ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2007, том 43, № 3, с. 127–132

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

СЕДЛОВОЙ МЕТОД, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ НЕТОЧНЫЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ*

© 2007 г. Е. Г. Гольштейн

(Москва)

Описан метод оракульного типа отыскания седловой точки выпукло-вогнутой липшицевой функции при наличии ошибок в откликах оракула. Установлены требования к ошибкам оракула. При соблюдении этих требований метод позволяет найти ε-седловую точку исследуемой функции при фиксированном $\varepsilon > 0$. Получена оценка сверху для числа итераций, необходимых для вычисления ε-седловой точки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2001) был предложен итеративный метод отыскания седловой точки выпукло-вогнутой функции, эффективное множество которой содержится в многограннике. Предполагалось, что исследуемая функция задается с помощью некоторого вспомогательного алгоритма – оракула. При каждом обращении к оракулу вычисляется определенная локальная характеристика функции, которая используется в процессе поиска седловой точки. Анализ сходимости метода, содержащийся в (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2001), опирался на допущение о том, что все отклики оракула не содержат ошибок. Вместе с тем, во многих случаях оракул, являясь численным алгоритмом, работает с ошибками, величина которых зависит от времени использования соответствующего алгоритма. Исследуем поведение метода отыскания седловой точки функции, локальные характеристики которой содержат ошибки. Начнем с необходимых обозначений.

Пусть G_x и G_y – выпуклые компакты, расположенные в конечномерных евклидовых пространствах E_x и E_y, соответственно, и имеющие непустые внутренности, $G = G_x \times G_y$; $M_x \subset E_x$ и $M_y \subset E_y$ – выпуклые многогранники, содержащие, соответственно, G_x и G_y, $M = M_x \times M_y$. Рассмотрим функцию $f(z) = f(x, y)$, $z = (x, y)$, определенную конечными значениями на $G \subset M$ и являющуюся выпукло-вогнутой на G, т.е. выпуклой относительно $x \in G_x$ при любом фиксированном $y \in G_y$ и вогнутой относительно $y \in G_y$ при любом фиксированном $x \in G_x$. Кроме того, допустим, что функция f удовлетворяет на G условию Липшица с постоянной L.

Сделанные предположения обеспечивают наличие у функции f седловой точки и субдифференцируемость (супердифференцируемость) функции f по $x(y)$ в каждой точке $z^0 = (x^0, y^0) \in G$, т.е. непустоту субдифференциала $\partial_x f(x^0, y^0)$ (супердифференциала $\partial_y f(x^0, y^0)$) функции f в точке (x^0, y^0) относительно $x(y)$. При этом, если $z^0 \in \operatorname{int} G$, $l_x \in \partial_x f(x^0, y^0)$, $l_y \in \partial_y f(x^0, y^0)$, то $(\|l_x\|^2 + \|l_y\|^2)^{1/2} \le L$.

Выпукло-вогнутая функция f задается при помощи некоторого вспомогательного алгоритма (оракула). Действие оракула состоит в следующем. Для произвольной точки $z^0 \in M$ он, прежде всего, выясняет, принадлежит ли данная точка внутренности множества G. Если $z^0 \in \operatorname{int} G$, то оракул вычисляет приближенное значение $\tilde{l}_x$ некоторого субградиента $l_x \in \partial_x f(z^0)$ и приближенное значение $\tilde{l}_y$ некоторого суперградиента $l_y \in \partial_y f(z^0)$. Если же $z^0 \notin \operatorname{int} G$, то оракул находит с некоторой ошибкой гиперплоскость, проходящую через точку z^0 и содержащую множество G в своем нижнем полупространстве, т.е. приближенное значение $\tilde{a}$, $\|\tilde{a}\| = 1$ такого единичного вектора a, что $\max_{z \in G}(a, z - z^0) \le 0$.

Проанализируем сходимость итеративного метода, описанного в (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2001) для случая, когда используются приближенные отклики оракула $(\tilde{l}_x, \tilde{l}_y, \tilde{a})$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00491).

