ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 3, с. 30–36

ПРОБЛЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИПОТЕЧНОГО КООПЕРАТИВА

© 2007 г. А. М. Шелехов

(Москва)

Представлена модель стимулирования накопительного кооператива. Показано, что накопительный кооператив остается стабильным и может эффективно функционировать, не вырождаясь в пирамиду, только в том случае, если стартовый капитал составляет не менее 50% необходимой суммы.

Как показывают события, национальная программа “Доступное жилье” оказалась на практике по разным причинам труднореализуемой. Эту проблему пресса обсуждает постоянно, но каких-то серьезных расчетов и моделей ни в прессе, ни в правительственных документах нам не попадалось. Свое отношение к проблеме мы высказывали в статье “Средство от гангрены” (Шелехов, Лобов, 2006). По нашему мнению, успех программы зависит от того, насколько эффективно удастся задействовать средства самих граждан, и наиболее подходящий способ для этого – не банковское кредитование, а накопительный кооператив.

Накопительные кооперативы, в том числе на основе ипотеки, существуют давно, под разными названиями и в разных странах (США, Германия, Австрия, Польша, Венгрия, Чехия). По существу, это касса взаимопомощи, которая выполняет две функции: аккумулирует средства участников и предоставляет им финансовую поддержку на условиях целевых займов только на приобретение недвижимости (как готовой, так и строящейся). Кооперативы являются некоммерческими организациями, у них небольшие накладные расходы (обычно 3–5%). Они привлекательны для небогатых семей, которые накопили небольшие средства на улучшение жилищных условий, но по каким-то причинам не могут или не хотят пользоваться услугами банков. Даже в богатых странах жилищные кооператоры – значительный слой общества. Во все времена и во всех государствах кооперативы были эффективным средством решения жилищной проблемы для массы населения.

Накопительные кооперативы разного рода в России существовали до революции, в советское время, существуют они и сейчас. Значение и эффективность этого института в нынешней России следует оценивать, принимая во внимание некоторые специфические российские обстоятельства. Во-первых, процент кредитования в российских банках особенно высок, в итоге клиенту приходится выплачивать 1.5–2% стоимости жилья. Второе – инфляция. Третье – ненадежность банков. Четвертое – сложность процедуры доступа к кредиту и его оформления. Наконец, присутствие на рынке массы жуликов, в том числе строителей разного рода “пирамид”. “Пирамиды” могут существовать и в виде ипотечных кооперативов. Такие псевдокооперативы, привлекая граждан неестественно хорошими условиями, подвергают их опасности “остаться на бобах”. Из-за всего этого люди боятся вступать в договорные отношения. Цель этой статьи – *описать условия устойчивости ипотечного кооператива, позволяющие отличить настоящий кооператив от похожего на него по форме “пирамидального” псевдокооператива*. Для этого построим математическую модель простейшего кооператива.

При этом мы намеренно оставляем в стороне ряд практических вопросов, весьма важных для кооператива и его участников: взаимодействие кооператива с банками, работу кооператива со средствами участников, процесс покупки жилья (включая проблему роста цен, изменение банковского процента), оценку рынка жилья и т.п. Мы также оставляем в стороне проблему выбора стратегии приобретения жилья, полагая, что это дело личное и зависит от многих субъективных моментов. Для каждого из перечисленных процессов можно построить свою модель, что сделало бы настоящую работу более полезной в прикладном смысле. Но это совсем другая, более масштабная задача. Нами решается более узкая и, если так можно выразиться, “ментально-экономическая” задача: создать инструмент, помогающий обнаруживать “пирамиды”. Сейчас это, на наш взгляд, весьма важно.

Целесообразность участия в кооперативе определяется тем, что для его участников среднее время ожидания (так будем называть время накопления требуемой суммы) меньше времени ожидания в случае индивидуального накопления (вне кооператива). Этот эффект есть следствие того, что функция покупки является дискретной (накапливаемую сумму можно считать непрерывной функцией времени, тратится же она дискретными порциями). Например, два человека, сложив свои средства, сокращают время накопления для одного из них вдвое, следовательно, среднее время накопления будет составлять 0.75 индивидуального.

