмент комментария Грегори, относящийся к этой же самой проблеме и включенный в его «Notae», но ранее не публиковавшийся. Отметим, что форма всех записей в «Notae» одинакова: сперва указывается страница «Начал» или номер предложения, затем в квадратных скобках приводится выражение, требующее разъяснения, а потом следует само разъяснение. Так, на с. 120 читаем: «Предложение 6. [Как найдено было мною при помощи некоторых расчетов]. Я хотел бы, чтобы автор указал по возможности этот фундаментальный вывод или что-то подобное» [3, с. 120].

На вклейке, датированной более поздним временем, чем сам комментарий, читаем: «Относительно этого вывода в этом месте рукой автора написано...». И далее рукой Грегори воспроизведена процитированная выше запись Ньютона, которую затем опубликовал Тернболл. Но здесь — на другой стороне вклеенного листа — приводится требуемое разъяснение: «Если спутник (соответственно количеству материи) тяготеет к Солнцу сильнее, чем Юпитер, необходимо, чтобы центр орбиты спутника находился дальше от Юпитера и, соответственно, дальше от Солнца с тем, чтобы большее расстояние компенсировало большее притяжение и орбита спутника оставалась устойчивой.

Если расстояние от Юпитера до Солнца принять за 1000, то и его тяготение также будет 1000. Если бы центр орбиты спутника отстоял от Солнца на 1001, то его тяготение (если считать его таким же, как тяготение Юпитера) было бы 1000 − 2, так как оно убывает в двойном отношении*. Расстояние увеличивается (так, 1000, 1001, 1002 есть арифметическая прогрессия, а следовательно, — приближенно — геометрическая прогрессия); но, по предложению IV книги I, если описывается бóльшая орбита в одно и то же время с Юпитером, соответствующая центробежная сила пропорциональна возросшему расстоянию от центра; из этого следует, что тяготение спутника будет 1000 − 1, а принимая во внимание все вышесказанное, оно будет 1000 − 3; таким образом, тяготение уменьшается в тройном отношении. Поэтому расстояние будет увеличиваться в отношении одной трети. Чтобы орбита спутника оставалась неизменной, отношение тяготения спутника к тяготению Юпитера должно быть в отношении одной трети d к e. Тогда спутник будет последовательно находиться в каждой точке орбиты, как если бы эта орбита представляла собой твердое кольцо, замкнутое вокруг Юпитера.

То же самое рассуждение применимо, если тяготение спутника к Солнцу меньше, чем тяготение Юпитера. Но, согласно этому рассуждению, убывание, по мысли автора, происходит не в отношении одной второй, но в отношении одной трети. Если бы убывание происходило в отношении одной второй, спутник двигался бы медленнее по внешней (т. е. большей) части орбиты, чем по внутренней» [там же].

Как видно из текста, это объяснение, несомненно, принадлежит самому Ньютону. Чтобы его прокомментировать, заметим, что предыдущий вывод о пропорциональности расстояния корню квадратному из удельной силы тяготения некорректен, ибо в нем учитывается лишь смещение орбиты, но не синхронность движения ее центра и самого Юпитера. Чтобы учесть это, надо приравнять периоды обращения Юпитера и спутника вокруг Солнца.

Для спутника

$$F_{т} = \frac{d\mu}{e(a + \varepsilon)^2}; \quad F_{цб} = \frac{v^2}{a + \varepsilon} = \frac{4\pi^2(a + \varepsilon)}{T_{с}^2},$$

* То есть убывает пропорционально квадрату расстояния.

где $F_т$ — сила тяготения; $F_{цб}$ — центробежная сила; v — линейная скорость центра орбиты; $T_с$ — период обращения спутника вокруг Солнца.