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Метод отыскания седловой точки выпукло-вогнутой функции f на множестве G зависит от параметра λ, выбираемого из интервала (0, 1), и реализуется в виде серии однотипных итераций. Перед началом итерации $k \geq 2$ считаются известными уже найденные точки $z_i \in M$, $1 \leq i \leq k-1$, причем за z_1 может быть принята любая точка многогранника M. На каждой итерации метода (исключая, быть может, последнюю итерацию) происходит одно обращение к оракулу. В результате, если точка $z_i \in \operatorname{int}G$, то оракул выдает приближенное значение $\tilde{l}_i = (\tilde{l}_{ix} - \tilde{l}_{iy})$ вектора $l_i = (l_{ix}, -l_{iy})$, где $l_{ix} \in \partial_x f(z_i)$, $l_{iy} \in \partial_y f(z_i)$, причем $\|\tilde{l}_i - l_i\| \leq \delta$. Если же $z_i \notin \operatorname{int}G$, то оракул выдает приближенное значение $\tilde{a}_i$, $\|\tilde{a}_i\| = 1$, единичного вектора a_i, удовлетворяющего условию $\max_{z \in G}\langle a_i, z - z_i\rangle \leq 0$, причем $\|\tilde{a}_i - a_i\| \leq \delta$. Неотрицательное число δ определяет гарантированную точность работы оракула.

Разобьем множество $I(k) = \{1, \ldots, k-1\}$ номеров итераций, предшествующих итерации k, на два непересекающихся подмножества $I_1(k)$ и $I_2(k)$, положив

$$I_1(k) = \{i \in I(k)\colon z_i \in \operatorname{int}G\}, \quad I_2(k) = \{i \in I(k)\colon z_i \notin \operatorname{int}G\}.$$

Используя информацию, накопленную до начала итерации k, введем задачу линейного программирования $\mathcal{A}_k$ с переменными z и t:

$$\begin{gathered} t \longrightarrow \max, \\ \langle \tilde{l}_i, z_i - z\rangle \geq \tilde{n}_i t, \quad i \in I_1(k), \\ \langle \tilde{a}_i, z_i - z\rangle \geq t, \quad i \in I_2(k), \\ z \in M, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\tilde{n}_i = \|\tilde{l}_i\|$.

Итерация k начинается с решения задачи $\mathcal{A}_k$ и двойственной задачи $\tilde{\mathcal{A}}_k$. Пусть Δ_k – максимальное значение линейной формы задачи $\mathcal{A}_k$ (ниже будет показана положительность этого числа), а $\mu_i \geq 0$, $i \in I(k)$ – компоненты оптимального плана задачи $\tilde{\mathcal{A}}_k$.

Если $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i > 0$ и при этом $\Delta_k \leq \varepsilon_1$, где положительное число ε_1 выбирается заранее, то итерация k заканчивается и является последней, а в качестве приближенного значения искомой седловой точки принимается точка $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$. В противном случае итерация k продолжается.

Введем в пространстве $E_z = E_x \times E_y$ выпуклый многогранник $M_k(t)$, определяемый ограничениями задачи (1) на переменную z при фиксированном значении $t \leq \Delta_k$. Дальнейшее течение итерации k связано с построением очередной точки z_k, в качестве которой принимается решение задачи квадратичного программирования

$$\|z - z_{k-1}\|^2 \longrightarrow \min, \quad z \in M_k(\lambda\Delta_k), \tag{2}$$

где $\lambda \in (0, 1)$ – параметр метода. Таким образом, z_k является проекцией точки z_{k-1} на многогранник $M_k(\lambda\Delta_k)$. После отыскания z_k происходит обращение к оракулу. Если $z_k \in \operatorname{int}G$ и сообщенный оракулом вектор $\tilde{l}_k$ удовлетворяет условию $\tilde{n}_k = \|\tilde{l}_k\| \leq \varepsilon_2$, где положительное число ε_2 выбирается заранее, то итерация k является последней, а в качестве приближенного значения седловой точки принимается точка $z_k^* = z_k$. В противном случае осуществляется переход к итерации $k+1$.

