

Из истории естествознания *From the History of Science*

DOI: 10.31857/S0205960625020021

EDN: HVSQBA

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЫСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ (НА МАТЕРИАЛЕ ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ)

БОГАТОВ Егор Михайлович — Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в г. Губкине; Россия, 309186, Белгородская область, г. Губкин, ул. Комсомольская, д. 16; Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»); Россия, 309516, Белгородская обл., г. Старый Оскол, мкр. Макаренко, д. 42; эл. почта: embogatov@inbox.ru

БОРОВСКИХ Алексей Владиславович — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1; Научно-образовательный математический центр Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова; Россия, 362025, Республика Северная Осетия-Алания, Владикавказ, ул. Церетели, д. 16; эл. почта: bor.bor@mail.ru

© Е. М. Богатов, А. В. Боровских

В работе намечается не вполне традиционный подход к изучению истории математики, который связан с выделением систем математических мыслительных средств (знаковых, понятийных, идеальных), позволяющих представлять различные типы отношений, характерные для конкретной ветви математики, и оперировать с ними. Основная задача истории математики при таком подходе — это анализ появления, эволюции и трансформации систем ее мыслительных средств как с точки зрения расширения горизонтов познания и выхода на новые уровни абстракции, так и с позиций пополнения арсенала методов использования таких средств. Для демонстрации результатов применения такого подхода авторами был рассмотрен один из разделов функционального анализа — теория положительных операторов — в контексте истории его генезиса и начального развития в период с середины 1900-х по 1960-е гг. На этом пути были выявлены ключевые мыслительные средства, относящиеся к конечномерному периоду развития указанной теории (положительные матрицы, осцилляционные матрицы и др.) и выражающие отношения между ее значимыми математическими сущностями (теорема Перрона). Кроме того, были сделаны первые шаги по пути осмысления дальнейшей трансформации указанных средств (понятие конуса, определение положительных функционалов и операторов) и математических отношений (теоремы Энтча и Урысона

в интегральном и абстрактном виде и др.). Обсуждаются результаты, полученные О. Келлоггом, Ш. Штурмом, М. Г. Крейном, Ф. Р. Гантмахером, М. А. Рутманом, М. А. Красносельским, Л. А. Ладыженским и другими математиками.

Ключевые слова: история математики, мыслительное средство, отношение между математическими сущностями, развитие математики, теория положительных операторов, теория конусов.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2024 г.

Принято к печати 30 января 2025 г.

MATHEMATICAL THINKING TOOLS IN THE HISTORY OF MATHEMATICS (BASED ON THE THEORY OF POSITIVE OPERATORS)

BOGATOV Egor Mikhailovich — *The Branch of National Research University of Science and Technology “MISIS”;* Komsomolskaya ul., 16, Gubkin, Belgorod Region, 309516, Russia; *Sary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISIS”;* mkr. Makarenko, 42, Sary Oskol, Belgorod Region, 309512, Russia; E-mail: embogatov@inbox.ru

BOROVSKIKH Alexey Vladislavovich — *Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia; Scientific and Educational Mathematical Center of the North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov; Ul. Tsereteli, 16, Vladikavkaz, 362025, Republic of North Ossetia-Alania, Russia; E-mail: bor.bor@mail.ru*

© Е. М. Богатов, А. В. Боровских

Abstract: The work outlines a not entirely traditional approach to the study of the history of mathematics, associated with distinguishing the systems of mathematical thought tools (symbolic, conceptual, ideal), which allow representing and operating various types of relationships, characteristic of a particular branch of mathematics. With this approach, the main task for the history of mathematics is the analysis of the emergence, evolution, and transformation of the systems of its thinking tools, from the standpoint of expanding the horizons of knowledge and reaching new levels of abstraction, and broadening the array of methods for using such tools. To demonstrate the results of application of this approach, the authors examined one of the sections of functional analysis, the theory of positive operators, in the context of the history of its genesis and initial development from the mid-1900s to the 1960s. On this path, key thinking tools related to the finite-dimensional period of development of the theory (positive matrices, oscillatory matrices, etc.) and expressing the relationships between its significant mathematical entities (Perron's theorem) were identified. In addition, the first steps were made towards comprehending further transformation of the said tools (the concept of a cone, the definition of positive functionals and operators) and mathematical relationships (Jentzsch's and Urysohn's theorems in the integral and abstract forms, etc.). The results obtained by O. Kellogg, C. Sturm, M. G. Krein, F. R. Gantmakher, M. A. Rutman, M. A. Krasnoselskii, L. A. Ladyzhenskii and other mathematicians are discussed in the article.

Keywords: history of mathematics, thinking tool, relationship between mathematical entities, development of mathematics, theory of positive operators, cone theory.

For citation: Bogatov, E. M., and Borovskikh, A. V. (2025) *Matematicheskie myslitel'nye sredstva v istorii matematiki (na materiale teorii polozhitel'nykh operatorov)* [Mathematical Thinking Tools in the History of Mathematics (Based on the Theory of Positive Operators)], *Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki*, vol. 46, no. 2, pp. 235–251, DOI: 10.31857/S0205960625020021, EDN: HVSQBA.

«История математики» и «история математиков»

Вопрос о различении «истории математики» и «истории математиков» возник на IV Конференции математических центров России при обсуждении докладов на секции истории математики¹. Совершенно понятно, что это — две несколько разные, хотя и связанные между собой «истории», выполняющие две существенно различные функции.

«История математиков» имеет скорее воспитательное значение как в плане жизненного опыта в широком смысле слова (т. е. понимания того, как тот или иной математик вел себя в различных жизненных ситуациях и какими основаниями руководствовался), так и в плане чисто научной жизни, в которой конфликты являются не только неизбежным, но и необходимым элементом бытия, и поэтому поведение выдающихся ученых в ситуации научного и идейного конфликта, стратегии разрешения таких конфликтов, результат, полученный в процессе разрешения научного конфликта, имеют огромное значение для научной культуры в целом.

