

- 31 Problems of biogeochemistry. 2. The fundamental matter—energy difference between the living and the inert natural bodies of the biosphere. — Transact. of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. New Haven, 1944. V. 35.
- 32 Дана Джеймс (1813—1895) — американский геолог, минералог.
- 33 Ле Конт Джозеф (1823—1901) — американский геолог: ввел понятие психозойской эры в качестве характеристики современной стадии геологической эволюции.
- 34 Уинслоу Дж. — американский геолог.
- 35 Седжвик (Седжуик) Адам (1785—1873) — английский геолог.
- 36 Виноградов Александр Павлович (1895—1975) — геолог, геохимик, академик, ученик В. И. Вернадского.
- 37 Калмыкова Александра Михайловна (1849—1926) — общественная деятельница, педагог, друг семьи Вернадских.
- 38 Вернадский Иван Васильевич (1821—1884) — экономист, статистик, профессор политэкономии Киевского, а затем Московского университетов, отец В. И. Вернадского.
- 39 Лейн А. — американский радиogeолог.

1944 год — последний год переписки В. И. Вернадского со своими детьми. Его давняя мечта увидеться с ними, провести в кругу родных последние годы своей жизни, к сожалению, не осуществилась. По свидетельству знавших его, в этот последний период его жизни Владимир Иванович чувствовал себя очень одиноким. Однако неустанный труд в Лаборатории биогеохимических проблем, постоянное общение с сотрудниками лаборатории, коллегами и друзьями отвлекали его от грустных мыслей, скрашивали одиночество... В декабре 1944 г. вследствие простуды В. И. Вернадский тяжело заболел, 24 декабря он потерял сознание и 6 января 1945 г., не приходя в себя, скончался.

*Публикация и примечания Д. Холлоуэя (Стенфорд, США),
В. Я. Френкеля (Санкт-Петербург), И. И. Мочалова, Г. А. Фирсовой*

С. С. ПЕТРОВА

П. А. НЕКРАСОВ И МЕТОД ПЕРЕВАЛА

Многие задачи естествознания (например, краевые задачи в механике сплошных сред, исследование стохастических моделей физических процессов и т. п.) приводят к рассмотрению контурных интегралов от аналитических функций вида

$$I_n = \int_C e^{nu(z)} g(z) dz \quad (1)$$

Для нахождения асимптотических оценок этих интегралов при больших значениях параметра n применяется метод перевала, или, как его еще часто называют, метод наискорейшего спуска.

Он состоит в том, чтобы, пользуясь теоремой Коши о независимости интеграла от пути интегрирования, попытаться изменить контур интегрирования таким образом, чтобы можно было применить метод Лапласа, с помощью которого легко находятся искомые асимптотические формулы.

История создания столь важного метода асимптотического анализа почти у всех авторов излагается практически одинаково. В двух словах она сводится к следующему: метод, идея которого принадлежит Б. Риману (1863) [1], был развит известным физиком П. Дебаем (1909) [2], изучавшим асимптотику бесселевых функций.

Однако, как будет показано ниже, еще за 25 лет до Дебая и в более общем, чем у него случае, этот метод был развит русским математиком П. А. Некрасовым (1853—1924), одной из ведущих фигур математической жизни Москвы конца XIX начала XX в.

Блестящий аналитик, математик широких интересов с ярко выраженной склонностью к прикладным исследованиям (особенно к социальным наукам — здесь он был одним из пионеров широкого использования теории вероятностей в науках об обществе), замечательный педагог (среди его учеников такие видные математики, как В. А. Анисимов и Г. Г. Аппельрот) и известный деятель просвещения, по своим политическим убеждениям он занимал крайне правые монархические позиции, за что третируясь либеральной профессурой (в частности, академиком А. А. Марковым), и стал, естественно, черным героем в советской математической историографии. Его труды игнорировались, о его заслугах не принято было говорить. Нужно отдать должное А. П. Юшкевичу, который в своей книге «История математики в России», как всегда, с присущей ему добросовестностью отметил, хотя и вскользь, многие выводы Некрасова как факты истории математики, не давая им оценки, при этом каждый раз огорчиваясь, что «о политических взглядах Некрасова уже говорилось» [3, с. 533]. Портрет Некрасова в книге, естественно, отсутствует.

Неудивительно поэтому и то, что первым современным автором, обратившим серьезное внимание на творчество Некрасова и отметившим его замечательные результаты в теории вероятностей, был иностранный ученый — известный австралийский вероятностник, статистик и историк математики Е. Сенета [4].