3. АНАЛИЗ МЕТОДА

Близость произвольной точки $z = (x, y) \in G$ к седловому множеству Z^* функции $f(z)$ на множестве G будем оценивать, как и в (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2001), неотрицательной величиной

$$\Delta(z) = \max_{z' = (x', y') \in G} [f(x, y') - f(x', y)], \tag{3}$$

которая обнуляется лишь в точках Z^*. Мера близости (3) является обобщением оценки по функционалу, используемой в задачах оптимизации.

Прежде чем приступить к обоснованию сходимости метода, описанного в разд. 2, убедимся в положительности Δ_k – максимального значения линейной формы задачи (1) при любом $k \geq 2$. Очевидно, что для этого достаточно установить непустоту внутренности многогранника $M_k(0)$, определяемого системой ограничений задачи (1) при $t = 0$. Последнее можно доказать, используя индукцию по k. Действительно, непустота $\operatorname{int}M_2(0)$ вытекает из того, что $\operatorname{int}G \neq \varnothing$. Если допустить непустоту $M_k(0)$, то $\Delta_k > 0$ и, следовательно, $M_k(\lambda\Delta_k) \subset \operatorname{int}M_k(0)$, а значит, точка z_k, являясь проекцией точки z_{k-1} на $M_k(\lambda\Delta_k)$, оказывается внутренней точкой многогранника $M_k(0)$. Многогранник $M_{k+1}(0)$ представляет собой пересечение $M_k(0)$ и полупространства, граничная гиперплоскость которого проходит через точку z_k. Поэтому непустота $\operatorname{int}M_{k+1}(0)$ – следствие того, что $\operatorname{int}M_k(0) \neq \varnothing$, а $z_k \in \operatorname{int}M_k(0)$.

Анализ описанного в разд. 2 метода начнем с оценки близости точки z_k^*, вырабатываемой методом на итерации k, в зависимости от максимального значения Δ_k линейной формы задачи $\mathscr{A}_k$ и величины $\delta \geq 0$, характеризующей точность работы оракула.

Лемма 1. *Предположим, что множество G содержит шар радиуса $r > 0$. Если d – диаметр многогранника M, а величины Δ_k и δ настолько малы, что*

$$\Delta_k + d\delta < r, \tag{4}$$

то множество $I_1(k) \neq \varnothing$ и $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i > 0$, причем

$$\Delta(z_k^*) \leq (L+1)(\Delta_k + d\delta)d/r, \tag{5}$$

где $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$, L – постоянная Липшица функции f.

Доказательство. Если, как ранее было отмечено, $\mu_i \geq 0$, $i \in I(k)$, – компоненты оптимального плана задачи $\tilde{\mathscr{A}}_k$, то из теории линейного программирования следует, что, во-первых,

$$\sum_{i \in I_1(k)} \tilde{n}_i \mu_i + \sum_{i \in I_2(k)} \mu_i = 1, \tag{6}$$

а во-вторых, при любом $z \in M$

$$F_k(z) = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{l}_i, z_i - z \rangle + \sum_{i \in I_2(k)} \mu_i \langle \tilde{a}_i, z_i - z \rangle \leq \Delta_k. \tag{7}$$

Введем множество $G(\alpha)$, состоящее из точек, содержащихся в G вместе со своей α-окрестностью, $\alpha > 0$. В силу предположений леммы 1, множество $G(\alpha) \neq \varnothing$ при любом $\alpha \leq r$.

Если точка $z' \in G(\alpha)$, $0 < \alpha \leq r$, то $\langle a_i, z_i - z' \rangle \geq \alpha$, $i \in I_2(k)$, где $\|a_i - \tilde{a}_i\| \leq \delta$. Следовательно,

$$\langle \tilde{a}_i, z_i - z' \rangle \geq \alpha - d\delta, \quad i \in I_2(k), \tag{8}$$

для любой точки $z' \in G(\alpha)$. Из (6)–(8) вытекает, что неравенство

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{l}_i, z_i - z' \rangle \leq \Delta_k - (1 - \gamma_k)(\alpha - d\delta) \tag{9}$$

верно для любой точки $z' \in G(\alpha)$, $0 < \alpha \leq r$, где $\gamma_k = \sum_{i \in I_1(k)} \tilde{n}\, \mu_i$.