Следует, правда, подчеркнуть, что отчасти «история математиков» представляет собой скорее легендарную, чем реальную историю (о чем был, заметим, замечательный доклад Г. М. Полотовского на той же конференции). Свое легендарное существование мы приобретаем еще при жизни, и при внимательном рассмотрении этого существования нетрудно понять, что оно имеет гораздо большее значение, чем реальное: каждая легенда представляет собой идеализацию реального события, и эта идеализация предназначена для фиксации какого-то важного смысла (который в реальном событии, конечно, присутствовал, но совсем не в «чистом» виде). Поэтому культурное значение «истории математиков» состоит прежде всего в том, чтобы фиксировать в идеальной легендарной форме культурные смыслы научной деятельности и культурные нормы взаимодействия, возникающего в этой деятельности.

В отличие от «истории математиков», «история математики» имеет более бессубъектный характер. Она фиксирует скорее объективную сторону дела, суть которой становится яснее, если вспомнить, что математика имеет дело исключительно с *мыслимыми* объектами и *математическое мышление* как способность работать с такими объектами не является естественным, природным, оно формируется в результате обучения. И процесс этого обучения

¹ См.: IV Конференция математических центров России // <https://mc4-conf.ru/>.

состоит в том, что человек осваивает те или иные *мыслительные средства* и *способы* их использования, имеющиеся в человеческой культуре ².

При этом именно история мыслительных средств и представляет собой объективную сторону математической жизни. Если *способ* использования того или иного средства можно выдумать индивидуально, то само *средство* (знаковое, идеальное, понятийное — см. ниже) складывается десятилетиями и столетиями, постепенно трансформируясь под влиянием различных способов его употребления и приобретая в итоге конечную форму. Этот процесс лучше всего просматривается на примере истории возникновения и развития дифференциального и интегрального исчисления — раздела математики, история которого, с одной стороны, практически полностью документирована, а с другой — практически полностью завершена еще в конце XIX в. ³

Другая объективная сторона «истории математики» связана с ее культурной функцией. Как уже говорилось, математика работает с мыслимыми сущностями. В этом она не отличается от других наук. Но специфика ее состоит в том, что ее средства позволяют мыслить *отношения* между сущностями разной природы и оперировать этими отношениями ⁴. Сила — сущность физическая, скорость — тоже, электромагнитная индукция — тем более. Но *отношения* между силами, между скоростями и т. д. — это *отношения между векторами*. Это математические отношения между математическими объектами. В отношении физическая сторона сущности «снимается», и остается математическая.

Почему именно отношения следует рассматривать как культурную функцию математики? Потому, что все другие науки и сферы человеческой деятельности используют математику лишь постольку, поскольку в них самих появляются те или иные *отношения между их предметными сущностями*. Только тогда математика начинает использоваться не метафорически, а как средство представления этих отношений ⁵. И операциональные системы математики начинают использоваться только тогда, когда в соответствующей науке или сфере деятельности возникают операции с такими предметными отношениями (пока что этим отличаются только физика, инженерные науки и, возможно, экономика — остальные используют операциональный аппарат математики в основном через физику или через инженерию).

Следует отметить, что история математики изобилует примерами, когда одни и те же математические конструкты появлялись многократно и затем столь же многократно были забыты — до тех пор, пока не оказывалось, что они не просто являются «игрой ума», а нужны для чего-то, что они могут

² Боровских А. В. О содержании школьного математического образования. От содержания к содержанию: математика как совокупность мыслительных средств // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. 2024. Т. 22. № 2. С. 61–82.

³ См., например: Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Наука, 1966.

⁴ Там же.

⁵ Боровских А. В. О содержании математического образования. Математика для нематематиков // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. 2022. № 4. С. 51–65.

быть использованы именно как средство для того, чтобы мыслить какую-то действительность в той или иной науке. И только тогда они не пропадали, а сохранялись в культуре и дальше воспроизводились и в рамках образования, и в рамках математической деятельности.

Другая сторона той же культурной функции математики отражается в конструктивном понятии математической грамотности⁶, в котором процесс решения практической задачи математическими средствами опирается на переход от *схемы отношений между данными* задачи, которая строится по ее условию в «натуральной» форме, к *таким же математическим отношениям* с последующим переносом на эти отношения данных задачи и формулировкой уже *математической задачи*.

Все выше сказанное позволяет утверждать, что «историю математики» имеет смысл рассматривать с точки зрения трех позиций: а) появление новых типов отношений, которые могут быть представлены математическими средствами; б) возникновение новых (или трансформация старых) математических мыслительных средств, позволяющих эти отношения представлять; в) появление новых способов использования этих математических средств.

Математические мыслительные средства

Для того чтобы более конкретно обсуждать математические мыслительные средства, имеет смысл перечислить типы таких средств. Из основных можно назвать три: это средства знаковые, средства идеальные и средства понятийные⁷.

Знаковые средства служат для замены операций с объектами операциями со знаками, обозначающими эти объекты. Смысл использования знаковых средств простой: если при оперировании с объектами окружающего мира мы вынуждены приспосабливать свое действие к объекту, то в ситуации со знаковыми средствами все наоборот — сами эти средства приспособлены к нашим действиям. Именно поэтому операции со знаками выполнять проще, чем с реальными вещами, и именно в этом и состоит функция знаковых средств.

Перенос действий с вещей на знаки — это операция *абстрагирования* (при этом абстрагируется действие от предмета этого действия), но это лишь «нижний этаж»: операция абстрагирования может применяться и к знаковым же операциям, и тогда мы получаем знаковую систему следующего уровня абстракции. В результате в целом знаковые средства образуют многоуровневую иерархическую систему, и, грубо говоря, *абстрактное мышление* — это владение в той или иной степени этой системой знаковых средств, в котором основную сложность представляет не оперирование со знаками на том или ином уровне абстракции, а *переход* с одного уровня абстракции на другой и соотнесение того, что делается на одном уровне абстракции, с тем, что это

⁶ Боровских А. В. О понятии математической грамотности // Педагогика. 2022. Т. 86. № 3. С. 33–45.