Вернемся, однако, к методу перевала и попытаемся хотя бы на эвристическом уровне дать представление об этом методе [5]. Как уже говорилось, он служит для получения асимптотических оценок интегралов типа (1) в случае аналитических функций $u(x)$ и $g(x)$. Метод состоит в том, чтобы, выбрав подходящий контур интегрирования, можно было применить метод Лапласа. Последний служит для оценки интегралов (1) в случае, когда функция $u(x)$ вещественна. Если она имеет где-либо максимум, то при больших положительных значениях параметра n подинтегральная функция $e^{nu(x)}$ имеет еще более резко выраженный максимум или пик, тогда искомый интеграл, взятый по малой окрестности этого пика, эквивалентен значению всего интеграла, и его можно легко оценить, заменив подинтегральные функции более простыми, например, первыми членами их рядов Тейлора.

Таким образом, задача асимптотической оценки интегралов по методу перевала состоит из двух этапов: 1) выбора подходящего контура интегрирования, пригодного для дальнейшего применения метода Лапласа, и 2) собственно вычислений, дающих искомые асимптоти-

ческие формулы. Наибольшие трудности возникают, как правило, на первом этапе. Не вдаваясь в детали, скажем, что подходящий путь интегрирования должен проходить через точку перевала z_0 , где производная $u'(z_0) = 0$, а в других точках контура должно выполняться условие $\operatorname{Re} u(z) < \operatorname{Re} u(z_0)$. Название «точка перевала» связано с геометрической иллюстрацией метода. Если рассмотреть в трехмерном пространстве поверхность $t = \operatorname{Re} u(z)$, то точки, в которых $u'(z) = 0$, являются седловыми и напоминают горные перевалы. Часто используются и другие географические названия, так говорят о «холмах» и «долинах», хотя в силу принципа максимума модуля рассматриваемая поверхность не имеет вершин. Кривые на плоскости z , вдоль которых $\operatorname{Re} u(z)$ сохраняет постоянное значение, называются линиями уровня поверхности $t = \operatorname{Re} u(z)$, линии, вдоль которых $\operatorname{Im} u(z)$ постоянна, а $\operatorname{Re} u(z)$ убывает, называют линиями наискорейшего спуска или линиями стока. Линии уровня разделяют окрестность точки перевала на «долины» (где $\operatorname{Re} u(z) < \operatorname{Re} u(z_0)$) и «холмы» (где $\operatorname{Re} u(z) > \operatorname{Re} u(z_0)$).

При такой интерпретации наша задача оценки интеграла состоит в отыскании пути, ведущего из одной «долины» в другую через «перевал». Наилучшим будет наиболее крутой путь, то есть тот, который проходит через точку «перевала» по линии наискорейшего спуска.

Можно говорить о том, что первые подходы к методу перевала были у Коши (подробнее см. [6]). Риман был первым, кто ясно понял, что такое метод перевала (то есть обратил внимание на проблему выбора контура) и реализовал его на частном примере оценки гипергеометрической функции. Сделано это было в 1863 г., когда он уже очень болел. Заметка Римана, содержащая практически одни формулы, была опубликована в 1876 г. после его смерти с комментариями и реконструкциями Г. Шварца [1]. Подтверждением тому, что Риман понимал до мелочайших тонкостей процедуру применения метода перевала, служит асимптотическая оценка функции $Z(t)$, связанной со знаменитой дзета-функцией Римана, найденная Зигелем в 1932 г. в бумагах Римана [7].

Метод перевала у Некрасова появляется в 3-й главе его докторской диссертации «Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел» [8], опубликованной впоследствии отдельно в 12 томе «Математического сборника» [9].

Как известно, проблема определения радиуса сходимости ряда Лагранжа приводит к оценке коэффициентов этого ряда, представленных интегралами вида (1). Работы Римана Некрасов не знал. По его словам, он опирался на идеи Коши из его забытой к тому времени работы.

Некрасов оценивает интеграл

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{\varphi^n(a+z)}{nz^n} dz, \quad (2)$$

взятый по замкнутому контуру C , предполагая, что функция $f(z) = \frac{\varphi(a+z)}{z}$ мероморфная, то есть имеет только полюса. В конце работы он рассматривает и случай существенно особой точки и точек ветвления.