Приравнивая эти выражения, получаем

$$\frac{d\mu}{e(a+\varepsilon)^2} = \frac{4\pi^2(a+\varepsilon)}{T_с^2}; \quad T_с^2 = \frac{4\pi^2(a+\varepsilon)^3 e}{\mu d}.$$

Аналогично для Юпитера период обращения вокруг Солнца будет

$$T_ю^2 = \frac{4\pi a^3}{\mu}.$$

Из условия синхронности следует

$$\frac{4\pi^2(a+\varepsilon)^3 e}{\mu d} = \frac{4\pi a^3}{\mu} \quad \text{или} \quad \frac{(a+\varepsilon)^3}{a^3} = \frac{d}{e}.$$

То есть

$$(a+\varepsilon) : a = \sqrt[3]{d} : \sqrt[3]{e}.$$

В своем объяснении Ньютон сначала показывает, что если удельные силы тяготения Юпитера и его спутника к Солнцу одинаковы и если учтена синхронность обращения Юпитера и его спутника вокруг Солнца, то сила тяготения спутника (отнесенная к центру его орбиты) будет уменьшаться с увеличением его расстояния от Солнца пропорционально третьей степени расстояния. И наоборот, для того чтобы силы тяготения Юпитера и спутника к Солнцу были равными при условии, что центр орбиты спутника находится на большем расстоянии от Солнца, чем Юпитер, и обращается с ним синхронно, необходимо, чтобы удельная сила тяготения спутника была больше, чем Юпитера, пропорционально кубу расстояния, т. е. чтобы $d : e = R^3 : r^3$.

Рассуждение, которое приводит Ньютона к этому результату, довольно необычно. Предполагается, что если между двумя величинами имеет место степенная зависимость (степени n), то это значит, что приращению аргумента приближенно соответствует n-кратное приращение функции. Действительно, если $F \propto R^n$, то

$$\frac{F(R+\Delta R)}{F(R)} = 1 + n\frac{\Delta R}{R} + o\left(\frac{\Delta R}{R}\right).$$

Пренебрегая членом $o\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$ и полагая $n = 2$, получаем $\Delta F = 2\Delta R$ (если R = 1000, F = 1000, то $\Delta R = 1$, $\Delta F = 2$).

В связи с этим становится понятным упоминание Ньютоном о прогрессиях, которые составляют увеличивающиеся расстояния («так, 1000, 1001, 1002 есть арифметическая прогрессия, а следовательно, — приближенно — геометрическая прогрессия»). Действительно, если расстояние возрастает в арифметической прогрессии с разностью $d = 1$

$$1000,\ 1001,\ 1002,\ldots,$$

то можно сказать, что приближенно оно возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1{,}001$. В этом случае соответствующая прогрессия для силы тяготения будет

$$1000,\ 1003,\ 1006,\ldots$$

Легко видеть, что если $R = 1001 = 1000q$, то $F = 1003 = 1000q^3$. Точно так же, если $R = 1002 = 1000q^2$, то $F = 1006 = 1000(q^2)^3$. То есть увеличение рас-

стояния в q раз ведет к росту силы тяготения в q^3 раз — и мы приходим к кубической зависимости.

Все это показывает, насколько приемы доказательств и — что важнее — наиболее естественный ход мысли у ученых XVII в. отличались от привычных для нас сегодня.

Ньютон впоследствии не воспользовался этой поправкой и не включил ее ни во 2-е, ни в 3-е издание «Начал». Она осталась неизвестной, равно как и те соображения, на которых она основывалась. Почему он поступил таким образом — неясно. Возможно, что вопрос, который был чисто гипотетическим, показался не заслуживающим внимания и Ньютон решил удовольствоваться более грубым приближением, приведеным в 1-м издании «Начал».

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Поскольку фрагмент записей Грегори воспроизведен в издании Тернболла неполно, а в его английском переводе допущена ошибка, здесь приводится полный текст и исправленный перевод по оригиналу, хранящемуся в библиотеке Кингз колледжа Кембриджского университета (ms. 109, King's College Library):

Ad pag: 435 lin penultima. 6 Maij 1694

Calculi ab Auctore picti quos memorat sub finem pag 409 in hoc fundatur quod si Satellos gravior esset in Solem quam ♄ orbis Satellitis decideret versus Solem, quare ut consistat necesse est ut fiat eccentricus, et centrum eccentici, sit ultra ♄ respectu Solis ita ut major remotio a ☉ majorem gravitatem compenset.

ad pag 409 lin 4ta a fine

et centrum orbis Satellitis, ut Satellos in orbe illo permaneat, major esse deberat quam dist int cent ♄ is et cent ☉ is, in ratione subriplicata ipsius d ad e quam proxime, uti Vid pag versam

Prop 26 incrementa horaria

К с. 435, предпоследняя строка. 6 мая 1694 г.