Пусть z^0 – центр шара радиуса r, содержащегося в G. Тогда из (9) при $\alpha = r$ с учетом условия (4) получаем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{l}_i, z_i - z^0 \rangle < \gamma_k (r - d\delta). \tag{10}$$

Если допустить, что $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i = 0$, то $\gamma_k = 0$ и неравенство (10) неверно. Следовательно, требование (4) влечет за собой положительность $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$ и, в частности, непустоту множества $I_1(k)$.

Применим теперь (9) для $\alpha = \Delta_k + d\delta$. Тогда получаем, что для любой точки $z' \in G(\Delta_k + d\delta)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{l}_i, z_i - z' \rangle \le \gamma_k \Delta_k. \tag{11}$$

Вектор $\tilde{l}_i$ является приближенным значением вектора $l_i = (l_{ix}, -l_{iy})$, где $l_{ix} \in \partial_x f(z_i)$, $l_{iy} \in \partial_y f(z_i)$, причем

$$\|\tilde{l}_i - l_i\| \le \delta, \quad i \in I_1(k), \tag{12}$$

поэтому $\tilde{n}_i = \|\tilde{l}_i\| \le \|l_i\| + \delta \le L + \delta$. Учитывая это и неравенство (11), имеем

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \langle \tilde{l}_i, z_i - z' \rangle / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \le (L + \delta)\Delta_k \tag{13}$$

для любой точки $z' \in G(\Delta_k + d\delta)$. Из (12) и (13) вытекает, что

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i (\langle l_{ix}, x_i - x' \rangle - \langle l_{iy}, y_i - y' \rangle) / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \le (L + \delta)\Delta_k + d\delta, \tag{14}$$

если $z' = (x', y') \in G(\Delta_k + d\delta)$.

Установим оценку сверху для левой части (14) при любом $z' \in G$. Пусть $z \in G$, z^0 – центр шара радиуса r, содержащегося в G. Как нетрудно проверить, точка $z' = z(1 - (\Delta_k + d\delta)/r) + z^0(\Delta_k + d\delta)/r \in$ $\in G(\Delta_k + d\delta)$. Следовательно, для нее справедлива оценка (14). Но $z' - z = ((\Delta_k + d\delta)/r)(z^0 - z)$, поэтому

$$\|z' - z\| \le \frac{\Delta_k + d\delta}{r}(d - r). \tag{15}$$

Из (14) и (15) с учетом того, что $\|(l_{ix}, -l_{iy})\| \le L$, для любой точки $z = (x, y) \in G$ получаем оценку

$$\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i (\langle l_{ix}, x_i - x \rangle - \langle l_{iy}, x_i - x \rangle) / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \le (L + \delta)\Delta_k + d\delta + L\frac{\Delta_k + d\delta}{r}(d - r). \tag{16}$$

Заметим, что $\delta < r/d < 1$ в силу положительности Δ_k и требования (4). Поэтому за счет незначительного огрубления оценки (16) имеем

$$\sum_{\in I_1(k)} \mu_i (\langle l_{ix}, x_i - x \rangle - \langle l_{iy}, y_i - y \rangle) / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i \le \frac{(L + 1)(\Delta_k + d\delta)d}{r} \tag{17}$$

где $z = (x, y)$ – любая точка множества G.

Оценим теперь уклонение $\Delta(z_k^*)$ точки $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$ от седлового множества функции f, определенной на множестве G. Имеем с учетом выпукло-вогнутости функции f

$$\Delta(z_k^*) = \max_{z = (x, y) \in G} [f(x_k^*, y) - f(x, y_k^*)] \le \max_{z = (x, y) \in G} \frac{\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i (f(x_i, y) - f(x, y_i))}{\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i} \le$$

$$\le \max_{z = (x, y) \in G} \frac{\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i (\langle l_{ix}, x_i - x \rangle - \langle l_{iy}, y_i - y \rangle)}{\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i}. \tag{18}$$

Искомая оценка (5) следует из (17) и (18).

Согласно оценке (5), близость точки z_k^* к седловому множеству зависит от величин $\delta \ge 0$ и $\Delta_k > 0$. Число δ определяется точностью работы оракула. Что же касается Δ_k, то, как следует из приводимого ниже утверждения, эта величина стремится к нулю с ростом числа итераций k обратно пропорционально $k^{1/2}$.