⁷ Боровских. О содержании школьного математического образования... С. 75.

означает на другом уровне. *Отношения* между знаковыми средствами разного уровня обычно представляются *понятиями*, которые тоже являются мыслительными средствами, но иного типа.

Знаковые средства могут быть разной сложности. Простейшими, элементарными являются всем нам известные цифры, буквы, знаки операций и т. п. Наиболее распространенные сложные знаковые средства в математике — формулы и схемы, однако используются также диаграммы разного типа, графы, сети (которые, впрочем, можно считать особыми типами схем) и др.

Второй тип математических мыслительных средств — *идеальные*. Они позволяют рассуждать и что-то доказывать. Сумма углов треугольника равна 180° только для *идеального* треугольника, составленного из *идеальных* отрезков *идеально* прямых линий. И доказывать это возможно только для такого треугольника.

Идеальные объекты создаются в результате процедуры *идеализации*, представляющей собой некий тип предельного перехода. Так, идеальная линия (по Евклиду, «не имеющая ни ширины, ни толщины, а имеющая только длину») получается как «предельная ситуация»: мы можем нарисовать толстую линию, можем более тонкую, можем еще тоньше, и если мы будем продолжать рисовать все более тонкие линии, то *в конце концов* мы получим идеальную *геометрическую* линию. Вот это «в конце концов» является характерным маркером процедуры идеализации.

Как мы уже отмечали, особенностью идеальных мыслительных средств является то, что именно с их помощью мы можем рассуждать и что-то доказывать. Классическая геометрия — это фактически система таких идеальных мыслительных средств, и именно это делает ее *логической системой*.

Процедура идеализации необратима: по идеальному объекту восстановить реальный невозможно. И здесь для удержания связи между реальным объектом и его идеализацией служат *понятийные* средства. Именно благодаря им мы можем суждение относительно идеального объекта применить к реальному (с определенной *точностью*, это центральное понятие, связывающее идеальный мир с реальным).

Наконец, следует отметить, что операции абстрагирования и идеализации могут применяться как к абстрактным, так и к идеальным объектам (например, вещественное число появляется как результат идеализации, но сама идеализация отправляется от обычных и десятичных дробей, которые являются чисто знаковыми средствами). Поэтому в конце концов оказывается, что любой математический объект обладает как атрибутами знакового средства, так и атрибутами идеального. И поэтому эти атрибуты на самом деле относятся не к самому математическому объекту, а к той системе, в которую он включен. Так, определенный интеграл является знаковым средством, когда мы решаем задачи из «Демидовича»⁸, является идеальным средством (пределом интегральной суммы), когда мы про него что-то доказываем, и понятийным средством — когда мы выстраиваем отношение между формулой с интегралом и, например, физическим явлением (потенциал точечного заряда обратно пропорционален расстоянию до него, если таких

⁸ Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие. 13-е изд. М.: Изд-во Московского университета; ЧеРо, 1997.

зарядов несколько — мы пишем соответствующую сумму, если заряд «размазан» — мы сумму заменяем интегралом).

Таким образом, в исследовании исторического развития математики мы должны проследивать не столько возникновение новых отдельных мыслительных средств (знаковых или идеальных), сколько появление, эволюцию и трансформацию *систем* таких средств.

Резюмируя, можно сказать, что «история математики» предстает перед нами как история появления новых *математических отношений*, как история возникновения, эволюции и трансформации *систем знаковых средств*, позволяющих оперировать этими отношениями, и *систем идеальных средств*, позволяющих рассуждать об этих отношениях и что-то про них доказывать. Именно с этой точки зрения мы и попробуем рассмотреть некоторые характерные закономерности развития теории положительных операторов.

Развитие идей О. Перрона и Ш. Штурма. Отголоски теории осцилляций

Исследование положительных операторов началось с конечномерных задач, и здесь одним из первых базовых отношений было отношение между положительностью элементов матрицы A и наличием наибольшего по модулю, простого положительного собственного значения и соответствующего ему собственного вектора A с положительными координатами. Это отношение выражалось *теоремой Перрона* и опиралось на имеющийся аппарат векторно-матричной алгебры, как знаковый, так и понятийный⁹.

Хотя появление теоремы Перрона было связано с его исследованиями по теории цепных дробей, одним из первых методов использования указанного отношения, который выделил его из множества других векторно-матричных отношений, стал метод, предложенный русским математиком А. А. Марковым (старшим) в контексте теории стохастических матриц¹⁰.

Перенос приведенного отношения в бесконечномерную область стал возможен благодаря появлению теории Гильберта — Фредгольма, позволяющей ассоциировать системы линейных уравнений, состоящих из бесконечного числа переменных и уравнений, с интегральным уравнением¹¹. При этом знаковое средство векторной алгебры — матрица A , действующая на конечномерный вектор X , — в теореме Р. Ентча превратилась в интеграл

$$Ax(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt, \quad (1)$$

где $K(x, t)$ — симметричное ядро, $x(t)$ — непрерывная функция.

⁹ Perron, O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Mathematische Annalen. 1907. Bd. 64. S. 1–76.

¹⁰ Марков А. А. Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь // Записки Академии наук. Серия 8: По Физико-математическому отделению. 1908. Т. 22. № 9. С. 1–29.

¹¹ Гильберт Д. Избранные труды. В 2 т. / Ред. А. Н. Паршин. М.: Факториал, 1998. Т. 2: Анализ. Физика. Проблемы Гильберта.