Свой анализ Некрасов начинает с выбора контура, показывая, что всегда существует контур, обходящий начало координат, не содержащий внутри себя особых точек функции $\varphi(a+z)$ и проходящий по направлению наискорейшего спуска через точки перевала, в которых

$$|f(z)| = \left| \frac{\varphi(a+z)}{z} \right|$$

имеет одно и то же наибольшее на этом контуре значение. Для доказательства этого он использует весьма оригинальные геометрические рассуждения, ставшие впоследствии мехматским фольклором, которые коротко можно изложить так: представим себе горизонтальную комплексную плоскость, над которой построен график функции $|f(z)|$. Эта поверхность не имеет вершин, а только седловые точки, в которых $f'(z) = 0$. В полюсах она имеет пики, уходящие в бесконечность. Если на плоскость налить воду до очень высокого уровня, то выше этого уровня будут находиться только маленькие области кругового вида, соответствующие полюсам. Будем следить за областью, окружающей начало координат. Начнем понижать уровень воды, тогда указанные области будут монотонно расширяться и в какой-то момент область, окружающая начало координат, коснется одной или нескольких рассматриваемых областей. Некрасов показывает, что подходящий контур содержит область с началом координат и проходит через все точки касания, которые, очевидно, будут точками перевала наибольшей высоты, причем в окрестности каждой такой точки контур проходит по линии наискорейшего спуска.

Из-за недостатка места не имея возможности показать, как оценивает затем Некрасов интеграл (2), отметим только, что в отличие от Коши и Римана, а также позднейших авторов,

Некрасов и здесь применяет оригинальный прием и сводит эту оценку не к вычислению интеграла от экспоненты, а к другому интегралу, выражающемуся через гамма-функцию.

Как указал Е. Сенета [4], в 1898 г. Некрасов использовал метод перевала [10] для нахождения вероятностей больших отклонений в доказательстве центральной предельной теоремы локального типа. Серьезно этой тематикой стали заниматься лишь в 40-е годы XX в.

Как уже упоминалось, в 1909 г. Дебай, следуя Риману, применил метод перевала к асимптотической оценке цилиндрических функций, являющихся решениями дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{x} u' \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) u = 0$$

в случае, когда аргумент $x \rightarrow \infty$, а отношение $\frac{a}{x}$ сохраняет постоянное значение. Изложение

Дебая получило в дальнейшем широкое распространение, многие авторы стали называть линии наискорейшего спуска контурами Дебая и нередко сам метод перевала стали называть методом Дебая наискорейшего спуска [11].

Однако все вышеизложенное позволяет нам с полным правом говорить, что создателем общего метода перевала является П. А. Некрасов, который рассматривает метод перевала для общего интеграла, в то время как Дебай оценивает этим методом конкретный и довольно простой интеграл. При этом Некрасов рассматривает общий случай, когда точек перевала несколько и каждая имеет произвольную кратность, в то время как у Дебая одна точка перевала, в которой $u''(z) \neq 0$.

В самом общем случае Некрасов доказывает существование замкнутого контура, проходящего через главные точки перевала по направлениям наискорейшего спуска — Дебай это делает для конкретного и простого интеграла, что, конечно, идейно намного проще.

Список литературы

1. Риман Б. Сочинения. М.-Л. 1948. С. 187—194.
2. Debye P. Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grössere Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index // Math. Ann. 1909. 67. S. 533—558.
3. Юшкевич А. П. История математики в России. М., 1968.
4. Seneta E. The Central Problem and Linear Least Squares in Pre-Revolutionary Russia: The Background // Mathematical Scientist. 1984. № 9. P. 37—77.
5. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1957.
6. Петрова С. С., Соловьев А. Д. Об истории создания метода перевала // Историко-математические исследования. Вып. 35 (в печати).
7. Edwards H. M. Riemann's zeta function. N. Y. — London, 1974.
8. Некрасов П. А. Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел. М., 1886.
9. Некрасов П. А. Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел // Математический сборник. 1886. № 12. С. 481—579.
10. Математический сборник. 1899. Т. 20.
11. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., 1966.

С. М. ПОЛОВИНКИН

ПСИХО-АРИТМО-МЕХАНИК

(философские черты портрета П. А. Некрасова)

Павел Алексеевич Некрасов родился 1 февраля 1853 г. Учился сначала в Рязанской духовной семинарии, и это наложило отпечаток на всю его жизнь: до конца дней своих он оставался верующим православным христианином. Будучи 15 лет от роду, обнаруживает исключительное математическое дарование. На вступительном экзамене в Императорский Московский университет на физико-математический факультет он поразил профессора Н. В. Бугаева (1837—1903) и стал верным его учеником и последователем. Некрасов окончил университет в 1878 г. и был оставлен при кафедре чистой математики. В Московском университете Павел Алексеевич прослужил 20 лет: с 1885 по 1905 гг. Преподавал он также в Константиновском