Лемма 2. *Если* $\tilde{n}_i > 0, i \in I_1(k)$, *то*

$$\Delta_k \le \frac{d}{\lambda(1-\lambda^2)^{0.5}} k^{-0.5}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

где d *– диаметр многогранника* M, *а* $\lambda \in (0.1)$ *– параметр метода.*

Лемма 2 является частным случаем более общего утверждения из (Бэр, Гольштейн, Соколов, 2000, лемма 4) при $Q = M$ и $P^k = \{z \in E: \langle b_i, z\rangle + \beta_i \le 0, 1 \le i \le k-1\}$, где

$$b_i = \begin{cases} \tilde{l}_i/\tilde{n}_i, & \text{если} \quad z_i \in \operatorname{int} G, \\ \tilde{a}_i, & \text{если} \quad z_i \notin \operatorname{int} G; \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} -\langle \tilde{l}_i, z_i\rangle, & \text{если} \quad z_i \in \operatorname{int} G, \\ 0, & \text{если} \quad z_i \notin \operatorname{int} G. \end{cases}$$

Леммы 1 и 2 позволяют провести анализ сходимости метода отыскания седловой точки, описанного в разд. 2.

Пусть ε – произвольное неотрицательное число. Точку $z \in G$, для которой $\Delta(z) \le \varepsilon$, где $\Delta(z)$ определено соотношением (3), условимся называть ε-седловой точкой функции f на G. Любая ε-седловая точка при $\varepsilon = 0$ является седловой точкой. Как показывают приводимые ниже рассуждения, при определенных соотношениях между $\varepsilon > 0$ и величиной $\delta \ge 0$, характеризующей точность работы оракула, метод из разд. 2 дает возможность вычислить ε-седловую точку f на G, причем необходимое для этого число итераций метода допускает оценку, зависящую от ε и δ.

Начнем с рассмотрения наиболее типичной ситуации, когда заранее выбранное положительное число ε удовлетворяет требованию

$$\varepsilon < Ld. \tag{20}$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ точность δ работы оракула естественно считать настолько высокой, чтобы за счет уменьшения $\Delta_k > 0$ правую часть оценки (5) можно было бы сделать меньшей, чем ε. Очевидно, что это эквивалентно условию

$$(L+1)d^2 r^{-1}\delta < \varepsilon. \tag{21}$$

При описании метода отыскания седловой точки были введены два положительных числа ε_1 и ε_2, при помощи которых фиксировалась последняя итерация. Сейчас мы определим эти параметры в зависимости от ε и δ. Положим $\varepsilon_1 = r(L+1)^{-1}d^{-1}\varepsilon - d\delta$, $\varepsilon_1 > 0$ согласно (21). Пусть

$$\Delta_k \le \varepsilon_1. \tag{22}$$

Из (20) и (22) следует (4). Поэтому согласно лемме 1 $\sum_{i \in I_1(k)} \mu_i > 0$ и в силу (22) может быть вычислена точка $z_k^* = \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i z_i / \sum_{i \in I_1(k)} \mu_i$. Из (22) вытекает, что $(L+1)dr^{-1}(\Delta_k + d\delta) \le \varepsilon$. Оценка (5) леммы 1 указывает на то, что точка $z_k^* \in G$ является ε-седловой точкой функции f на G. Положим $\varepsilon_2 = d^{-1}\varepsilon - \delta$. Заметим, что неравенство (21) обеспечивает положительность ε_2. Если $z_k = (x_k, y_k) \in \operatorname{int} G$, причем $\tilde{n}_k \le \varepsilon_2$, то $n_k \le \varepsilon_2 + \delta = d^{-1}\varepsilon$ и с учетом выпукло-вогнутости функции f имеем

$$\Delta(z_k) = \max_{z' = (x', y') \in G} [f(x_k, y') - f(x', y_k)] \le \max_{z' \in G} [\langle l_{ky}, y' - y_k\rangle - \langle l_{kx}, x' - x_k\rangle] \le n_k d \le \varepsilon,$$

т.е. точка z_k является ε-седловой точкой f на G.