Доказанная Ентчем теорема ¹² выражала отношение между положительностью ядра оператора A из (1) и существованием его наименьшего по модулю, простого положительного собственного значения $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, которому соответствует положительная на интервале (a, b) собственная функция. Она получила свое дальнейшее применение в исследованиях О. Келлога ¹³, относящихся к развитию результатов Ш. Штурма о перемежаемости нулей соседних собственных функций в задаче о колебаниях неоднородной струны ¹⁴. Опираясь на результаты Ентча и Шура ¹⁵, Келлог смог найти отличные от Штурма объяснения существования осцилляционных свойств спектра уравнения

$$\lambda \int_a^b K(s, t)x(t)dt = x(s). \quad (2)$$

При этом ассоциированные с ядром $K(s, t)$ ядра (этот объект пришел в теорию положительных операторов из теории Фредгольма) вида

$$K_m(S, T) = \det(K_{ij}), K_{ij} = K(s_i, t_j); i, j = 0, \dots, m,$$

где $S = (s_0, s_1, \dots, s_m)$, $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ должны были удовлетворять специальным условиям: $K_m(S, T) \geq 0$ для упорядоченных наборов аргументов

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m; s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m$$

и $K_m(s, t) > 0$ при $t_m = s_m$.

Поскольку содержательная часть условий Келлога внешне выглядела как матричное условие, естественно было рассмотреть его осцилляционную теорию в дискретном варианте. Этот шаг был сделан М. Г. Крейном совместно с Ф. Р. Гантмахером ¹⁶, им удалось выделить новый класс матриц — *осцилляционные матрицы* ¹⁷ — как базовое мыслительное средство алгебры

¹² Jentzsch R. Über Integralgleichungen mit positivem Kern // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1912. Bd. 41. S. 235–244; Kellogg, O. D. The Oscillations of Functions of an Orthogonal Set // American Journal of Mathematics. 1916. Vol. 38. No. 1. P. 1–5.

¹³ Kellogg O. D. Interpolation Properties of Orthogonal Sets of Solutions of Differential Equations // American Journal of Mathematics. 1918. Vol. 40. No. 3. P. 225–234; Kellogg O. D. Orthogonal Function Sets Arising from Integral Equations // American Journal of Mathematics. 1918. Vol. 40. No. 2. P. 145–154.

¹⁴ Sturm C. Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1836. T. 1. P. 373–444; Боровских А. В., Покорный Ю. В. Системы Чебышёва — Хаара в теории разрывных ядер Келлога // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. № 3. С. 3–42.

¹⁵ Schur I. Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen // Mathematische Annalen. 1909. Bd. 67. Nr. 3. S. 306–339.

¹⁶ Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Об одном специальном классе детерминантов в связи с интегральными ядрами Kellog'a // Математический сборник. 1935. Т. 42. Вып. 4. С. 501–508; Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1941.

¹⁷ Осцилляционная матрица — это неотрицательная квадратная матрица A , все миноры которой неотрицательны, и некоторая степень A является матрицей, все миноры которой положительны.

малых колебаний, выражающее отношение между неотрицательностью миноров таких матриц и полным набором их спектральных свойств (вещественность, положительность и простота собственных значений, определенные законы чередования знаков и координат собственных векторов и др.).

Таким образом, изначально на уровне аналогий создавались предпосылки для более абстрактного взгляда на эти отношения.

О результатах П. С. Урысона и их развитии

Несколько в стороне от этой линии находились исследования П. С. Урысона¹⁸, который сразу обратился к нелинейным интегральным уравнениям, не принимая во внимание теорему Ентча. Урысон самостоятельно доказал несколько вспомогательных теорем о положительной разрешимости линейных интегральных уравнений с положительным ядром, опираясь на представление резольвенты уравнения (2) в виде ряда по степеням параметра λ посредством итерированных ядер¹⁹. Это позволило ему перейти к анализу уравнения вида

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s)) ds \quad (3)$$

в контексте выяснения условий его положительной разрешимости в «целом» при следующих естественных предположениях о ядре этого уравнения:

- а) $K(x, s, 0) = 0$, $K_y(x, s, 0) \equiv P(x, s) > 0$;
- б) производная $K_y(x, s, y)$ непрерывна по y равномерно относительно x, s ;
- в) $K_y(x, s, y)$ положительна и монотонно убывает с возрастанием y ($y \geq 0$);
- г) при безграничном возрастании y $K_y(x, s, y)$ равномерно относительно x, s стремится к функции $Q(x, s)$.

Как отмечал М. А. Красносельский²⁰, предположения Урысона отсылают к вогнутости ядра уравнения (2) как функции переменной y , что позволяет доказывать сходимость метода последовательных приближений при исследовании положительной разрешимости этого уравнения, апеллируя к скалярной ситуации как к сущностному отношению.

Если обозначить через λ_P, λ_Q собственные значения линейных интегральных операторов с ядрами P и Q , которым соответствуют положительные собственные функции, то отношение между поведением нелинейного ядра оператора Урысона и наличием у него положительных собственных функций можно выразить так (теорема Урысона):

В предположениях а) – г) уравнение (3) имеет положительное решение при $\lambda \in (\lambda_P, \lambda_Q)$ и только при таких λ ; каждому $\lambda \in (\lambda_P, \lambda_Q)$ соответствует

¹⁸ Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Математический сборник. 1923. Т. 31. № 2. С. 236–255.

¹⁹ Там же. С. 237.

²⁰ Красносельский М. А., Ладыженский Л. А. Об объеме понятия u_0 -вогнутого оператора // Известия высших учебных заведений. Математика. 1959. Вып. 5. С. 112–121.

единственное положительное решение $y(s, \lambda)$, непрерывно зависящее от λ , причем $y(s, \lambda_1) < y(s, \lambda_2)$, если $\lambda_1 < \lambda_2$.

Отметим, что в математическую культуру теорема Урысона вошла только через 30 лет после своего появления, став востребованной на этапе перехода теории положительных операторов на абстрактный уровень.

Шаги к абстрактным отношениям в теории положительных операторов

Рассмотрим мыслительное средство, сыгравшее важную роль в изучении положительных операторов и функционалов — *позитивную последовательность*, определение которой было дано Крейном²¹ и восходило к идеям Ф. Рисса²²:

Если для всех положительных (в обычном смысле) многочленов $P(t)$ вида

$$P(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad t \in [a, b], \quad x_i(t) \in C[a, b]$$

функционал $B(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$ также положителен, то последовательность $\{c_i\}$ называется *позитивной*.