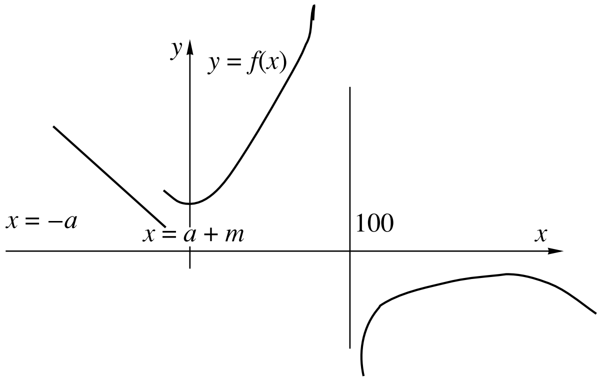

Рис. 1.

Пусть N – число граждан, образовавших кооператив (*основные участники*), и n – число граждан (*новые участники*), вступающих в кооператив в единицу времени (за единицу времени удобно принять 1 месяц, поскольку платежи производятся ежемесячно). Здесь мы делаем естественное допущение, которое упрощает первоначальные рассуждения – каждый месяц, начиная со второго, в кооператив вступает одно и то же число граждан.

Сделаем еще одно упрощающее допущение: все участники копят одну и ту же сумму (100%) и делают одинаковый первоначальный взнос – a%. Предположим далее, что каждый участник кооператива платит ежемесячный взнос m% стоимости его будущей квартиры. Наконец, пусть x% (*стартовая сумма*) – та часть стоимости квартиры, накопив которую в кассе кооператива путем уплаты ежемесячных взносов, член кооператива получает право получить ссуду в размере оставшейся части стоимости квартиры. (Словом “квартира” мы обозначаем сумму, которую в конечном итоге накопил участник с помощью кооператива. На практике все указанные параметры – m, a, x – фиксируются в *индивидуальном договоре* с каждым участником отдельно.)

Период существования кооператива естественным образом разбивается на две стадии: первую, когда его численность растет, и вторую – с момента стабилизации его численности. Мы не рассматриваем случаи, когда такое разбиение невозможно (например, если кооператив разваливался до того, как его работа стабилизировалась). Это предмет другого исследования. Наша цель – найти условия стабильности *работающего* кооператива, следовательно, мы рассматриваем только те из них, которые так или иначе сумели пройти две указанные стадии. Наша модель отражает именно такие кооперативы.

Обозначим через t время (в месяцах), через которое основной участник получает кредит. Тогда выполняется равенство

$$x = a + mt, \tag{1}$$

которое связывает основные параметры процесса. Поэтому назовем его *уравнением связи*.

В соответствии с договором через время t все N основных участников должны получить кредит. Следовательно, имеющихся в кооперативе средств (с учетом того, что каждый месяц, начиная со второго, в кооператив вступают n новых участников) должно хватить на выплату кредитов. Это дает следующее условие устойчивости на момент времени t (*первое условие баланса*):

$$N(a + mt) + n(a + m(t-1)) + n(a + m(t-2)) + \ldots + n(a + m) \geq 100N. \tag{2}$$

С учетом равенства (1) это неравенство преобразуется к виду

$$f(x) \geq N/n, \tag{3}$$

где

$$f(x) = (x - a - m)(x + a)/2m(100 - x). \tag{4}$$

Графиком функции $y = f(x)$ будет гипербола с вертикальной асимптотой $x = 100$ (рис. 1). Функция $f(x)$ имеет локальные экстремумы в точках x_1 и x_2, определяемых уравнением

$$x^2 - 200x + a^2 + am + 100m = 0. \tag{5}$$

Практически, параметры a и m меняются в следующих пределах: $0 \leq a \leq 20$, $1 \leq m \leq 5$, так что наименьший корень уравнения (5) находится приближенно в интервале (0.5; 5), а наибольший – в интервале (195; 199.5).

Условию задачи отвечает интервал $a + m < x < 100$. Как видно из графика, на этом интервале функция $f(x)$ монотонно возрастает.