Расчеты, на которые ссылается автор в конце с. 409, основаны на том, что если спутник имеет тяготение к Солнцу более сильное, чем Юпитер, то орбита спутника отклонится к Солнцу. Следовательно, для того чтобы спутник находился там, где он находится, его орбита должна стать более эксцентрической и центр эксцентра должен быть дальше от Юпитера и, соответственно, дальше от Солнца так, чтобы большее расстояние от Солнца уравновесило большее тяготение.

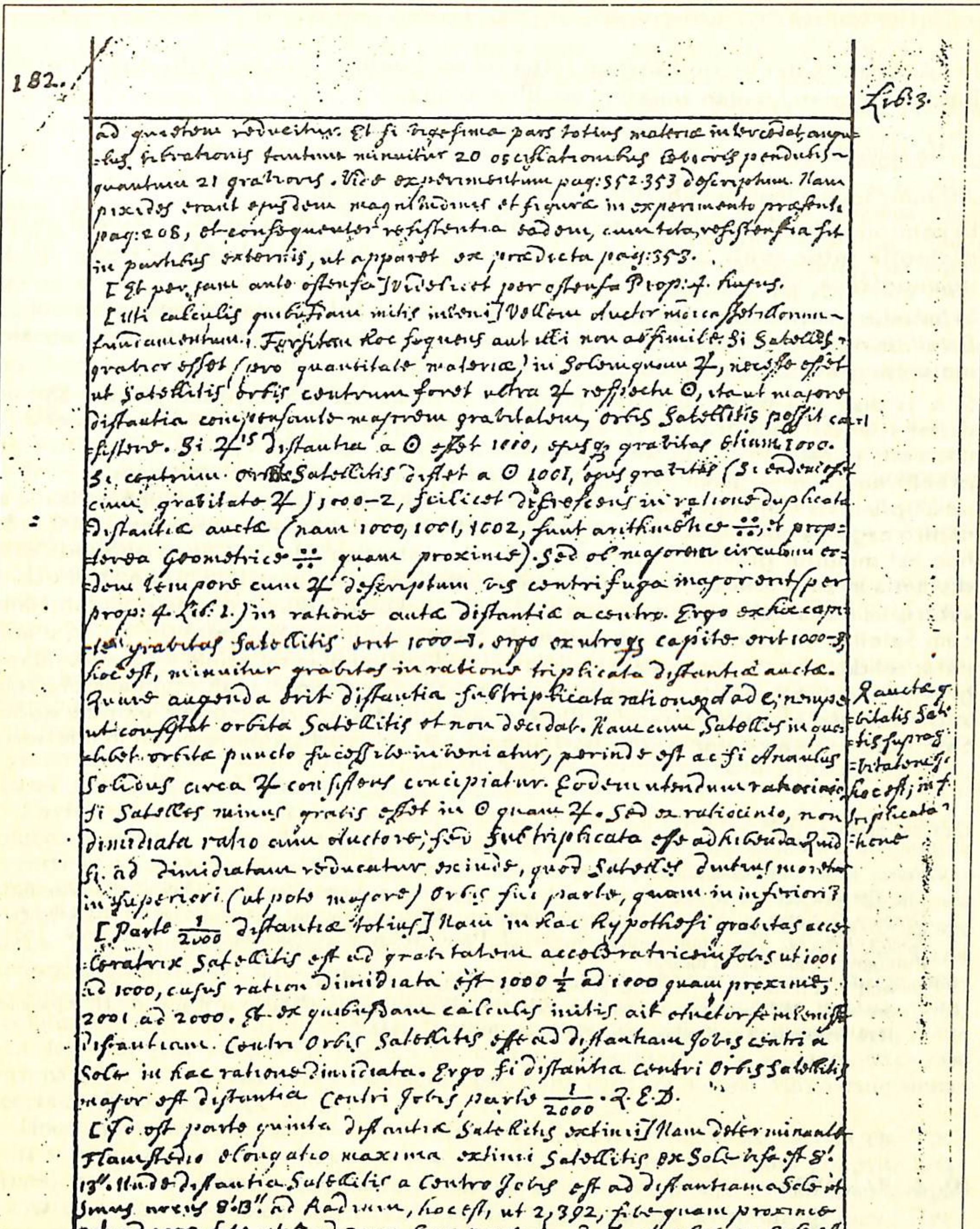
К с. 409, четвертая строка снизу.