Позитивность последовательности первоначально использовалась для выделения допустимых классов объектов, претендующих на роль моментных последовательностей при решении L -проблемы моментов²³, которую упрощенно можно трактовать как обратную к задаче теории осцилляций: *определить массы бусин и их расположение на струне таким образом, чтобы частоты колебаний струны имели наперед заданные значения*²⁴.

Переход к абстрактным представлениям в указанной области был осуществлен Крейном (конец 1930-х гг.), который определил позитивность функционала в бесконечномерном пространстве E как его *способность преобразовывать элементы некоторого конуса $K \subset E$ в неотрицательные (в обычном смысле) элементы*²⁵.

Такая трансформация отношения из конечномерной формы в абстрактную (первого уровня) за счет смены мыслительного средства (*позитивная последовательность* $\rightarrow$ *позитивный функционал*) стала возможной благодаря

²¹ Крейн М. Г. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие // Успехи математических наук. 1951. Т. 6. Вып. 4. С. 3–120.

²² Riesz F. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires // Atti del Congresso internazionale dei matematici, Bologna, 3–10 settembre 1928. Bologna: Nicola Zanichelli, 1930. Т. 3. Р. 143–148.

²³ Крейн М. Г. Общие теоремы о позитивных функционалах // Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков: Госнаучтехиздат Украины, 1938. С. 121–150.

²⁴ Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. 2-е изд. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.

²⁵ Крейн М. Г. Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах // Сообщения Харьковского математического общества. 1937. Т. 14. С. 227–237.

переносу ряда фактов теории n -мерных выпуклых множеств Минковского (прежде всего теоремы об отделимости) на банаховы пространства²⁶ с введением соответствующих понятий, операциональных систем (в значительной степени заимствованных из конечномерной теории, но трансформированных в так называемую «бескоординатную» форму).

Выход на второй уровень абстракции (уровень операторов) оказался возможным благодаря привлечению топологических мыслительных средств и конструктов, в число которых, помимо абстрактного определения сходимости, вошли теоремы о неподвижной точке Брауэра и Шаудера²⁷ (*положительным оператором* был назван оператор, преобразующий конус K банахова пространства E в себя²⁸).

Аналогия с теорией осцилляционных матриц помогла ученику Крейна М. А. Рутману дать понятие *вполне позитивного линейного оператора*, некоторая натуральная степень которого преобразует любой граничный элемент телесного конуса K в его внутренний элемент. Такое нововведение позволило представить отношения между положительным оператором и его спектральным радиусом, фигурирующие ранее в теореме Ентча, в абстрактном виде²⁹:

Вполне непрерывный линейный оператор A , вполне позитивный относительно телесного конуса K , имеет в этом конусе один и только один собственный вектор. Соответствующее ему собственное значение является наибольшим по модулю положительным собственным значением оператора A .

Следующий шаг — отказ от линейности в операторном аналоге теоремы Ентча — привел Рутмана к необходимости делать дополнительные предположения относительно оператора A :

а) монотонность по конусу:

$$x \succeq y \Rightarrow Ax \succeq Ay; \quad (4)$$

б) ограничение на рост значений оператора A вдоль некоторого луча внутри конуса:

$$\exists (u \in K; c > 0, \varepsilon > 0) [A(tu) \succeq ctu] \forall (t \in [0, \varepsilon]). \quad (5)$$

²⁶ *Ascoli G.* Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari // *Annali di matematica pura ed applicata*. 1932. Т. 10. Р. 33–81; *Mazur S.* Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen // *Studia mathematica*. 1933. Vol. 4. Р. 70–84.

²⁷ *Богатов Е. М.* О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2019. Т. 27. № 1. С. 96–114; *Богатов Е. М.* Об истории положительных операторов (1900-е — 1960-е гг.) и вкладе М. А. Красносельского // *Научные ведомости БелГУ. Серия: Прикладная математика. Физика*. 2020. Т. 52. № 2. С. 105–127.

²⁸ *Рутман М. А.* Об одном специальном классе вполне непрерывных операторов // *Доклады АН СССР*. 1938. Т. 18. № 9. С. 625–627.

²⁹ *Rutman M. A.* Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cône // *Математический сборник*. 1940. Т. 8 (50). № 1. Р. 77–96.

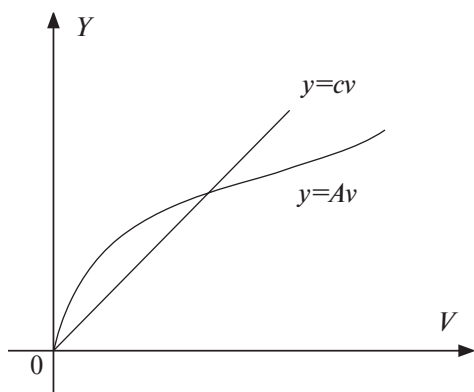


Рис. 1. Геометрический смысл условия Рутмана — существование пересечения вогнутой функции с наклонной прямой

Здесь выражение $x \succeq y$ означает, что $(x - y) \in K$, причем отношение $\succeq$ обладает свойствами обычного знака $\geq$.

В одномерном случае условие Рутмана (5) допускает геометрическую интерпретацию (см. рис. 1).

Требования (4)–(5) к нелинейному оператору A позволили Рутману сделать заключение о том, что при их выполнении уравнение

$$Ax = \lambda x, \quad x \in K \subset E,$$

для вполне непрерывного оператора A всегда имеет положительное решение ($\lambda > 0$, $x \in K$), причем норма элемента x может быть выбрана произвольно³⁰.

Таким образом, понятийное мыслительное средство — положительное решение — трансформировалось из положительной (в обычном смысле) функции в функцию, принадлежащую конусу, состоящему из положительных элементов, причем положительность теперь имеет уже совершенно абстрактный вид, для которого неотрицательные векторы или функции являются лишь «частным случаем».