Конечно, участникам кооператива хотелось бы, чтобы величина x была как можно меньше. Но если x уменьшается, то $f(x)$ также уменьшается, верхняя граница отношения N/n возрастает, а так как $n \geq N/f(x)$, то и нижняя граница для n возрастает. Но величина n не может быть слишком большой, во-первых, потому, что в первые месяцы после образования кооператива приток новых членов будет незначительным (кто хотел, тот уже вступил). Если же в какой-то момент n начинает расти, то далее приток новых членов должен будет увеличиваться еще больше, чтобы обеспечить возможность финансирования вступивших ранее. Этот процесс быстро приведет к исчерпанию контингента желающих, т.е. в итоге мы получим "пирамиду": начиная с какого-то момента приток средств в кооператив резко уменьшится, и оставшиеся члены кооператива смогут рассчитывать только на собственные взносы и средства от погашения ссуды теми членами кооператива, которые ссуду уже получили, но еще продолжают за нее рассчитываться. В пределе (когда число вступающих стремится к нулю) среднее время накопления в кооперативе станет равно времени собственного накопления, т.е. *участие в кооперативе потеряет смысл*. (Этим "кооперативная" пирамида отличается от "классической", в которой участник теряет все. Поскольку кооператив не является коммерческим предприятием, то ее участник в случае возникновения эффекта "пирамидальности" теряет только время.)

С другой стороны, число n не может быть слишком маленьким, иначе x станет слишком большим, и тогда участие в кооперативе тоже потеряет смысл. Лучше всего, чтобы поток вступающих в кооператив был более или менее равномерным и постоянным. В действительности число n определяется местными условиями: распределением населения по уровню доходов, потребностью в жилье, возможностями строителей и т.п.

Возьмем, например, $a = 10$, $m = 2$ (тестовые параметры), тогда при $x = 20$ получаем $n = 4/3N$, т.е. число вступающих в кооператив каждый месяц должно на треть превышать первоначальное число участников! Ясно, что такая ситуация далека от реальности. При $x = 50$ получим $N/n = 0.088 \approx 0.1$, т.е. вполне разумный результат, близкий к практике.

Рассмотрим ситуацию в момент t_1, когда основные N участников полностью выплатили всю сумму и уходят из кооператива (*момент стабилизации*). Величина t_1 определяется из соотношения

$$100 = a + mt_1. \tag{6}$$

Соответствующее условие устойчивости (*последнее условие баланса*) имеет вид:

$$(a + m(t_1 - 1) + \ldots + n(a + m)) \geq 100n(t_1 - t), \tag{7}$$

где величина t имеет тот же смысл, что и выше (см. (1)). Пользуясь соотношением (6), после преобразований получим неравенство

$$x \geq 50 + m/2 + a(a + m)/200 \equiv x_0. \tag{8}$$

Как видно из неравенства (8), величина x не может быть меньше 50%. При тестовых параметрах получаем $x \geq 51.6\%$.

Рассмотрим теперь ситуацию в момент времени $t + k$, $1 \leq k \leq t_1 - t$. Поскольку к этому моменту кредит получили основные N участников и nk новых, то условие баланса имеет следующий вид:

$$N(a + m(t + k)) + n(a + m(t + k - 1)) + \ldots + n(a + m) \geq 100N + 100nk. \tag{9}$$

После преобразований с учетом соотношения (1) придем к неравенству

$$f(x, k) \geq N/n, \tag{10}$$

которое должно выполняться при любом k и где

$$f(x, k) = ((x + km)^2 - m(x + km) - a^2 - am - 200km)/2m(100 - x - km). \tag{11}$$

Неравенство (9) назовем *общим условием баланса*. При разных k из него получаются условия баланса для соответствующего этапа. В частности, при $k = 0$ из неравенства (10) получается неравенство (2), при $k = t_1 - t$ – неравенство (7). По существу, *условие* (11) *и есть условие устойчивости кооператива на первой стадии его развития*.

Согласно неравенству (10), величина $y = f(x, k)$ является верхней границей отношения N/n и зависит от двух переменных: *стартовой суммы* x и *номера этапа* k. Функция $y = f(x, k)$, по существу, есть основа рассматриваемой модели, поэтому назовем ее *модельной функцией*. Соотношение (11) можно переписать в виде $F(x, y, k) = 0$, где левая часть представляет собой многочлен второй степени относительно переменных x, y и k. Следовательно, график функции $y = f(x, k)$ есть некоторая поверхность второго порядка, обозначим ее V. Несложно доказать, что V – гиперболический параболоид (седлообразная поверхность).