<Расстояние между центром Солнца> и центром орбиты спутника, для того чтобы спутник оставался на этой орбите, должно быть больше, чем расстояние между центром Солнца и центром Юпитера, в отношении одной трети к отношению самих d к e, как [найдено было мною при помощи некоторых расчетов]. См. на обороте.

Предложение 26. Часовое приращение*.

---

* Что касается этой последней строки, то ее можно прокомментировать следующим образом. В поправках Ньютона к 1-му изданию «Начал» вместо слова *incrementum* в формулировке предложения XXVI книги III написано *incrementum horarum*. Предложение XXVI находится на с. 435, что объясняет указание на эту страницу в начале фрагмента. Эта поправка вошла во все последующие издания.



182. Lib. 3.

ad quadratum reducitur. Et si vigesima pars totius materiae intercedat, angu-
-lus librationis tantum minuitur 20 oscillationibus cohaerentis penduli
quantum 21 gravioris. Vide experimentum pag: 352.353 descriptum. Nam
pixides erant ejusdem magnitudinis et figurae in experimento praedicto
pag: 208, et consequenter resistentia eadem, cum tota resistentia fit
in partibus externis, ut apparet ex praedicta pag: 353.
[Et per jam ante ostensa] Videlicet per ostensa Prop: 4. hujus.
[Illi calculis quibusdam initis inveni] Vellem auctor monstrasset calculorum
fundamentum. Forsitan hoc sequens aut illi non absimile. Si Satelles
gravior esset (pro quantitate materiae) in Solem quam ♃, necesse esset
ut Satellitis orbis centrum foret ultra ♃ respectu ☉, itaut majore
distantia compensante majorem gravitatem, orbis Satellitis possit con-
-sistere. Si ♃is distantia a ☉ esset 1000, ejusque gravitas etiam 1000.
Si centrum orbis Satellitis distet a ☉ 1001, ejus gravitas (si eadem esset
cum gravitate ♃) 1000−2, scilicet decrescens in ratione duplicata
distantiae auctae (nam 1000, 1001, 1002, sunt arithmetice ∴, et prop-
-terea Geometrice ∺ quam proxime). Sed ob majorem circulum eo-
-dem tempore cum ♃ descriptum vis centrifuga major erit (per
prop: 4 Lib: 1.) in ratione aucta distantiae a centro. Ergo ex hoc capi-
-te gravitas Satellitis erit 1000−1. ergo ex utroque capite erit 1000−3,
hoc est, minuitur gravitas in ratione triplicata distantiae auctae.
Quare augenda erit distantia subtriplicata ratione gravitatis ad ☉, neque
ut consistat orbita Satellitis et non decidat. Nam cum Satelles in quo-
-libet orbitae puncto successive inveniatur, perinde est ac si Annulus
Solidus circa ♃ consistens concipiatur. Eodem utendum ratiocinio
si Satelles minus gravis esset in ☉ quam ♃. Sed ex ratiocinio, non
dimidiata ratio cum auctore, sed subtriplicata esse adhibenda. Quid
si ad dimidiatam reducatur exinde, quod Satelles diutius moretur
in superiori (utpote majore) Orbis sui parte, quam in inferiori?
[Parte $\frac{1}{2000}$ distantiae totius] Nam in hac hypothesi gravitas acce-
-leratrix Satellitis est ad gravitatem acceleratricem Jovis ut 1001
ad 1000, cujus ratio dimidiata est $1000\frac{1}{2}$ ad 1000 quam proxime,
2001 ad 2000. Et ex quibusdam calculis initis ait auctor se invenisse
distantiam Centri Orbis Satellitis esse ad distantiam Jovis centri a
Sole in hac ratione dimidiata. Ergo si distantia centri Orbis Satellitis
major est distantia centri Jovis parte $\frac{1}{2000}$. Q.E.D.
[Id est parte quinta distantiae Satellitis extimi] Nam determinante
Flamstedio elongatio maxima extimi Satellitis ex Sole visa est 8'.
13". Unde distantia Satellitis a Centro Jovis est ad distantiam a Sole ut
sinus versus 8'.13" ad Radium, hoc est, ut 2,392, sive quam proxime
$2\frac{1}{2}$, ad 1000, sive ut 5 ad 2000. Ergo pars $\frac{1}{2000}$ distantiae Jovis a Sole est
$\frac{1}{5}$ distantiae extimi Satellitis a Sole. Tantum ergo distaret centrum orbis