Изучение возможности получения абстрактного аналога теоремы Урысона привело к необходимости введения нового класса операторов — u_0 -вогнутых операторов³¹. Оператор A , действующий в банаховом пространстве E , полуупорядоченном посредством конуса K , был назван u_0 -вогнутым, если этот оператор положителен, монотонен, преобразует ненулевые элементы конуса внутрь конусного отрезка $[\alpha u_0, \beta u_0]$ и для любого элемента $\varphi \in K$, такого, что $\varphi \succeq \gamma u_0$ ($\gamma > 0$) и для любых чисел a, b из интервала $(0, 1)$ можно указать такое положительное число η , что

$$A(t\varphi)(1 + \eta) \succeq A(\varphi), \quad (a \leq t \leq b).$$

Свойства u_0 -вогнутого оператора помогли авторам доказать абстрактный аналог теоремы Урысона о спектре:

Теорема 1. Пусть A является u_0 -вогнутым, вполне непрерывным оператором, асимптотически близким к линейному оператору Q : $\lim_{\substack{\varphi \rightarrow \infty, \\ \varphi \in K}} \frac{A\varphi - Q\varphi}{\varphi} = 0$

³⁰ Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 1. № 23. С. 3–95.

³¹ Красносельский М. А., Ладыженский Л. А. Структура спектра положительных неоднородных операторов // Труды Московского математического общества. 1954. Вып. 3. С. 321–346.

и имеющих в точке $\theta \in E$ производную Фреше P : $\lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0, \\ \varphi \in K}} \frac{A\varphi - P\varphi}{\varphi} = 0$.

Тогда позитивный спектр³² оператора A состоит из интервала (α, β) , где β — положительное собственное значение оператора P , а α — или ноль, или положительное собственное значение оператора Q . При этом каждому собственному значению $\lambda \in (\alpha, \beta)$ оператора A соответствует только один положительный собственный вектор φ_λ , отличный от θ .

Как видим, выражение отношения между положительностью и спектральными свойствами оператора, представленного в абстрактных терминах в теореме 1, потребовали трансформации ряда мыслительных средств математического анализа: *вогнутости, дифференцируемости, асимптотической близости* и др., которые обогатили теорию операторов как за счет расширения области применения теоремы Урысона, так и за счет пополнения арсенала методов использования указанных средств (доказательство теорем о неподвижной точке, обоснование линеаризации уравнений, доказательство сходимости приближенных методов и т. д.³³).

Развитие теории положительных операторов на обобщении теоремы Урысона, безусловно, не закончилось³⁴. Уже к началу 1960-х гг. мыслительные средства, составляющие ядро этой теории, были приведены в систему (в рамках воронежской математической школы во главе с Красносельским³⁵), что позволило выявить ряд новых отношений качественного характера в контексте исследования свойств решений уравнений $Au = 0$ ($Au = \lambda u$) в банаховых пространствах с конусом.

Следует отметить, что в этом направлении есть и проблемы, оставшиеся пока нерешенными. Так, второй автор настоящей статьи в свое время получил «по наследству» от своего научного руководителя Ю. В. Покорного проблему, которая тому в свою очередь досталась от Красносельского. Возможно, что и Марк Александрович унаследовал ее от Крейна. Проблема состояла в том, чтобы понять, как построить абстрактный аналог осцилляционной теории — тех теорем, которые были получены Гантмахером и Крейном в конечномерном случае, а Келлогом и Крейном — в случае интегрального оператора.

Пока что полученные в этом направлении результаты ограничиваются ситуацией, когда ядро интегрального оператора при делении на некоторую меняющую знак функцию становится осцилляционным. Такого рода ситуации

³² Позитивный спектр — это совокупность тех точек спектра, которым отвечают положительные собственные векторы.

³³ Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

³⁴ Богатов. Об истории положительных операторов... С. 115–117.

³⁵ Богатов Е. М. История отечественных школ нелинейного функционального анализа второй трети XX века // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2024. № 3. С. 102–118.

возникают при изучении многоточечных задач валле-пуссеновского типа³⁶ или разрывных задач разного рода³⁷. Однако пока что все эти продвижения не идут ни в какое сравнение ни по масштабам, ни по глубине со сдвигом «от неотрицательной функции к вектору из абстрактного конуса», который ознаменовал появление теории положительных операторов.

Выводы

Линейная теория положительных операторов начала развиваться, как и следовало ожидать, раньше, чем нелинейная (в 1907 г.), и в конечномерном варианте. Однако уже через десять лет ситуация стала выравниваться. К началу 1920-х гг. имелись два вида теорем о спектре положительных операторов, соответствующие линейной (теорема Ентча) и нелинейной (теорема Урысона) бесконечномерной ситуации. Они были доказаны абсолютно независимо и опирались на различные идеи. До начала 1950-х гг. эти линии развития не имели каких-либо пересечений. Но с появлением теории конусов в исследованиях ее основоположника (М. Г. Крейн, конец 1930-х гг.) стали применяться сначала геометрические представления (теорема Асколи — Мазура), а затем и топологические (теоремы о неподвижной точке Брауэра и Шаудера). Это привело к возможности рассмотрения нелинейных операторов в уравнении $Ax = \lambda x$, формулировке и доказательству абстрактных нелинейных аналогов теоремы Ентча³⁸ и возможности переосмысления результатов Урысона³⁹. Несмотря на то что к концу 1940-х гг. линейная теория конусов завершила начальный этап своего развития, система ее мыслительных средств оказалась недостаточно полной для решения задач нелинейного анализа. После определения линейной монотонной миноранты нелинейного положительного оператора потребовалось расширить класс линейных положительных операторов (u_0 -ограниченные операторы). Это дало возможность не только распространить результаты Урысона, полученные для частного случая, на абстрактные нелинейные операторы, «правильно» мажорируемые линейными, но и получить ряд уточнений и дополнений. Кроме того, наиболее удобная линейаризация как в спектральных, так и в бифуркационных задачах предполагала наличие производных по конусу в нуле и на бесконечности, определение которых было дано в процессе исследования нелинейных операторных уравнений в пространствах с конусом⁴⁰.