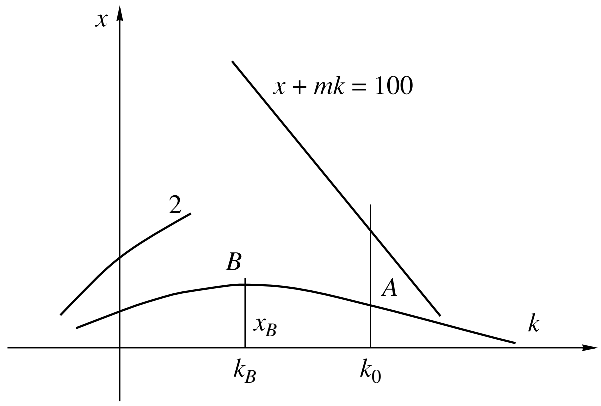

Рис. 2.

Разным фиксированным значениям k отвечают сечения поверхности V координатными плоскостями k = const, обозначим их l_k. Кривые l_k аналогичны кривой l_1, изображенной на рис. 1. При увеличении k сечение будет сдвигаться влево вниз.

Сечения поверхности V горизонтальными плоскостями $y = c$ есть параболы

$$y = c, \quad (x + km)^2 - m(x + km) - a^2 - am - 200km - 2cm(100 - x - km) = 0. \tag{12}$$

Второе уравнение определяет в пространстве переменных x, k, y пучок параболических цилиндров (для каждого значения c получается свой цилиндр), образующие которых параллельны оси y. Базисные поверхности пучка (цилиндр и плоскость), задаваемые уравнениями

$$(x + km)^2 - m(x + km) - a^2 - am - 200km = 0, \quad 100 - x - km = 0, \tag{13}$$

пересекаются, как легко вычислить, по вертикальной прямой

$$k = 50/m - 0.5 - (a^2 + am)/200m \equiv k_0, \quad x = x_0, \tag{14}$$

где x_0 задается равенством (8). Эта прямая (обозначим ее L) принадлежит поверхности V, ее пересекают все параболы (12).

Спроектируем эти параболы, например, на координатную плоскость $y = 0$, тогда получим пучок парабол, определяемых вторым уравнением (12). Все параболы пучка проходят через точку $A(k_0, x_0)$ пересечения прямой L и плоскости $y = 0$. Поскольку прямая, определяемая вторым уравнением (13), пересекает все параболы пучка только в одной точке A, то отсюда получается, что оси симметрии всех парабол пучка параллельны этой прямой. На рис. 2 изображена парабола, соответствующая тестовым значениям $a = 10$, $m = 2$, $n = 10$.

Вернемся к условию баланса (9) или (10). Полагая, как и выше, $N/n = c$, перепишем (10) в виде

$$(x + km)^2 - m(x + km) - a^2 - am - 200km - 2cm(100 - x - km) \geq 0. \tag{15}$$

Это условие выделяет часть плоскости выше соответствующей параболы (рис. 2). Кроме того, переменные x и k связаны неравенством $k \leq t_1 - t$, которое с учетом равенств (1) и (6) дает $x + km \leq 100$. Это соотношение выделяет часть плоскости ниже прямой $x + km - 100 = 0$. Так как эта прямая пересекает параболу в точке $k = k_0$, то интервал допустимых значений переменной k будет $0 \leq k \leq k_0$.

Для каждого значения $k = b$ (из допустимого интервала) множество допустимых значений x представляет собой ту часть вертикальной прямой $k = b$, которая расположена выше параболы, причем наименьшее из этих значений соответствует точке, лежащей на параболе. Но по смыслу задачи величина x (стартовая сумма) должна быть на каждом этапе, то есть для всех k одна и та же. Однако желательно, чтобы она была наименьшей из всех возможных. Очевидно, этим двум условиям отвечает единственная точка – точка B на рис. 2, в которой функция $x = x(k)$ достигает максимума (при условии, что точка A находится левее точки B, как на рис. 2, – это будет доказано ниже).