Пусть $k(\varepsilon)$ – номер последней итерации метода, которая завершается отысканием ε-седловой точки, где ε удовлетворяет условиям (20) и (21). Для того чтобы получить верхнюю оценку для $k(\varepsilon)$, достаточно определить такое минимальное целое число k, при котором правая часть оценки (19) окажется не больше, чем $\varepsilon_1 = r(L+1)^{-1}d^{-1}\varepsilon - d\delta > 0$. Очевидно, таким числом является $]d^2\lambda^{-2}(1-\lambda^2)^{-1}\varepsilon_1^{-1}[$, где при любом вещественном a под $]a[$ понимается наименьшее целое число, большее либо равное a. Таким образом,

$$k(\varepsilon) \le]d^2\lambda^2(1-\lambda^2)^{-1}\varepsilon_1^{-1}[. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь случай грубой точности определения седловой точки, когда нарушено условие (20). Итак, пусть

$$\varepsilon \geq Ld. \tag{24}$$

Учитывая определение (3) величины $\Delta(z)$, можно заключить, что при соблюдении (24) любая точка $z \in G$ является ε-седловой точкой функции f на G. Поэтому $k(\varepsilon)$ – минимальное целое k, при котором $z_k \in G$. Согласно лемме 1, $k(\varepsilon) \leq k - 1$, если соблюдается условие (4). Выполнения условия (4) за счет уменьшения $\Delta_k > 0$ можно добиться лишь в случае, если

$$d\delta < r. \tag{25}$$

Используя лемму 2, выбираем минимальное целое k, при котором правая часть оценки (19) окажется меньше, чем $r - d\delta > 0$. Таким числом является

$$[d^2\lambda^{-2}(1-\lambda^2)^{-1}(r-d\delta)^{-1}] + 1,$$

где при любом вещественном a под $[a]$ понимается максимальное целое число, не большее, чем a. Поэтому при соблюдении (25)

$$k(\varepsilon) \leq [d^2\lambda^{-2}(1-\lambda^2)^{-1}(r-d\delta)^{-1}]. \tag{26}$$

Собирая вместе проведенные выше рассуждения, приходим к следующему утверждению о сходимости метода, изложенного в разд. 2.

Теорема. *Пусть $f(z) = f(x, y)$ – выпукло-вогнутая функция, определенная конечными значениями на выпуклом компакте $G = G_x \times G_y$ и липшицева на G с постоянной L, причем $G \subset M$, где M – многогранник диаметра d, G содержит шар радиуса $r > 0$. Седловой метод, описанный в разд.* 2, *позволяет для любого $\varepsilon > 0$ при соблюдении приведенных ниже требований к точности δ работы оракула найти ε-седловую точку функции f на G за $k(\varepsilon)$ итераций. При этом верхняя оценка для $k(\varepsilon)$ может быть вычислена одним из следующих двух способов*:

1) *если выполнены требования* (20) *и* (21), *то искомая оценка имеет вид* (23), *где* $\varepsilon_1 = r(L + 1)^{-1}d^{-1}\varepsilon - d\delta$, $\lambda \in (0, 1)$ – *параметр метода*;

2) *если выполнены требования* (24) *и* (25), *то верхняя оценка для* $k(\varepsilon)$ *имеет вид* (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бэр К., Гольштейн Е.Г., Соколов Н.А. (2000): Об использовании метода уровней для минимизации выпуклых функций, не все значения которых конечны // *Экономика и мат. методы.* Т. 36. № 4.

Бэр К., Гольштейн Е.Г., Соколов Н.А. (2001): Метод отыскания седловой точки функции, область определения которой содержится в многограннике // *Экономика и мат. методы.* Т. 37. № 3.

Поступила в редакцию
10.01.2007 г.

The Saddle Method Using the Imperfect Input Data

Ye. G. Golshtein

Describes the Oracle-type of finding the saddle point for convex-concave function considering mistakes in Oracle answers. The parameters of Oracle mistakes are described. Using these parameters the method allows to find ε-saddle point of the function with the fixed ε > 0. The author proposes the upper limit for the number of integrations, necessary for calculating the ε-saddle point.