³⁶ *Покорный Ю. В.* О неклассической задаче Валле-Пуссена // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1018–1027; *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 658–670.

³⁷ *Дерр В. Я.* К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 11. С. 1861–1872; *Боровских А. В.* Условия знакорегулярности разрывных краевых задач // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 643–655.

³⁸ *Крейн, Рутман.* Линейные операторы...

³⁹ *Красносельский, Ладыженский.* Структура спектра положительных неоднородных операторов...

⁴⁰ *Красносельский.* Положительные решения операторных уравнений...

Теория положительных операторов быстро стала рабочим инструментом во многих разделах нелинейного естествознания⁴¹. Ее привлекательность базируется на возможности проведения исследования нелинейных задач «в большом», в отличие, например, от теории Ляпунова – Шмидта, в которой существенным образом используется малость параметра, по степеням которого получалось аналитическое представление решения. Эта разница возможностей наиболее отчетливо просматривается в прикладных задачах. Например, в теории установившихся волн с ростом амплитуды λ меняется характер волн. Их исследование во всем диапазоне изменения λ не может быть проведено на основе решения задачи методами теории ветвления, но возможно в рамках теории конусов⁴².

References

- Ascoli, G. (1932) Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, *Annali di matematica pura ed applicata*, vol. 10, pp. 33–81.
- Bogatov, E. M. (2019) O razvitií kachestvennykh metodov resheniia nelineinykh uravnenii i nekotorykh posledstviiakh [On the Development of Qualitative Methods for Solving Nonlinear Equations and Some Consequences], *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaia nelineinaia dinamika*, vol. 27, no. 1, pp. 96–114.
- Bogatov, E. M. (2020) Ob istorii polozhitel'nykh operatorov (1900-e – 1960-e gg.) i vklade M. A. Krasnosel'skogo [On the History of Positive Operators (1900s – 1960s) and the Contribution of M. A. Krasnoselskii], *Nauchnye vedomosti BelGU, seriia: Prikladnaia matematika. Fizika*, vol. 52, no. 2, pp. 105–127.
- Bogatov, E. M. (2024) Istoriia otechestvennykh shkol nelineinogo funktsional'nogo analiza vtoroi treti XX veka [The History of Russian Schools of Nonlinear Functional Analysis in the Second Third of the 20th Century], *Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovanie*, no. 3, pp. 102–118.
- Borovskikh, A. V. (2003) Usloviia znakovoi reguliarnosti razryvnykh kraevykh zadach [Sign Regularity Conditions for Discontinuous Boundary-Value Problems], *Matematicheskie zametki*, vol. 74, iss. 5, pp. 607–618.
- Borovskikh, A. V. (2022) O poniatii matematicheskoi gramotnosti [On the Concept of Mathematical Literacy], *Pedagogika*, vol. 86, no. 3, pp. 33–45.
- Borovskikh, A. V. (2022) O soderzhanii matematicheskogo obrazovaniia. Matematika dlia nematematikov [On the Content of Mathematical Education. Mathematics for Non-Mathematicians], *Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovanie*, no. 4, pp. 51–65.
- Borovskikh, A. V. (2024) O soderzhanii shkol'nogo matematicheskogo obrazovaniia. Ot soderzhimogo k soderzhaniiu: matematika kak sovokupnost' myslitel'nykh sredstv [On the Content of School Mathematics Education. From Contents to Content. Mathematics as a System of Mental Means], *Vestnik Moskovskogo universiteta, seriia 20: Pedagogicheskoe obrazovanie*, vol. 22, no. 2, pp. 61–82.
- Borovskikh, A. V., and Pokornyi, Iu. V. (1994) Sistemy Chebysheva – Khaara v teorii razryvnykh iader Kelloga [Chebyshev – Haar Systems in the Theory of Discontinuous Kellogg Kernels], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 49, no. 3, pp. 1–42.
- Demidovich, B. P. (1997) *Sbornik zadach i uprazhnenii po matematicheskomu analizu: uchebnoe posobie. 13-e izd. [Collection of Problems and Exercises in Mathematical Analysis: A Textbook. 13th ed.]*. Moskva: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta.

⁴¹ Крaсовский Ю. П. К теории установившихся волн немалой амплитуды // Доклады АН СССР. 1960. Т. 130. Вып. 6. С. 1237–1240.

⁴² Келлер Г. Б. Некоторые позитонные задачи, выдвигаемые нелинейной теорией генерации тепла // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Дж. Б. Келлер, С. Антман. М.: Мир, 1974. С. 129–151.