Для краткости вычислений введем новую переменную $z = x + km$, тогда в точке экстремума B будет $dx/dk = 0$ или $dz/dk = m$. С учетом нового обозначения уравнение параболы (второе уравнение (12)) примет вид

$$z^2 - mz - a^2 - am - 200km - 2cm(100 - z) = 0. \qquad (16)$$

Дифференцируя это уравнение с учетом условия стационарности, получим

$$2zm - m^2 - 200m + 2cm^2 = 0,$$

откуда

$$z_B = 100 + 0.5m - cm. \qquad (17)$$

Подставляя в (16), находим координату k точки B:

$$k_B = 50/m - c - (a^2 + am)/200m - (m/200)(c - 0.5)^2. \qquad (18)$$

Теперь покажем, что точка A действительно находится правее точки B. Для этого вычислим разность $k_0 - k_B$: $k_0 - k_B = (m/200)(c - 0.5)(c - 0.5 + 200/m)$. Так как величина c заведомо больше единицы (иначе каждый месяц в кооператив вступает в 2 раза больше людей, чем было вначале!), то $c - 0.5 > 0$. Поскольку m мало (не более 5%, см. выше), вторая скобка положительна при любом c. Следовательно, правая часть последнего равенства всегда положительна, т.е. $k_0 > k_B$. Значит, точка A находится правее точки B, и минимальное значение стартовой суммы будет равно величине x_B. Пользуясь предыдущими формулами, находим:

$$x_B = y_B - mk_B = 50 + m/2 + a(a + m)/200 + (m^2/200)(c - 0.5)^2 = x_0 + (m^2/200)(c - 0.5)^2. \qquad (19)$$

Как видно, x_B больше x_0 на величину $(m^2/200)(c - 0.5)^2$. При тестовых значениях ($m = 2$, $a = 10$, $c = 10$) получаем $x_B = 53.4$.

После того как основные N участников закончили свои платежи и вышли из кооператива, в нем осталось

$$N_1 = (t_1 - 1)n \qquad (20)$$

участников, из которых $(t - 1)n$ уже получили ссуду, а $(t_1 - t)n$ еще нет. В следующий момент времени ссуду должны получить очередные n участников. Сколько новых участников (обозначим их количество n_1) должно появиться, чтобы на эту ссуду хватило средств? Условие баланса в этом случае имеет вид:

$$N_1m + n_1(a + m) \ge 100n. \qquad (21)$$

Подставляя сюда $N_1 = (t_1 - 1)n$ и используя соотношение (6), придем к неравенству $n_1 \ge n$, т.е. минимальное число новых участников, необходимое для устойчивого существования кооператива, равно n. Но при этом значении число членов кооператива будет оставаться постоянным (каждый месяц n членов будет прибывать и столько же выбывать). Итак, возможно устойчивое существование кооператива с постоянным числом членов N_1 при условии, что число новых членов определяется соотношением (17), а величина t_1 удовлетворяет равенству (6). При тестовых значениях $t_1 = 45$, $n = 10$, $N_1 = 440$ время ожидания ссуды при найденном выше оптимальном значении стартовой суммы $x = 53.4\%$ будет $(53.4 - 10)/2 \approx 22$ мес.

На практике, по-видимому, основные N членов кооператива получают ссуду не одновременно, а в порядке некоторой очередности. Покажем, что это позволяет уменьшить стартовую сумму x. Предположим, что в момент t ссуда выдается не всем N основным членам кооператива, а только половине. Оставшиеся, как и раньше, получают ссуду группами по n человек в последующие моменты времени, начиная с момента $t + 1$. Тогда условие баланса на момент времени $t + k$ имеет вид, аналогичный (9), только в правой части вместо числа N появится число $N/2$:

$$N(a + m(t + k)) + n(a + m(t + k - 1)) + \ldots + n(a + m) \ge 100N/2 + 100nk. \qquad (22)$$

Обозначив, как и выше, $N/n = c$, после преобразований придем к неравенству

$$(x + km)^2 - m(x + km) - a^2 - am - 200km - 2cm(50 - x - km) \ge 0, \qquad (23)$$

которое только одним слагаемым отличается от неравенства (15) (50 вместо 100). Рассуждая таким же образом, найдем, что стационарное значение y_B будет то же самое (см. (17)), а стационарные значения k_B и x_B получатся, соответственно

$$k_B = 50/m - 0.5c - (a^2 + am)/200m - (m/200)(c - 0.5)^2, \tag{24}$$

$$x_B = 50 + 0.5m - 0.5cm + a(a + m)/200 + (m^2/200)(c - 0.5)^2. \tag{25}$$

Сравнивая с (19), видим, что новое значение x_B получается меньше на величину $0.5cm$, что мы и хотели показать. В модельном примере получается $x_B = 43.4$ (вместо 53.4 в первом варианте).