Satellitis

Ratio gra-
-vitatis Satel-
-litis supra g-
-ravitatem J-
hoc est; in t-
triplicata ra-
-tione

Страница из рукописи Грегори «Notae», хранящейся в библиотеке Эдинбургского университета. (Транскрипт, поправленный автором.)

II. Приводится фрагмент рукописи «Notae», перевод которого дан в настоящей статье:

Prop. 6 [uti calculis quibusdam initis inveni] vellem Auctor indicasset illorum fundamentorum forsitan annexum aut illi absimile

На вклейке:

Ad hunc locum hunc inveni Notam propria manu scriptam

Et centrum orbis Satellitis *ut Satellos* in orbe illo permaneat major esse deberat quam distantia inter centr ☉ is et centr ♄ is in ratione subriplicata ipsius d ad e *quamproxime*, uti

Si Satellos gravior esset (pro quantitate materiae) in Solem quam ♄ necesse esset *ut Satellitis* orbis centrum feret ultra ♄ respecta ☉, ita ut majori distantia compensate majorem gravitatem orbis Satellitis possit consistere.

Si ♄ is dist: a ♄ esset 1000 ejusque gravitas etiam 1000. Si centrum orbitae Sattel: distat a ☉ 1001 ejus gravitas (si eadem esset cum grav: ♄) esset 1000 — 2, scilicet decrescens in ratione duplicata. Distantia aucta (nam 1000, 1001, 1002 sunt arith÷÷ et praeterea geom÷÷ quam proxime) sed ob majorem circulum eodem tempore cum ♄ descriptum vis centifuga major erit (per Prop: IV lib: I) in ratione in ratione distantia a centro ergo ex hoc capite grav: Satell: erit 1000 — 1 ex utroque capiite erit 1000 — 3, hoc est minuitur gravitas in ratione triplicata distantiae auctae. Quare augenda erit distantia in subtriplicata. Ratione gravitas Satellitis supra gravitatem Jovis hoc est in subtriplicata ratione d ad e nempe ut consistat orbita Satellitis et non decidat. Nam cum Satellos in quodlibet orbitae puncto successivo inveniatur perinde est ac si annulus solidus circa ♄ consistent concipiatur. Eodem utendum ratiocinio si Satellos minor gravior esset in ☉ quam ♄. Sed ex hoc ratiocinio non dimidiata ratio cum auctore sed subtriplicata esset adhibenda. Quid si ad dimidiatum reducantur exinde quod Satellos diutius movetur in superiori (utpote majori) orbis sui parte quam in inferiori.

Список литературы

1. *Cohen I. B.* Introduction to Newton's Principia. Cambridge, 1971.
2. The Correspondence of Isaac Newton / Ed. H. W. Turnbull Cambridge, 1961. Vol. 3. P. 326—327.
3. *Gregory D.* Notae in Newtoni prinpipia mathematica philosophiae naturalis (ms. Royal Society Library).
4. *Eagles Ch. M.* The Mathematical Works of David Gregory (unpublished Ph. D. Thesis, 1971. Edinburgh University Library).
5. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. L., 1687.
6. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. и прим. А. Н. Крылова // Изв. Николаевской морской академии. Вып. 5 (1916).

Ю. А. ДАНИЛОВ

НЬЮТОН И БЕНТЛИ

30 декабря 1691 г. скончался выдающийся мыслитель, физик и химик Роберт Бойль. Его, верного сына англиканской церкви, оставившего заметный след в науке Нового времени, и на смертном одре не покидала мысль о настоятельной необходимости *доказательно* сокрушить доводы наиболее рьяных и просвещенных сторонников атеизма, возвышавших свой голос против самых основ христианства. Что же

© Ю. А. Данилов