- Derr, V. Ia. (1987) K obobshchennoi zadache Valle-Pussena [On the Generalized de la Vallée Poussin Problem], *Differentsial'nye uravneniia*, vol. 23, no. 11, pp. 1861–1872.
- Gantmakher, F. R., and Krein, M. G. (1950) *Ostsilliatsionnye matritsy i iadra i malye kolebaniia mekhanicheskikh sistem*. 2-e izd. [Oscillatory Matrices and Kernels and Small Oscillations of Mechanical Systems. 2nd ed.]. Moskva and Leningrad: Gostekhteorizdat.
- Gantmakher, F. R., and Krein, M. G. (1935) Ob odnom spetsial'nom klasse determinantov v sviazi s integral'nymi iadrami Kellog'a. 2-e izd. [On a Special Class of Determinants in Connection with Kellog's Integral Kernels], *Matematicheskii sbornik*, vol. 42, iss. 4, pp. 501–508.
- Gantmakher, F. R., and Krein, M. G. (1941) *Ostsilliatsionnye matritsy i iadra i malye kolebaniia mekhanicheskikh sistem* [Oscillatory Matrices and Kernels and Small Oscillations of Mechanical Systems. 2nd ed.]. Moskva and Leningrad: Gostekhteorizdat.
- Gil'bert, D. (Hilbert, D.) (1998) *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moskva: Faktorial, vol. 2: Analiz. Fizika. Problemy Gil'berta [Analysis. Physics. Hilbert's Problems].
- Jentzsch, R. (1912) Über Integralgleichungen mit positivem Kern, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 41, pp. 235–244.
- Keller, G. B. (1974) Nekotorye pozitonnnye zadachi, vydvigaemye nelineinoi teoriei generatsii tepla [Some Positivity Problems Raised by the Nonlinear Theory of Heat Generation], in: Keller, Dz. B., and Antman, S. (Keller, J. B., and Antman, S.) (eds.) *Teoriia vetvleniia i nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniiia* [Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems]. Moskva: Mir, pp. 129–151.
- Kellogg, O. D. (1916) The Oscillation of Functions of an Orthogonal Set, *American Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 1, pp. 1–5.
- Kellogg, O. D. (1918) Interpolation Properties of Orthogonal Sets of Solutions of Differential Equations, *American Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 3, pp. 225–234.
- Kellogg, O. D. (1918) Orthogonal Function Sets Arising from Integral Equations, *American Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 2, pp. 145–154.
- Krasnosel'skii, M. A. (1962) *Polozhitel'nye resheniia operatornykh uravnenii* [Positive Solutions of Operator Equations]. Moskva: Fizmatgiz.
- Krasnosel'skii, M. A., and Ladyzhenskii, L. A. (1954) Struktura spektra polozhitel'nykh neodnorodnykh operatorov [The Structure of the Spectrum of Positive Nonhomogeneous Operators], *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, iss. 3, pp. 321–346.
- Krasnosel'skii, M. A., and Ladyzhenskii, L. A. (1959) Ob ob"eme poniatiiia u_0 -vognutogo operatora [The Scope of the Concept of a u_0 -concave Operator], *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, no. 5, pp. 112–121.
- Krasovskii, Iu. P. (1960) K teorii ustanovivshikhsia voln nemaloi amplitudy [On the Theory of Steady Waves of Considerable Amplitude], *Doklady AN SSSR*, vol. 130, iss. 6, pp. 1237–1240.
- Krein, M. G. (1937) Pro pozytyvni adytyvni funktsionaly v liniinykh normovanykh prostorakh [On Positive Additive Functionals in Linear Normed Spaces], *Soobshcheniia Khar'kovskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 14, pp. 227–237.
- Krein, M. G. (1938) Obshchie teoremy o pozitivnykh funktsionalakh [General Theorems on Positive Functionals], in: Akhiezer, N. I., and Krein, M. G. *O nekotorykh voprosakh teorii momentov* [On Some Issues of the Theory of Moments]. Khar'kov: Gosnauchtekhizdat Ukrainy, pp. 121–150.
- Krein, M. G. (1951) Idei P. L. Chebysheva i A. A. Markova v teorii predel'nykh velichin integralov i ikh dal'neishee razvitiie [Ideas of P. L. Chebyshev and A. A. Markov in the Theory of Limit Values of Integrals and Their Further Development], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 6, no. 4, pp. 3–120.
- Krein, M. G., and Rutman, M. A. (1948) Lineinye operatory, ostavliaiushchie invariantnym konus v prostranstve Banakha [Linear Operators that Leave a Cone Invariant in a Banach Space], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 3, iss. 1, no. 23, pp. 3–95.
- Markov, A. A. (1908) Rasprostranenie predel'nykh teorem ischisleniia veroiatnostei na summu velichin, svyazannykh v tsep' [Extension of the Limit Theorems of Probability Theory to a Sum of Quantities Connected in a Chain], *Zapiski Akademii nauk, seriia 8: Po Fiziko-matematicheskomu otdeleniiu*, vol. 22, no. 9, pp. 1–29.
- Mazur, S. (1933) Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, *Studia mathematica*, vol. 4, pp. 70–84.

- Perron, O. (1907) Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, *Mathematische Annalen*, vol. 64, pp. 1–76.
- Pokornyi, Iu. V. (1978) O neklassicheskoi zadache Valle-Pussena [A Nonclassical de la Vallée Poussin Problem], *Differentsial'nye uravneniia*, vol. 14, no. 6, pp. 1018–1027.
- Pokornyi, Iu. V., and Lazarev, K. P. (1987) Nekotorye ostsilliatsionnye teoremy dlia mnogochechnykh zadach [Some Oscillation Theorems for Multipoint Problems], *Differentsial'nye uravneniia*, vol. 23, no. 4, pp. 658–670.
- Riesz, F. (1930) Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires, *Atti del Congresso internazionale dei matematici, Bologna, 3–10 settembre 1928*. Bologna: Nicola Zanichelli, vol. 3, pp. 143–148.
- Rutman, M. A. (1938) Ob odnom spetsial'nom klasse vpolne nepreryvnykh operatorov [On a Special Class of Completely Continuous Operators], *Doklady AN SSSR*, vol. 18, no. 9, pp. 625–627.
- Rutman, M. A. (1940) Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cône, *Matematicheskii sbornik*, vol. 8 (50), no. 1, pp. 77–96.
- Schur, I. (1909) Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen, *Mathematische Annalen*, vol. 67, no. 3, pp. 306–339.
- Sturm, C. (1836) Sur une class d'équations a differences partielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 1, pp. 373–444.
- Uryson, P. S. (1923) Ob odnom tipe nelineinykh integral'nykh uravnenii [On One Type of Nonlinear Integral Equations], *Matematicheskii sbornik*, vol. 31, no. 2, pp. 236–255.
- Vileitner, G. (Wieleitner, H.) (1966) *Istoriia matematiki ot Dekarta do serediny XIX stoletiiia* [History of Mathematics from Descartes to the Mid-19th Century]. Moskva: Nauka.

Received: November 20, 2024.

Accepted: January 30, 2025.