Чтобы понять ситуацию в общем случае, сравним неравенства (15) и (23). Левая часть второго больше левой части первого на величину $100cm$. Следовательно, соответствующая парабола во втором случае получается из параболы, изображенной на рис. 2, сдвигом последней вниз вдоль оси симметрии на величину $0.5c$ (ось симметрии, как было отмечено ниже, параллельна прямой $x + km - 100 = 0$). Такая же картина будет и в общем случае: заменяя в правой части неравенства (15) величину N на меньшее значение, мы будем сдвигать параболу, изображенную на рис. 2, вправо вниз, в результате чего экстремальное значение x_B будет уменьшаться.

Анализируя форму параболы, изображенной на рис. 2, мы можем ответить и на другой вопрос: что произойдет в случае, если в каждый момент времени, начиная с момента t, будут получать ссуду не n, а, например, $2n$ членов кооператива? В этом случае в уравнении параболы (16) слагаемое $-200km$ заменится на слагаемое $-400km$, в результате чего форма параболы изменится – ее ветви распрямятся, то есть приблизятся к прямой, перпендикулярной оси симметрии (на рис. 2 такая парабола отмечена цифрой 2). Ясно, что в этом случае точка экстремума B переместится вверх, то есть величина x_B увеличится.

Итак, стартовую сумму x можно уменьшить за счет уменьшения числа ссуд, выплачиваемых в каждый момент времени. Но тогда, понятно, возрастает срок ожидания ссуды. Например, уменьшив в тестовом примере вдвое число участников, получивших ссуду в момент времени t, и уменьшив, таким образом, стартовую сумму с 53.4 до 43.4, мы увеличили срок ожидания ссуды для оставшихся $0.5N$ основных участников. Так как в модельном примере $c = 10$ (каждый месяц добавляется новых $n = 0.1N$ участников), то оставшиеся $0.5N$ основных участников получат ссуду в течение пяти месяцев (по n в месяц).

Разумеется, величину x_B можно менять за счет величин a и m, но, как видно из формул (19) и (25), влияние этих параметров несущественно.

Наконец, легко избавиться от условия, что все участники покупают жилье одинаковой стоимости. Пусть стоимость жилья разная, но ежемесячный платеж каждого участника составляет одну и ту же долю стоимости жилья. Тогда все участники будут выплачивать полную стоимость своего жилья одно и то же время, т.е. все участники будут состоять в кооперативе одно и то же время. Следовательно, никто из них преимущества перед другими не получит. Преимущество по времени может возникнуть только за счет величины вступительного взноса, но оно не является несправедливым.

На практике условия для каждого участника могут быть различными, поскольку они определяются рамками индивидуального договора. Еще раз подчеркнем, что модель построена не с целью усовершенствовать практическую деятельность кооператива (хотя при известных условиях она годится и для этого). Значение построенной модели в ином: она доказывает, что *кооператив способен устойчиво и эффективно функционировать только в случае, если стартовая сумма близка к 50%, т.е. участник кооператива получает ссуду, накопив примерно половину требуемой суммы. При этом условии кооператив не вырождается в “пирамиду”*. Напомним значения параметров, которые мы считаем близкими к реальности и которыми мы тестировали задачу. Первоначальный взнос a = 10–20%; ежемесячный платеж m – не более 5%; стартовая сумма x – не более 40–45%.

Мы рассмотрели простейшую модель при условии, что каждый месяц в кооператив вступает одинаковое число новых участников. На практике оно различно, но с большой степенью точности поток новых участников можно считать пуассоновским с математическим ожиданием n и, соответственно, квадратичным отклонением $S = n^{1/2}$ (в модельном примере $n = 10$, $S \approx 3$). Это дает возможность построить адекватную вероятностную модель кооператива. При этом очевидно, что и в вероятностной модели основные выводы останутся прежними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Шелехов А.М., Лобов С.С. (2006): Средство от гангрены // *Российская Федерация сегодня*. № 16. Август.

Поступила в редакцию
19.04.2006 г.

About Stable Conditions for Mortgage Cooperative Society

A. M. Shelekhov

The cooperative mortgage simulation model has been generated. It has been proved that a cooperative society is capable of stable and efficient functioning only if the start-up capital is about 50%, i.e. the member of a cooperative gets the loan covering half of the amount needed. In this case, a cooperative society does not degenerate into the economic "bubble" (pyramid).